Mirela-Adriana Târnoveanu *Sorin-Nicolae Mureșan*

MATEMATICI SPECIALE ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Editura Universității Transilvania din Brașov

2023

Autori: Adriana-Mirela TÂRNOVEANU, Sorin-Nicolae MUREȘAN

Titlu: Matematici speciale și statistică matematică

Editura Universității Transilvania din Brașov

ISBN 978-606-19-1701-3

Anul apariției: 2023

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Matematică și Informatică.

CUPRINS

INTRODUCERE

Matematica este una dintre cele mai vechi și, în același timp, vii științe, aflată într-o continuă dezvoltare. Care ar fi explicația? Nu e greu de răspuns: datorită puternicelor metode pe care le-a dezvoltat pentru a rezolva variate probleme apărute în alte domenii de știință. De exemplu, funcționarea unui motor este descrisă, pe baza unor principii fizice, prin ecuații matematice destul de complicate, care implică calcul tensorial, ecuații integro-diferențiale, un aparat matematic care necesită un volum consistent de cunoștințe inițiale pur teoretice. Tot astfel, introducerea unui nou medicament (a se vedea vaccinurile anti-COVID) sau orice modelare a vieții sociale se face după un studiu statistic bine pus la punct matematic.

În aceste pagini cititorul va găsi noțiunile introductive și principalele rezultate matematice care sunt implicate în modelele descrise mai sus. Informațiile prezentate nu sunt exhaustive, dacă cititorul dorește să aprofundeze anumite studii sau să găsească alte aplicații el poate studia oricare dintre titlurile bibliografice de la sfârșitul cărții, titluri folosite, de altfel, și de autori.

Lucrarea se adresează studenților care au în Planul de Învățământ al specializării pe care o urmează disciplina Matematici speciale.

Autorii speră ca parcurgerea paginilor acestei cărți să fie mai lină decât a fost scrierea lor.

Unitatea de învățare 1. Ecuații diferențiale de ordinul întâi

Cuprins

1.1. Introducere

În cadrul acestei unități de învățare se înregistrează ecuațiile diferențiale de ordinul întâi cu metodele de integrare specifice, care conduc la obținerea soluțiilor generale ale acestora (familia curbelor integrale).

1.2. Competențele unității de învățare

După parcurgerea acestei unități de învățare studentul va fi capabil:

-să prezinte şi să exemplifice noțiunea de ecuație diferențială de ordinul întâi;

-să recunoască şi să aplice integrarea ecuațiilor de ordinul întâi: cu variabile separabile, de tip omogen şi reductibil la ele, liniare, Bernoulli, Riccati, cu diferențiale totale exacte precum şi acelea a căror soluție generală se obțin sub formă parametrică (Clairaut, Lagrange, etc.).

Durata medie de parcurgere a acestei unități de învățare este de 3 ore.

1.3. Considerații generale

Fie I un interval $\subset R$ şi $f : I \rightarrow R$ o funcție ce admite primitivă. Cea mai simplă ecuație diferențială este de forma:

$$y' = f(x) \tag{1.1}$$

şi rezolvarea ei se reduce la aflarea primitivei lui f :

$$y(x) = \int f(x)dx + C\,,\ C \in R \tag{1.2}$$

Fie $D \subset R^2$, unde D este o mulțime deschisă şi f : $D \rightarrow R$ este o funcție continuă. **Forma normală** a ecuației diferențiale de ordinul întâi este:

$$y' = f(x,y) \tag{1.3}$$

Presupunem că $Q : D \rightarrow R - \{0\}$ şi Q este o funcție continuă. Înmulțim (1.3) cu Q şi obținem:

$$Q(x,y) \cdot y' - Q(x,y) \cdot f(x,y) = 0 \tag{1.4}$$

sau

$$Q(x,y)\frac{dy}{dx} - Q(x,y) \cdot f(x,y) = 0 \tag{1.5}$$

sau

$$Q(x,y)dy - Q(x,y) \cdot f(x,y)dx = 0 \tag{1.6}$$

Dacă notăm cu $P(x,y) = -Q(x,y) \cdot f(x,y)$, atunci (1.6) devine:

$$Q(x,y)dy + P(x,y)dx = 0 \tag{1.7}$$

ce reprezintă o nouă formă a ecuației diferențiale de ordinul întâi.

