

CONTROLUL STATISTIC AL PROCESELOR CU LIMBAJUL R

dr. ing. Nicolae EFTIMIE,

Departamentul de Ingineria Fabricației,
Facultatea de Inginerie Tehnologică și Management Industrial,
Universitatea Transilvania din Brașov



EDITURA
UNIVERSITĂȚII
TRANSILVANIA
DIN BRAȘOV

2023

Introducere

Controlul statistic al proceselor se bazează pe utilizarea tehnicilor statisticii matematice în scopul controlului proceselor sau a metodelor de producție. De aceea, pentru desfășurarea activităților din acest domeniu este necesară utilizarea unor pachete software tot mai performante.

Limbajul de programare *R* [RCT 22] a fost dezvoltat special pentru efectuarea analizelor statistice. Acest limbaj, care este gratuit și poate fi utilizat pe o varietate mare de platforme (*Windows, Unix, MacOS*), are în ultima vreme un număr tot mai mare de utilizatori, din tot mai multe domenii.

Pentru *Controlul Statistic al Proceselor* au fost dezvoltate biblioteci care facilitează aplicarea limbajului de programare *R* în acest domeniu. Printre acestea se remarcă biblioteca *qcc* [SCR 04], dezvoltată de către *Scrucca L* și biblioteca *ggQC* [GRE 18] dezvoltată de către *Grey K*.

Prezenta lucrare ilustrează într-un mod original aspecte privind aplicarea limbajului *R* la rezolvarea problemelor din domeniul *Controlului Statistic al Proceselor*.

Cartea este structurată în 4 capitole, după cum urmează:

Capitolul 1 cuprinde noțiuni introductive privind utilizarea limbajului *R* la lucrul cu fișele de control. La începutul capitolului sunt prezentate exemple de calcul pentru limitele de control 3 sigma, limitele de control corespunzătoare unei anumite valori a probabilității comiterii erorii de tip I, precum și pentru limitele de avertizare.

Capitolul se încheie cu exemple de întocmire a *Curbei Caracteristice Operative* și de calcul al valorilor lui *ARL* pentru fișa \bar{x} .

Capitolul 2 este dedicat studiului fișelor de control prin variabile.

În subcapitolul 2.1 se descrie modul de utilizare al bibliotecii *qcc* a limbajului *R* la lucrul cu fișa \bar{x} și *R*. Sunt prezentate aspecte legate de aplicarea *Fazei I* a fișei, analiza capacității proceselor, aplicarea *Fazei a II-a* a fișei, reprezentarea *Curbelor Caracteristicii Operative* precum și calculul valorilor lui *ARL*.

Subcapitolul 2.2 tratează noțiuni referitoare la fișa \bar{x} și *s*, pentru medie și abatere standard, studiindu-se atât cazul când mărimea eșantioanelor este constantă cât și cazul când mărimea eșantioanelor este variabilă. Biblioteca *R* utilizată este *qcc*. Pentru cazul când mărimea eșantioanelor este constantă sunt prezentate aceleași etape de lucru ca și în cazul fișei \bar{x} și *R*, iar pentru cazul în care mărimea eșantioanelor este variabilă se prezintă modul în care un proces este adus în stare de control statistic.

În subcapitolul 2.3 este prezentată utilizarea bibliotecii *ggQC* la lucrul cu fișa pentru mediană și amplitudine, descriindu-se modul în care se realizează aducerea unui proces în stare

de control statistic și analiza capabilității acestuia.

Subcapitolul 2.4 este dedicat fișei x și MR , pentru măsurători individuale și amplitudine mobilă. Biblioteca R utilizată este $ggQC$, iar etapele de lucru prezentate sunt aceleași ca și la fișa pentru mediană și amplitudine.

Capitolul 3 tratează aspecte legate de utilizarea bibliotecii qcc la lucrul cu fișele de control prin atribute.

În subcapitolul 3.1 se studiază fișa p pentru proporția de produse neconforme. Se prezintă atât cazul când mărimea eșantioanelor este constantă cât și cazul când aceasta este variabilă.

Subcapitolul 3.2 se referă la fișa np , pentru numărul de produse neconforme.

