

MONICA ANA PARASCHIVA PURCARU

ALEXANDRU OANA

**ALGEBRĂ LINEARĂ. GEOMETRIE ANALITICĂ.
GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ**



EDITURA
UNIVERSITĂȚII
TRANSILVANIA
DIN BRAȘOV

2023

Introducere.....	2
Chestionar evaluare prerechizite.....	6
Modulul I Algebră liniară.....	7
Unitatea de învățare I.1. Spații vectoriale euclidiene.....	8
I.1.1. Introducere.....	8
I.1.2. Competențele unității de învățare	8
I.1.3. Spații vectoriale. Definiție. Exemple.....	9
I.1.4. Combinație liniară. Sistem de generatori. Liniar independentă și liniar dependentă	11
I.1.5. Bază. Dimensiune.....	14
I.1.6. Schimbarea bazei	17
I.1.7. Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale	22
I.1.8. Spații vectoriale euclidiene și unitare.....	26
I.1.9. Ortogonalitate într-un spațiu vectorial euclidian.....	28
I.1.10. Dreaptă de regresie.....	29
I.1.10. Rezumat	30
I.1.11. Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	31
I.1.12. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare	32
Unitatea de învățare I.2. Transformări liniare.....	33
I.2.1. Introducere.....	33
I.2.2. Competențe	33
I.2.3. Noțiunea de transformare liniară.....	34
I.2.4. Transformări liniare pe spații vectoriale finit dimensionale.....	38
I.2.5. Transformări liniare pe spații vectoriale unitare (euclidiene).....	43
I.2.6. Rezumat.....	46

I.2.7. Test de autoevaluare.....	47
I.2.8. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	47
Unitatea de învățare I.3. Valori proprii. Vectori proprii.....	48
I.3.1. Introducere.....	48
I.3.2. Competențe	48
I.3.3. Valori și vectori proprii	48
I.3.4. Reducerea unei matrice la forma diagonală.....	54
I.3.5. Rezumat.....	58
I.3.6. Test de autoevaluare.....	58
I.3.7. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare	58
Unitatea de învățare I.4. Forme biliniare și forme pătratice.....	60
I.4.1. Introducere.....	60
I.4.2. Competențe	60
I.4.3. Forme biliniare. Definiție. Exemple. Matrice atașată.....	61
I.4.4. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică	64
I.4.5. Clasificarea formelor pătratice. Signatură	70
I.4.6. Rezumat.....	72
I.4.7. Test de autoevaluare a cunoștințelor	72
I.4.8. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	73
Temă de control 1 – Algebră liniară.....	74
Modulul II Geometrie analitică.....	75
Unitatea de învățare II.1. Spațiul vectorial euclidian al vectorilor liberi.....	76
II.1.1. Introducere.....	76

II.1.2. Competențele unității de învățare	76
II.1.3. Spațiul vectorial al vectorilor liberi.....	77
II.1.4. Coliniaritate și coplanaritate.....	83
II.1.5. Produsul scalar.....	85
II.1.6. Produsul vectorial	89
II.1.7. Produsul mixt	93
II.1.8. Dublul produs vectorial.....	96
II.1.9. Rezumat.....	97
II.1.10. Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	97
II.1.11. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	98
Unitatea de învățare II.2. Planul și dreapta în spațiu.....	99
II.2.1. Introducere.....	100
II.2.2. Competențele unității de învățare.....	100
II.2.3. Ecuații de plane.....	100
II.2.3.1. Planul determinat de trei puncte necoliniare.....	101
II.2.3.2. Planul determinat de o dreaptă și un punct exterior dreptei.....	102
II.2.3.3. Planul determinat de un punct și două direcții necoliniare.....	102
II.2.3.4. Planul determinat de punct și de un vector normal.....	104
II.2.3.5. Ecuația generală a planului.....	104
II.2.3.6. Ecuația planului prin tăieturi.....	105
II.2.4. Fascicule de plane	106
II.2.5. Ecuații de drepte.....	108
II.2.5.1. Dreapta determinată de două puncte.....	108
II.2.5.2. Dreapta determinată de un punct și un vector nenul.....	109
II.2.5.3. Dreapta ca intersecție a două plane.....	110
II.2.6. Poziții relative de drepte și plane.....	116
II.2.6.1. Poziția unei drepte față de un plan.....	116