1.4. Ecuația diferențială cu variabile separabile

O ecuație diferențială de forma:

$$a(x)dx + b(y)dy = 0 \tag{1.8}$$

unde $a : I_1 \rightarrow R, b : I_2 \rightarrow R$ sunt funcții continue date, se numeşte ecuație diferențială de ordinul întâi, cu **variabile separabile**

Teorema 1.: *Fie funcția $f : I_1 \times I_2 \rightarrow R$, unde:*

$$f(x,y) = \int_{x_0}^{x} a(t)dt + \int_{y_0}^{y} b(t)dt,\ (x_0 y_0) \in I_1 \times I_2 \tag{1.9}$$

şi f are proprietatea:

$$df(x,y) = a(x)dx + b(y)dy \tag{1.10}$$

Fiecare soluție $x \to y(x)$ a ecuației diferențiale cu variabile separabile, cu graficul $\subset I_1 \times I_2$, satisface relația $f(x,y(x)) = C$, unde C este o constantă.

Reciproc, dacă $f(x,y(x)) = C$ defineşte pe y ca funcție implicită, diferențiabilă de x, atunci această funcție este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separabile.

Demonstrație. Existența lui f este asigurată de continuitatea funcțiilor a şi b.

În plus:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\int_{x_0}^{x} a(t)dt\right) = a(x) \qquad 1.11$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left(\int_{y_0}^{y} b(t)dt\right) = b(y) \qquad 1.12$$

Cum

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad 1.13$$

rezultă că:

$$df(x,y) = a(x)dx + b(y)dy \qquad 1.14$$

Reciproc, presupunem că $x \to y(x), x \in (a_1,b_1) = I_1$ este soluție a ecuației diferențiale cu variabile separabile, aşa încât:

$$(x,y(x)) \in I_1 \times I_2, \forall x \in I_1 = (a_1,b_1) \qquad 1.15$$

Să aratăm că $f(x,y(x)) = C$.

Se consideră funcția compusă $x \to g(x) = f(x,y(x)), \forall x \in (a_1,b_1)$.

Atunci:

$$g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y(x)) \cdot y'(x) = \qquad 1.16$$

$$a(x) + b(y(x)) \cdot y'(x) = 0, \forall x \in (a_1,b_1). \qquad 1.17$$

deci g este o constantă C pe intervalul (a_1,b_1), deci, orice soluție y a ecuației diferențiabile cu variabile separabile, satisface ecuația implicită:

$$f(x,y) = C \qquad 1.18$$

Să presupunem acum, că ecuația $f(x,y) = C$ defineşte pe y ca o funcție implicită, diferențiabilă de x pe intervalul $(a_1,b_1) = I_1$.

Din $f(x,y) = C$ rezultă că $x \to g(x) = f(x,y(x))$este constantă pe (a_1,b_1), deci $g'(x) = 0 = a(x) + b(y) \cdot y'$ şi deci y este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separabile.

Această teoremă arată un procedeu de găsire a soluției ecuației diferențiale cu variabile separabile, deci soluția este definită prin familia de ecuații:

$$\int_{x_0}^{x} a(t)dt + \int_{y_0}^{y} b(t)dt = C \qquad 1.19$$

ce reprezintă o familie de curbe integrale.

O ecuație diferențiabilă de tipul

$$a_1(x) \cdot b_2(y)dx + a_2(x) \cdot b_1(y)dy = 0 \qquad 1.20$$

unde

$$a_1, a_2 \in C^0(I_1), b_1, b_2 \in C^0(I_2)$$

se numeşte ecuaţie diferenţială cu variabile separabile. Dacă ne limităm la subintervalele lui I_1 şi I_2 pe care $a_2(x) \neq 0, b_2(y) \neq 0,$ ecuaţia (1.20) primeşte forma:

$$\frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx + \frac{b_1(y)}{b_2(y)}dy = 0 \qquad 1.21$$

Exemple 1.$\Big[$vezi pagina de **Exemple**$\Big]$

1.5. Ecuaţia diferenţială omogenă

Forma generală a ecuaţiei, este:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),\ f \in C^0(I), x \neq 0 \qquad 1.22$$

Se face substituţia:

$$\frac{y}{x} = u \quad sau \quad y(x) = x \cdot u(x), \qquad 1.23$$

care reprezintă o schimbare de funcţie (u noua funcţie) prin păstrarea

argumentului: x.