Următoarea fișă de control prin atribute tratată în lucrare este fișa c , pentru numărul de neconformități, aceasta fiind prezentată în subcapitolul 3.3.

În subcapitolul 3.4 se prezintă fișa u , pentru numărul de neconformități per unitate. Pentru această fișă sunt studiate cazurile când mărimea eșantioanelor este constantă și când aceasta este variabilă.

În capitolul 4 sunt prezentate două fișe de control utilizate în *Faza a II-a* de aplicare a *Controlului Statistic al Proceselor*.

Subcapitolul 4.1 studiază fișa $CUSUM$ iar subcapitolul 4.2 tratează aspecte legate de fișa $EWMA$. Pentru ambele fișe se utilizează biblioteca qcc .

În lucrare se acordă o importanță deosebită atât aspectelor de ordin științific cât și celor cu caracter didactic.

Noțiunile prezentate în carte sunt utile studenților specializării de masterat *Managementul Calității*, patronată de către departamentul de *Ingineria Fabricației*, al *Facultății de Inginerie Tehnologică și Management Industrial*, de la *Universitatea Transilvania din Brașov*. Lucrarea se adresează, de asemenea masteranzilor, inginerilor și specialiștilor care își desfășoară activitatea în domeniul *Ingineriei Calității*.

Autorul prezentei lucrări mulțumește tuturor cercetătorilor care au contribuit la dezvoltarea limbajului de programare R și în mod deosebit lui *Scrucca L.*, dezvoltatorul bibliotecii qcc și lui *Grey K.*, dezvoltatorul bibliotecii $ggQC$.

Brașov, aprilie 2023

Nicolae EFTIMIE,

Departamentul de Ingineria Fabricației,
Facultatea de Inginerie Tehnologică
și Management Industrial,
Universitatea Transilvania din Brașov

Cuprins

Introducere.....	3
Cuprins.....	5
1. Fișe de control statistic.....	6
2. Fișe de control prin variabile.....	15
2.1 Fișa \bar{x} și R, pentru medie și amplitudine.....	15
2.2 Fișa \bar{x} și s, pentru medie și abatere standard.....	36
2.2.1 Fișa \bar{x} și s cu mărime constantă a eșantioanelor.....	36
2.2.2 Fișa \bar{x} și s cu mărime variabilă a eșantioanelor.....	51
2.3 Fișa \tilde{x} și R, pentru mediană și amplitudine.....	64
2.4 Fișa x și MR, pentru măsurători individuale și amplitudine mobilă.....	74
3. Fișe de control prin atribute.....	83
3.1 Fișa p, pentru proporția de produse neconforme.....	83
3.1.1 Fișa p cu mărime constantă a eșantioanelor.....	83
3.1.2 Fișa p cu mărime variabilă a eșantioanelor.....	94
3.2 Fișa np, pentru numărul de produse neconforme.....	100
3.3 Fișa c, pentru numărul de neconformități.....	106
3.4 Fișa u, pentru numărul de neconformități per unitate.....	115
3.4.1 Fișa u cu mărime constantă a eșantioanelor.....	115
3.4.2 Fișa u cu mărime variabilă a eșantioanelor.....	121
4. Fișe utilizate în faza II de aplicare a controlului statistic al proceselor.....	127
4.1 Fișa CUSUM (cu sume cumulate).....	127
4.2 Fișa EWMA pentru medie mobilă ponderată exponențial.....	133
Bibliografie.....	137

1. Fișe de control statistic

Toate procesele prezintă o anumită variabilitate care se datorează influenței unor cauze de variație, care pot fi de două tipuri.

În primul rând, procesele sunt afectate de un număr mare de cauze comune de variație, fiecare dintre acestea având o influență redusă asupra procesului [MON 13]. Aceste cauze de variație sunt inevitabile și au ca efect producerea variabilității inerente a procesului.

Procesele a căror variabilitate se datorează doar influenței unor cauze comune de variație au o desfășurare previzibilă și se consideră a fi *în stare de control statistic*.

În anumite situații, procesele pot fi influențate și de un alt tip de cauze de variație, care pot afecta în mod semnificativ distribuțiile caracteristicilor de calitate studiate.

Aceste cauze de variație, care apar în mod accidental în procese și fac ca desfășurarea acestora să se realizeze în mod imprevizibil se numesc *cauze speciale de variație*.

Procesele influențate de cauze speciale de variație nu sunt *în stare de control statistic*.

Dacă o anumită cauză specială de variație are o influență negativă asupra unui proces, aceasta trebuie identificată și eliminată din respectivul proces.

Cauzele speciale de variație cu efect pozitiv trebuie depistate și păstrate în continuare în desfășurarea respectivului proces.

Pentru a determina dacă un anumit proces este influențat de cauze speciale de variație este nevoie de un instrument al *Controlului Statistic al Proceselor*.

Acest instrument este reprezentat de fișa de control statistic (Figura 1.1) [EFT 15]:

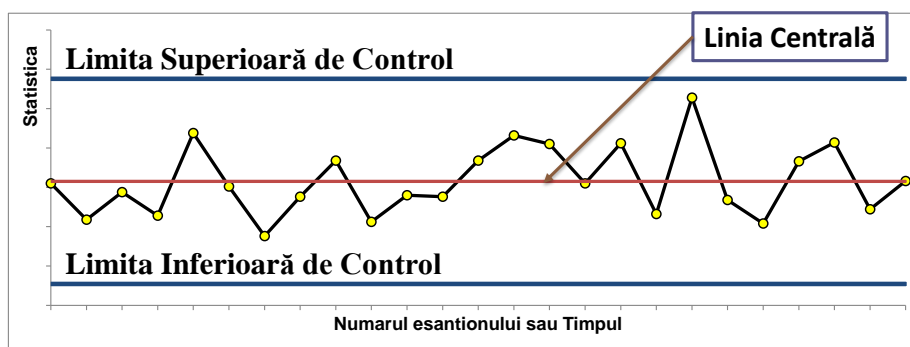


Figura 1.1 Fișa de control

Punctele fișei reprezintă valorile statisticii utilizate la controlul procesului. Pe lângă puncte, fișa de control mai conține o linie centrală și două limite de control. În cazul unui proces aflat în stare de control statistic, aproape toate punctele de pe fișă se vor afla între limitele de control [MON 13].

Un punct aflat în afara limitelor de control indică faptul că procesul a fost influențat de o cauză specială de variație, deci nu mai este în stare de control statistic.

Atunci când un proces este controlat cu ajutorul unei fișe de control se pot comite două tipuri de erori [MON 13]:

Eroarea de tip I se comite atunci când procesul este în stare de control statistic și cu ajutorul fișei se trage concluzia că acesta nu este sub control. Probabilitatea de comitere a acestei erori se notează cu α .

Eroarea de tip II se comite în cazul când un proces care nu este sub control este considerat a fi în stare de control statistic. Probabilitatea comiterii acestei erori se notează cu β .

Dacă se consideră cazul când valorile statisticii reprezentate pe o fișă de control sunt mediile eșantioanelor, atunci linia centrală și limitele de control pentru fișa \bar{x} se determină cu ajutorul relațiilor următoare [MON 13]:

$$LC\bar{x} = \mu \quad (1.1)$$

$$LSC\bar{x} = \mu + Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad (1.2)$$

$$LIC\bar{x} = \mu - Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad (1.3)$$

În relațiile precedente, μ reprezintă media procesului iar abaterea standard a distribuției mediilor $\sigma_{\bar{x}}$ se calculează cu ajutorul abaterii standard a procesului σ și a mărimii eșantioanelor n :

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.4)$$

Pentru o valoare a lui $Z_{\alpha/2}$ egală cu 3 se obțin limitele de control “3 sigma”:

$$LSC\bar{x} = \mu + 3 \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad (1.5)$$

$$LIC\bar{x} = \mu - 3 \cdot \sigma_{\bar{x}} \quad (1.6)$$

Pentru o statistică w , care are media μ_w și abaterea standard σ_w , linia centrală și limitele de control ale fișei se pot calcula cu relațiile următoare [MON 13]:

$$LCw = \mu_w \quad (1.7)$$

$$LSCw = \mu_w + L\sigma_w \quad (1.8)$$

$$LICw = \mu_w - L\sigma_w \quad (1.9)$$

În relațiile (1.8) și (1.9) prin L s-a notat “distanța” limitelor de control față de linia centrală, exprimată în unități de abatere standard.

Limitele de control ale fișei se pot calcula și pe baza unei valori dorite a probabilității erorii de tip I, α [MON 13].

De exemplu, se pot utiliza la construirea unei fișe de control limite corespunzătoare unei valori a lui $\alpha/2$ egale cu 0.001 (mai precis, limite corespunzătoare unei valori a probabilității erorii de tip I într-o direcție egală cu 0.001).

În unele companii, pe lângă limitele de control, pe fișe se reprezintă și un set de limite de

avertizare (Figura 1.2) [EFT 15]:

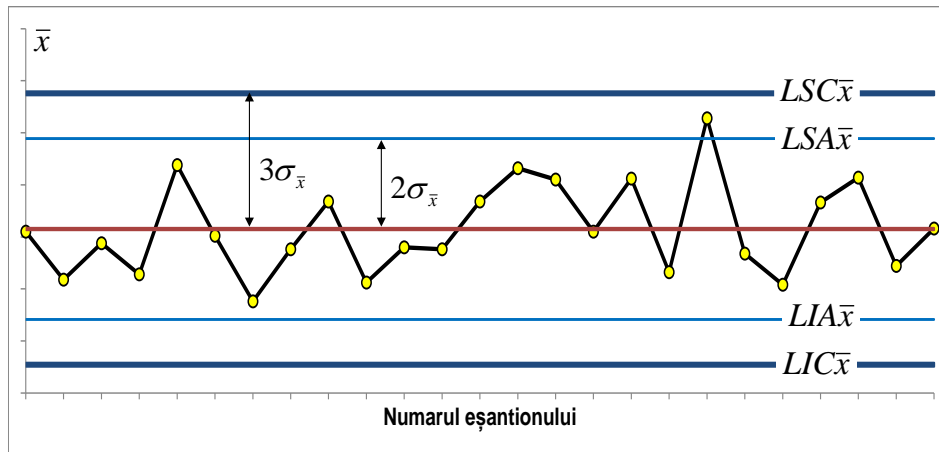


Figura 1.2 Fișă \bar{x} cu limite de control 3σ și limite de avertizare 2σ

În cazul când limitele de control sunt reprezentate la o distanță de 3 abateri standard ale statisticii față de linia centrală, limitele de avertizare vor fi reprezentate la o distanță de 2 abateri standard ale statisticii față de linia centrală.

În cazul când se utilizează limite de control corespunzătoare pentru $\alpha/2 = 0.001$, limitele de avertizare vor fi corespunzătoare unei valori $\alpha/2 = 0.025$ [MON 13].

Dacă un punct de pe fișă se află între o limită de control și limita de avertizare corespunzătoare, se va încerca obținerea rapidă de informații suplimentare despre proces prin mărirea frecvenței de eșantionare și/sau majorarea mărimii eșantioanelor.

Exemplul 1.1 Calculul limitelor de control și de avertizare pentru fișă \bar{x}

Se consideră cazul unui proces pentru care media $\mu = 20$ și abaterea standard este $\sigma = 0.01$. Fișă \bar{x} utilizată pentru ținerea sub control a localizării procesului este întocmită cu ajutorul unor eșantioane de mărime $n = 5$.

În continuare se prezintă modul de calcul al limitelor de control și de avertizare cu ajutorul limbajului R. La crearea codului R s-au utilizat funcții care fac parte din biblioteca *qcc* 3.0 [SCR 04], (bibliotecă pentru fișele de control și Controlul Statistic al Proceselor, dezvoltată de către Scrucca L).

Codul R pentru calculul limitelor de control 3 sigma este următorul:

```
1 library(qcc)
2 miu<-20
3 sigma<-0.01
4 n<-5
5 ##Limite 3sigma
6 Limite_3sigma<-limits.xbar(center = miu, std.dev = sigma,
7   sizes = n, nsigmas = 3)
8 cat("Limitele de control 3sigma sunt:\n LICxbar=",Limite_3sigma[1],
9   "\n LSCxbar=",Limite_3sigma[2])
```

Figura 1.3 Codul utilizat pentru calculul limitelor 3 sigma

Pe linia 1 a codului se încarcă biblioteca *qcc*, iar în continuare, pe liniile 2-4 se atribuie valori pentru media și abaterea standard a procesului, precum și pentru mărimea eșantioanelor.

În continuare, pe liniile 6-7 este apelată funcția *limits.xbar* din biblioteca *qcc*, care primește ca argumente media procesului, abaterea standard a acestuia, mărimea eșantioanelor și numărul de abateri standard ale distribuției mediilor. Funcția returnează o matrice cu o linie și două coloane și conține ca elemente limitele de control.

Ultimele două linii conțin codul pentru afișarea rezultatelor.

Rezultatul rulării codului este prezentat în continuare (Figura 1.4):

```
Limitele de control 3sigma sunt:
LICxbar= 19.98658
LSCxbar= 20.01342
```

Figura 1.4 Limitele de control 3 sigma

Codul *R* pentru calculul limitelor de control corespunzătoare unei valori a lui $\alpha/2$ egală cu 0.001 este prezentat în continuare:

```
11 ##Limite corespunzatoare pentru alfa/2=0.001
12 Limite_prob<-limits.xbar(center = miu, std.dev = sigma,
13     sizes = n, conf = 0.998)
14 cat("Limitele de control pentru alfa/2 = 0.001:\n LICxbar_prob=",
15     Limite_prob[1],
16     "\n LSCxbar_prob=",Limite_prob[2])
```

Figura 1.5 Codul *R* utilizat la calculul limitelor corespunzătoare pentru $\alpha/2 = 0.001$

Pentru calculele următoare sunt utilizate aceleași valori ca și mai înainte pentru media și abaterea standard a procesului, precum și pentru mărimea eșantioanelor.

În cazul calculului limitelor de control corespunzătoare unei anumite valori a lui $\alpha/2$, funcția *limits.xbar* nu mai utilizează ca argument numărul de abateri standard ale distribuției mediilor ci nivelul de încredere *conf* corespunzător nivelului de semnificație α .

Rezultatele sunt prezentate în continuare (Figura 1.6):

```
Limitele de control pentru alfa/2 = 0.001:
LICxbar_prob= 19.98618
LSCxbar_prob= 20.01382
```

Figura 1.6 Limitele de control corespunzătoare lui $\alpha/2 = 0.001$

Codul *R* pentru calculul limitelor de avertizare 2 sigma este următorul:

```
18 ##Limite de avertizare 2sigma
19 Limite_2sigma<-limits.xbar(center = miu, std.dev = sigma,
20     sizes = n, nsigmas = 2)
21 cat("Limitele de avertizare 2sigma:\n LIxbar=",Limite_2sigma[1],
22     "\n LSxbar=",Limite_2sigma[2])
```

Figura 1.7 Codul utilizat pentru calculul limitelor de avertizare 2 sigma

În acest caz, funcția *limits.xbar* primește pentru argumentul *numărul de abateri standard ale distribuției mediilor* valoarea 2.

Rezultatul rulării codului este prezentat în continuare (Figura 1.8):

```

Limitele de avertizare 2sigma:
LIAxbar= 19.99106
LSAxbar= 20.00894

```

Figura 1.8 Limitele de avertizare 2 sigma

Codul R pentru calculul limitelor de avertizare corespunzătoare unei valori a lui $\alpha/2$ egală cu 0.025 este prezentat în continuare:

```

24 ##Limite de avertizare corespunzatoare pentru
25 ##alfa/2=0.025
26 LA_prob<-limits.xbar(center = miu, std.dev = sigma,
27                       sizes = n, conf = 0.95)
28 cat("Limitele de avertizare pentru alfa/2=0.025:\n LIAprob=",
29     LA_prob[1],
30     "\n LSAProb=",LA_prob[2])

```

Figura 1.9 Codul R utilizat la calculul limitelor corespunzătoare pentru $\alpha/2 = 0.025$

În acest caz, funcția *limits.xbar* primește ca argument nivelul de încredere *conf* corespunzător pentru $\alpha/2 = 0.025$.

Rezultatele sunt prezentate în continuare (Figura 1.10):

```

Limitele de avertizare pentru alfa/2=0.025:
LIAprob= 19.99123
LSAProb= 20.00877

```

Figura 1.10 Limitele de avertizare corespunzătoare lui $\alpha/2 = 0.025$

Curba caracteristicii operative (CCO) a fișei \bar{x} este o reprezentare grafică a probabilității comiterii erorii de tip II, β , în funcție de media procesului.

În continuare este prezentat un exemplu de reprezentare grafică a Curbei caracteristicii operative cu ajutorul limbajului R.

Exemplul 1.2 Reprezentarea grafică a curbei caracteristicii operative pentru fișa mediilor

Media unui proces normal distribuit atunci când acesta este în stare de control statistic este $\mu_0 = 20$ mm, iar abaterea standard a acestuia este $\sigma = 0.01$ mm. Mărimea eșantioanelor utilizate pentru întocmirea fișei \bar{x} este $n = 5$. Pentru reprezentarea grafică a CCO, mai întâi se încarcă biblioteca *qcc* și se atribuie valori pentru μ_0 , σ și n :

```

33 library(qcc)
34 miu0<-20
35 sigma<-0.01
36 n<-5

```

Figura 1.11 Datele inițiale pentru Curba Caracteristicii Operative a fișei *xbar*

Abateră standard a distribuției mediilor se calculează cu ajutorul relației (1.4), iar în continuare se creează un vector care conține valorile mediei procesului pentru care se reprezintă grafic *CCO* și se calculează limitele de control 3sigma pentru fișa \bar{x} (Figura 1.12):

```
37 sigma_xbar<-sigma/sqrt(n)
38 miu<-seq(from=20, to=20.03, by=0.001)
39 Limite_3sigma<-limits.xbar(center = miu0, std.dev = sigma,
40 sizes = n, nsigmas = 3)
```

Figura 1.12 Calcule necesare pentru reprezentarea grafică a *CCO*

Pentru calculul valorilor probabilității erorii de tip II se creează funcția *beta* (Figura 1.13):

```
41 beta<-function(x){
42   rezultat=pnorm(q = Limite_3sigma[2], mean = x, sd = sigma_xbar)-
43   pnorm(q = Limite_3sigma[1], mean = x, sd = sigma_xbar)
44   return(rezultat)
45 }
```

Figura 1.13 Funcția *beta*

Această funcție va calcula aria de sub graficul distribuției mediilor, situată între limitele de control 3 sigma.

Comenzile necesare pentru reprezentarea grafică a *CCO* sunt prezentate în continuare:

```
46 CCO<-ggplot(data.frame(x=miu), aes(x))+
47   geom_function(fun=beta, size=1)+
48   labs(title = "CCO pentru n = 5", x="Media miu", y="beta")
49 CCO
```

Figura 1.14 Reprezentarea grafică a *CCO*

Obiectului *CCO* i se va atribui rezultatul returnat de funcția *ggplot()* (linia 46).

Această funcție, care face parte din biblioteca *ggplot2* [WIK 16], stabilește ca sursă a datelor un cadru de date creat cu ajutorul vectorului *miu* și realizează corespondența dintre variabila *x* și axa *OX* a sistemului de coordonate.

În continuare este apelată funcția *geom_function()* (linia 47).

Cu ajutorul argumentului *fun* se stabilește funcția care va fi reprezentată grafic. Aceasta este funcția *beta*, definită anterior.

Argumentul *size* stabilește grosimea graficului ca fiind 1.

Funcția *labs()* (linia 48) este utilizată pentru stabilirea titlului graficului, precum și a titlurilor axelor.

Reprezentarea grafică a curbei caracteristicii operative este realizată prin apelul obiectului *CCO*, de tip *ggplot*.

Rezultatul rulării codului *R* prezentat în acest exemplu este prezentat în continuare (Figura 1.15).