II.2.6.2	Pozițiile relative a două drepte.....	117
II.2.7.	Unghiuri și distanțe în spațiu.....	120
II.2.7.1.	Unghiul dintre două plane orientate.....	120
II.2.7.2.	Unghiul dintre două drepte orientate	121
II.2.7.3.	Unghiul dintre o dreaptă și un plan.....	122
II.2.7.4.	Distanța de la un punct la un plan.....	122
II.2.7.5.	Distanța de la un punct la o dreaptă	124
II.2.7.6.	Distanța dintre două drepte orientate.....	124
II.2.8.	Rezumat.....	130
II.2.9.	Test de autoevaluare a cunoștințelor	131
II.2.10.	Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare	131
Unitatea de învățare II.3. Translații și rotații. Schimbări de repere în plan și în spațiu.		133
II.3.1.	Introducere.....	133
II.3.2.	Competențele unității de învățare.....	133
II.3.3.	Translația și rotația reperului cartezian.....	134
II.3.4.	Trecerea de la reperul cartezian la reperul polar în plan.....	138
II.3.5.	Trecerea de la reperul cartezian la reperul cilindric în spațiu.....	139
II.3.6.	Trecerea de la reperul cartezian la reperul sferic în spațiu.....	141
II.3.7.	Rezumat.....	142
II.3.8.	Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	143
II.3.9.	Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	143
Unitatea de învățare II.4. Conice.....		145
II. 4.1.	Introducere.....	145
II.4.2.	Competențele unității de învățare.....	145
II.4.3.	Noțiuni generale.....	146
II.4.4.	Centrul unei conice.....	148
II.4.5.	Reducerea la forma canonică a ecuației unei conice.....	151
II.4.5.1.	Metoda valorilor proprii.....	152
II.4.5.2.	Metoda roto-translației	156
II.4.6.	Intersecția unei conice cu o dreaptă.....	159
II.4.7.	Pol și polară.....	164

II.4.8. Diametru conjugat cu o direcție dată.....	167
II.4.9. Direcții principale. Axele unei conice.....	169
II.4.10. Conice prin condiții inițiale.....	171
II.4.11. Rezumat.....	173
II.4.12. Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	173
II.4.13. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	174
Unitatea de învățare II.5. Cuadrice.....	176
II.5.1. Introducere.....	176
II.5.2. Competențele unității de învățare.....	176
II.5.3. Sfera.....	177
II.5.3.1. Ecuațiile sferei	177
II.5.3.2. Intersecția unei sfere cu o dreaptă	179
II.5.3.3. Poziția unui plan față de o sferă	181
II.5.3.4. Puterea unui punct față de o sferă	183
II.5.4. Elipsoidul.....	185
II.5.5. Hiperboloidul cu o pânză.....	186
II.5.6. Hiperboloidul cu două pânze.....	189
II.5.7. Paraboloidul eliptic.....	190
II.5.8. Paraboloidul iperbolic.....	191
II.5.9. Conul.....	193
II.5.10. Cilindrul.....	194
II.5.11. Rezumat.....	195
II.5.12. Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	196
II.5.13. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	196
Unitatea de învățare II.6. Generarea suprafețelor.....	197
II.6.1. Introducere.....	197
II.6.2. Competențele unității de învățare.....	197
II.6.3. Suprafețe cilindrice.....	198
II.6.4. Suprafețe conice.....	200
II.6.5. Conoid cu plan director.....	202
II.6.6. Suprafețe de rotație.....	204
II.6.7. Rezumat.....	206
II.6.8. Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	206

II.6.9. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	206
Temă de control 2 – Geometrie analitică.....	207
Modulul III Geometrie diferențială.....	209
Unitatea de învățare III.1. Curbe plane.....	210
III.1.1. Introducere.....	210
III.1.2. Competențele unității de învățare:.....	210
III.1.3. Reprezentarea analitică a curbelor plane	211
III.1.4. Tangenta și normala la o curbă plană într-un punct ordinar.....	213
III.1.5. Lungimea unui arc de curbă plană. Elementul de arc.....	217
III.1.6. Contactul între două curbe plane.....	219
III.1.7. Cercul osculator al unei curbe plane.....	222
III.1.8. Puncte multiple ale unei curbe plane.....	225
III.1.9. Înfășurătoarea unei familii de curbe plane.....	231
III.1.10. Evoluta (desfășurata) unei curbe plane	234
III.1.11. Curbura și raza de curbură a unei curbe plane.....	237
III.1.12. Rezumat	240
III.1.13 Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	240
III.1.14. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare	241
Unitatea de învățare III.2. Curbe în spațiu.....	242
III.2.1. Introducere.....	242
III.2.2. Competențele unității de învățare:.....	242
III.2.3. Reprezentarea analitică a curbelor în spațiu	243
III.2.4. Lungimea unui arc regulat de curbă. Element de arc	245
III.2.5. Tangenta la o curbă în spațiu.....	248
III.2.6. Planul normal la o curbă în spațiu.....	250
III.2.7. Planul osculator la o curbă în spațiu	252
III.2.8. Normala principală la o curbă în spațiu	254
III.2.9. Binormala la o curbă în spațiu	256
III.2.10. Planul rectificanț la o curbă în spațiu	258
III.2.11. Triedrul lui Frenet.....	259
III.2.12. Curbură. Torsiune	261
III.2.13. Formulele lui Frenet.....	264
III.2.14. Calculul curburii și al torsiunii.....	264

III.2.15. Clase remarcabile de curbe în spațiu.....	267
III.2.16. Rezumat.....	269
III.2.17. Test de autoevaluare a cunoștințelor	269
III.2.18. Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	270
Unitatea de învățare III.3. Suprafețe.....	271
III.3.1. Introducere.....	271
III.3.2 Competențele unității de învățare:.....	271
III.3.3. Reprezentarea analitică a unei suprafețe.....	272
III.3.4. Curbe trasate pe o suprafață. Curbe coordonate	274
III.3.5. Planul tangent și normala la o suprafață.....	278
III.3.6. Prima formă fundamentală a unei suprafețe. Aplicații ale acesteia.....	283
III.3.7. A doua formă fundamentală a unei suprafețe. Curbura unei curbe trasate pe o suprafață. Curburile unei suprafețe. Clasificarea punctelor unei suprafețe.....	289
III.3.8 Rezumat	301
III.3.9 Test de autoevaluare a cunoștințelor.....	301
III.3.10 Răspunsuri și comentarii la testul de autoevaluare.....	302
Temă de control 3 – Geometrie diferențială.....	303
Bibliografie.....	304

Introducere

Cursul de față se adresează în principal studenților de anul I de la Facultatea de Inginerie Tehnologică, programul de studii: Inginerie Economică Industrială, care se pregătesc să devină ingineri la forma de învățământ ID (Învățământ deschis și la distanță).

Acest curs reprezintă un ghid practic, care include noțiunile, rezultatele teoretice de bază, precum și tipurile de probleme care apar în cadrul disciplinei: ALGEBRĂ LINIARĂ, GEOMETRIE ANALITICĂ ȘI DIFERENȚIALĂ.

Aceste ramuri ale matematicii constituie o componentă importantă a pregătirii științifice a fiecărui student din învățământul superior tehnic, prin numeroasele aplicații pe care le au, prin abilitățile de calcul pe care le dezvoltă și prin numeroasele metode de modelare matematică pe care le propune.

Cunoștințele prezentate în acest curs sunt fundamentale pentru pregătirea studenților atât prin contribuția adusă la definirea unei gândiri riguroase a fiecărui student, dar și prin aceea că ele își găsesc în întregime aplicabilitate în practică.

Asimilarea problemelor teoretice, a exemplelor și a exercițiilor prezentate în curs permit studentului să redescopere funcția modelatoare a matematicii și să o exerseze în acest sens.

Cursul a fost scris astfel ca limbajul, noțiunile și succesiunea unităților de învățare să fie în concordanță cu programa analitică de la forma de învățământ: zi.

Paragrafele teoretice sunt susținute de numeroase exemple și de probleme rezolvate, care dau posibilitatea aprofundării noțiunilor cuprinse în paragraful respectiv.

Lucrarea încearcă să răspundă unor necesități de adâncire a pregătirii în domeniul matematicii a tuturor celor interesați.



Obiectivele cursului

Obiectivul principal al acestui curs este de a-i iniția pe studenți în tainele a trei dintre ramurile de bază ale matematicii: algebra liniară, geometria analitică și ecuațiile diferențiale, atât de necesare unei culturi tehnice solide.



Competențe conferite

După parcurgerea și asimilarea materialului studentul va fi capabil:

- să acumuleze și să opereze cu cunoștințele de bază din domeniul algebrei liniare, geometriei analitice și ecuațiilor diferențiale;

- să pună în practică cunoștințele acumulate atât la disciplinele matematice, cât și la celelalte discipline de specialitate, utilizatoare ale noțiunilor;
- să-și formeze o gândire logică, un limbaj matematic adecvat și să-și dezvolte capacitatea de analiză și sinteză;
- să-și formeze capacitatea de autoevaluare.



Resurse și mijloace de lucru

Deoarece acest curs este parcurs în anul I, vom insista mai mult asupra modului de utilizare eficientă a acestuia.

Conținuturile unităților de învățare sunt întrerupte de diverse sarcini de lucru.

Acestea sunt anunțate printr-o imagine sugestivă și au titlul „TO DO:”. Este indicată rezolvarea cu consecvență a cerințelor formulate în sarcinile de lucru, imediat după parcurgerea conținuturilor tematice și a exercițiilor rezolvate, intitulate sugestiv „Exemple”.

Fiecare unitate de învățare conține un test de autoevaluare, care permite cititorului să verifice singur calitatea însușirii cunoștințelor studiate. În cazul apariției unor neclarități în legătură cu rezolvarea testelor de autoevaluare se pot folosi răspunsurile și sugestiile de rezolvare ale acestora, care se află la sfârșitul fiecărui test de autoevaluare. Dacă neclaritățile persistă este indicat a se lua legătura cu tutorele, la una dintre întâlnirile prevăzute prin calendarul disciplinei.

Parcurgerea unităților de învățare aferente primului și ultimului modul nu necesită existența unor mijloace sau instrumente de lucru.

Modulul al doilea, destinat geometriei analitice, necesită utilizarea unui calculator având acces la internet, iar ca instrumente de lucru: calculator de buzunar, riglă, compas, echer, raportor și creioane colorate.



Structura cursului

Materialul cursului este structurat în trei module: primul modul este destinat studiului algebrei liniare, modulul II, geometriei analitice, iar în modulul III se studiază ecuațiile diferențiale.

Elementele constitutive ale fiecărui modul sunt: cuprinsul, introducerea, competențele, unitățile de învățare și **tema de control**, care încheie modulul.