

Elemente de matematici superioare

Cristina Maria PACURAR

2024

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa: Str. Iuliu Maniu nr. 41A
500091 Brașov
Tel.: 0268 476 050
Fax: 0268 476 051
E-mail: editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81.

Copyright © Autorul, 2024

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Matematică și Informatică, Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PĂCURAR, CRISTINA-MARIA

Elemente de matematici superioare / Cristina Maria Păcurar.

- Brașov : Editura Universității "Transilvania", 2024

Conține bibliografie

ISBN 978-606-19-1739-6

Cuprins

1	Șiruri de numere reale	9
1.1	Noțiuni teoretice	9
1.2	Probleme rezolvate	12
1.3	Probleme propuse	17
2	Serii de numere reale	20
2.1	Noțiuni teoretice	20
2.1.1	Sume parțiale	20
2.1.2	Serii remarcabile	22
2.2	Probleme rezolvate	22
2.3	Probleme propuse	27
3	Serii cu termeni pozitivi	29
3.1	Noțiuni teoretice	29
3.1.1	Criteriul I de comparație (cu inegalități)	29
3.1.2	Criteriul al II-lea de comparație (cu inegalități)	30
3.1.3	Criteriul al III-lea de comparație (cu limite)	30
3.2	Probleme rezolvate	30
3.3	Probleme propuse	34
4	Criterii de convergență	36
4.1	Noțiuni teoretice	36
4.2	Probleme rezolvate	39
4.3	Probleme propuse	45

5	Serii alternate. Serii de puteri	47
5.1	Noțiuni teoretice	47
5.1.1	Serii de puteri	48
5.2	Probleme rezolvate	50
5.3	Probleme propuse	58
6	Funcții de mai multe variabile	60
6.1	Noțiuni teoretice	60
6.1.1	Funcții de mai multe variabile reale	62
6.2	Probleme rezolvate	64
6.3	Probleme propuse	69
7	Derivate parțiale	71
7.1	Noțiuni teoretice	71
7.1.1	Derivate parțiale de ordinul întâi	71
7.1.2	Derivate parțiale de ordin superior	72
7.1.3	Elasticități parțiale	72
7.1.4	Funcții compuse	73
7.1.5	Funcții omogene	74
7.2	Probleme rezolvate	74
7.3	Probleme propuse	83
8	Diferențiabilitate	85
8.1	Noțiuni teoretice	85
8.1.1	Formula lui Taylor	87
8.1.2	Aproximări de ordinul al II-lea pentru funcții de două variabile reale	87
8.2	Probleme rezolvate	88
8.3	Probleme propuse	91
9	Extreme locale	92
9.1	Noțiuni teoretice	92
9.1.1	Extreme condiționate	93
9.2	Probleme rezolvate	94

9.3 Probleme propuse	101
10 Probleme de programare liniară	102
10.1 Noțiuni teoretice	102
10.1.1 Metoda grafică	103
10.2 Probleme rezolvate	104
10.3 Probleme propuse	108
11 Algoritmul simplex	109
11.1 Noțiuni teoretice	109
11.1.1 Pașii de rezolvare a unei PPL cu algoritmul simplex	110
11.2 Probleme rezolvate	112
11.3 Probleme propuse	117
12 Algoritmul simplex în două faze	119
12.1 Noțiuni teoretice	119
12.1.1 Pașii de rezolvare a unei PPL cu algoritmul simplex în două faze	119
12.2 Probleme rezolvate	120
12.3 Probleme propuse	127
13 Probabilități	128
13.1 Noțiuni teoretice	128
13.1.1 Probabilități condiționate	132
13.1.2 Scheme clasice de probabilitate	134
13.2 Probleme rezolvate	135
13.3 Probleme propuse	143
14 Variabile aleatoare	146
14.1 Noțiuni teoretice	146
14.1.1 Funcția de repartiție a unei variabile aleatoare . . .	148
14.2 Probleme rezolvate	149
14.3 Probleme propuse	152

15	Caracteristici numerice	154
15.1	Noțiuni teoretice	154
15.2	Probleme rezolvate	156
15.3	Probleme propuse	160

Prefață

Această carte se adresează în primul rând studenților de la științe economice, dar și celor de la facultățile tehnice, fiind concepută ca un instrument didactic accesibil și practic. Materialul este structurat într-un mod care facilitează înțelegerea, fiind ideal pentru cei la început de drum în domeniul matematicii, dar și pentru cei care doresc să își consolideze și să își extindă cunoștințele.

Cartea este structurată în 15 capitole dintre care capitolele 1-9 cuprind noțiuni de analiză matematică, capitolele 10-12 sunt dedicate problemelor de optimizare, iar capitolele 13-15, probabilităților. Fiecare capitol începe cu noțiuni teoretice, asigurându-se că fiecare cititor poate urmări și înțelege conceptele de bază, urmate de două secțiuni de probleme cu un nivel de dificultate accesibil. Problemele rezolvate ilustrează aplicarea teoriei în practică, crescând gradat în complexitate pentru a stimula gândirea critică și analitică a studenților. Fiecare capitol include, de asemenea, probleme propuse cu dificultate variabilă, oferind astfel o provocare suplimentară celor care doresc să exploreze subiectele individual.

CAPITOLUL 1

Șiruri de numere reale

1.1 Noțiuni teoretice

Notăm $\mathbb{N} = \{0, 1, \dots\}$ și $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$.

Definiția 1.1.1 Se numește **șir de numere reale** o aplicație $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care

$$f(n) = a_n,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiția 1.1.2 Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **mărginit** dacă există $M > 0$ astfel încât

$$|a_n| \leq M,$$

pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observația 1.1.1 Un șir este mărginit dacă există m, M astfel încât $m < a_n < M$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Definiția 1.1.3 Un șir $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se numește **monoton crescător** dacă

$$a_n \leq a_{n+1},$$