Avem:

$$y'(x) = u(x) + xu'(x) \qquad 1.24$$

Înlocuind (1.24) în (1.22), rezultă:

$$u + xu' = f(u) \qquad 1.25$$

sau

$$u - f(u) + x \cdot \frac{du}{dx} = 0 \qquad 1.26$$

sau

$$(u - f(u))dx + xdu = 0 \qquad 1.27$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

Exemple 2.

Să se determine familia de curbe cu proprietatea că tangenta în punctul $B(x^2, y^2)$ taie axa Oy în $A(0, -\frac{1}{4}x^2)$.

Fie $y = y(x)$ curba căutată. Ecuaţia tangentei în punctul B este:

$$d \bullet Y - y^2 = y'(x)(X - x^2) \qquad 1.28$$

şi cum $A \in d$, rezultă:

$$-\frac{1}{4}x^2 - y^2 = y'(x)(0 - x^2) \qquad 1.29$$

sau:

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4} \qquad 1.30$$

Soluția generală a ecuației (1.30), este:

$$y = x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln(cx)}\right), x > 0, c > 0 \qquad 1.31$$

Exemple 3.[vezi pagina de **Exemple**]

1.6. Ecuații diferențiale reductibile la ecuații diferențiale de ordinul întâi, de tip omogen sau cu variabile separabile

Forma generală a unei astfel de ecuații este dată de:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \qquad 1.32$$

Funcțiile de gradul unu de la numărătorul şi numitorul lui f sunt satisfăcute de punctele din plan ale dreptelor:

$$\begin{aligned} d &: ax + by + c = 0 \\ d_1 &: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \end{aligned} \qquad 1.33$$

Cazul 1. Dreptele d_1 şi d nu sunt paralele, adică

$$\frac{a}{a_1} \neq \frac{b}{b_1}. \qquad 1.34$$

Fie (x_0, y_0) soluția sistemului(1.33)
Facem substituțiile:

$$X = x - x_0 \quad \text{şi} \quad Y = y - y_0 \qquad 1.35$$

şi înlocuind (1.35) în (1.32) rezultă :

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}\right) \qquad 1.36$$

care a devenit o ecuație diferențială de ordinul întâi de tip omogen.

Cazul 2. Dreptele d_1 şi d sunt paralele, adică

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \lambda. \tag{1.37}$$

Avem $a = a_1\lambda, b = b_1\lambda$ şi ecuaţia (1.32) devine

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{\lambda(a_1x + b_1y) + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{1.38}$$

În (1.38) se notează:

$$a_1x + b_1y(x) = z(x) \tag{1.39}$$

cu z noua funcţie şi atunci (1.38) devine

$$\frac{z' - a_1}{b_1} = \frac{\lambda z + c}{z + c_1} \tag{1.40}$$

care reprezintă o ecuaţie diferenţială de ordinul întâi cu variabile separabile.

Exemple 4. [vezi pagina de **Exemple**]

Exemple 5. [vezi pagina de **Exemple**]

1.7. Ecuaţia diferenţială de ordinul întâi liniară

Forma generală a acestei ecuaţii este:

$$\frac{dy}{dx} = yf(x) + g(x) \quad \text{unde } f, g \in C^0(I). \tag{1.41}$$

Se consideră ecuaţia omogenă:

$$\frac{dy}{dx} = yf(x) \tag{1.42}$$

care este cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y} = f(x)dx \ , \ \ln y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \ln C, \quad C > 0 \tag{1.43}$$

de unde

$$y = Ce^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt}, \ x_0 \in I \tag{1.44}$$

Să arătăm că există o funcţie $u : I \to R$ de clasa C^1 aşa încât:

$$y = u(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)dt} \tag{1.45}$$

să fie soluţie a ecuaţiei date, (1.41), neomogenă.
Din (1.45) avem: