Simona LACHE • Andrei BENCZE

MECANICĂ (II)
CINEMATICĂ. DINAMICĂ

curs universitar

Editura
Universității
Transilvania
din Brașov

2024

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa:	Str. Iuliu Maniu nr. 41A
	500091 Brașov
Tel.:	0268 476 050
Fax:	0268 476 051
E-mail:	editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81

ISBN 978-606-19-1766-2 (ebook)

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Inginerie Mecanică, Facultatea de Inginerie Mecanică a Universității Transilvania din Brașov.

Tehnoredactare:
Șef lucr. dr. ing. Andrei BENCZE
Șef lucr. dr. ing. Mihaela Violeta MUNTEANU

Cuprins

1. Cinematica punctului material

1.1 Elemente generale ale mișcării punctului material

Cinematica este ramura Mecanicii care studiază mișcarea corpurilor, independent de masele lor și de cauzele care le produc (de exemplu: forțe, momente).

Se are în vedere mișcarea:

- punctului material;
- sistemelor de puncte materiale;
- corpurilor – considerate exclusiv din punct de vedere geometric (fără să se țină cont de masele lor și de interacțiunile dintre ele).

Se consideră un punct material cu o mișcare oarecare în spațiu.

- **<u>POZIȚIA</u>** reprezintă locul în care se găsește punctul material la un moment dat, față de un reper. Poziția se precizează prin mărimi geometrice: **distanțe** și **unghiuri**:
  - dacă mărimile acestora sunt constante, corpul este în REPAUS;
  - dacă unul dintre parametri variază, corpul este în MIȘCARE.

Poziția unui punct față de un reper se precizează prin **vectorul de poziție**, $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

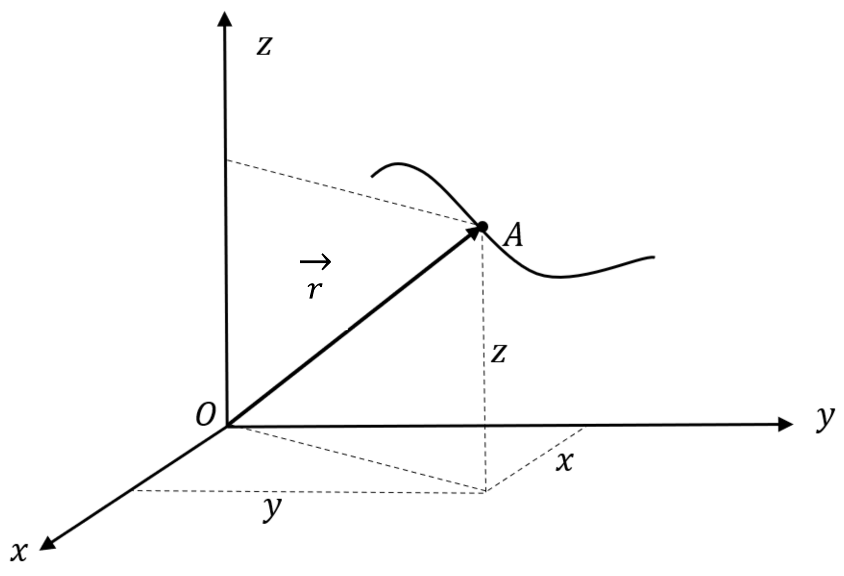


Fig. 1.1 Poziția punctului material

În Fig. 1.1 se pune în evidență vectorul de poziție al punctului A, aparținând curbei (Γ), în raport cu originea O a unui sistem de referință.

Se spune că mișcarea este complet determinată atunci când se cunoaște expresia funcției $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Funcția care descrie vectorul de poziție trebuie să îndeplinească următoarele condiții:

- să fie **uniform continuă**: punctul nu poate sări de la o poziție la alta, el trebuie să parcurgă toate punctele unei curbe continue ce unește poziția de start cu poziția finală;
- să fie **derivabilă**: legea a doua a lui Newton implică derivata a doua a vectorului de poziție $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \ddot{\vec{r}}$;
- să fie **finită în modul**: spațiul observabil să se afle la distanță finită.

Mărimile cu care se operează în cinematica punctului material sunt:

- traiectoria;
- viteza;
- accelerația.

1.1.1 Traiectoria

Traiectoria reprezintă locul geometric al pozițiilor succesive ale punctului material aflat în mișcare.

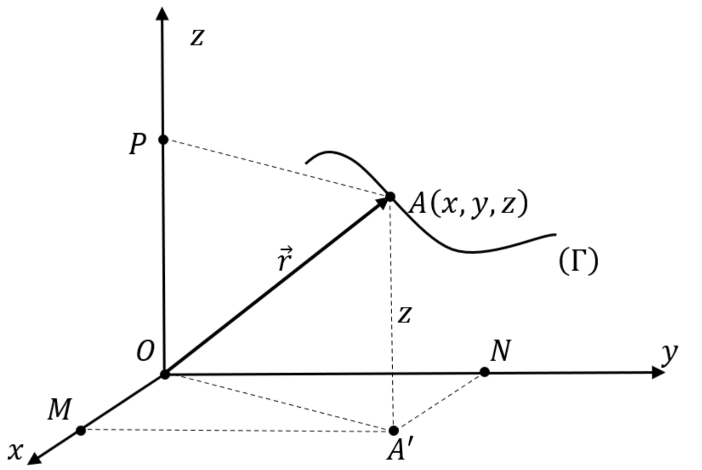
Traiectoria este, de regulă, o curbă (infinită sau închisă) sau un arc de cerc (de exemplu, mișcarea pendulului).

Traiectoria se exprimă, vectorial, prin funcția vectorială $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Prin raportare la un sistem de referință, traiectoria se poate preciza în diferite sisteme de coordonate (Fig. 1.2):

- sisteme de coordonate carteziene;
- sisteme de coordonate cilindrice;
- sisteme de coordonate polare;
- sisteme de coordonate sferice.

- Definirea poziției punctului material în coordonate **carteziene**

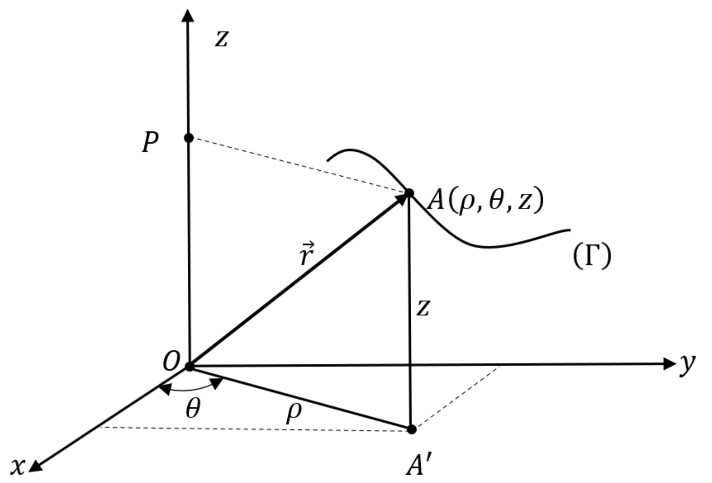


$$\vec{r} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

Fig. 1.2 a) Precizarea traiectoriei în coordonate carteziene

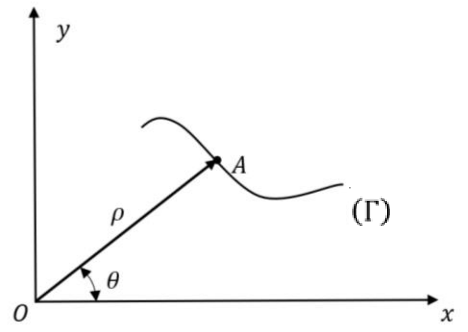
- Definirea poziției punctului material în coordonate **cilindrice**



$$\vec{r} \begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Fig. 1.2 b) Precizarea traiectoriei în coordonate cilindrice

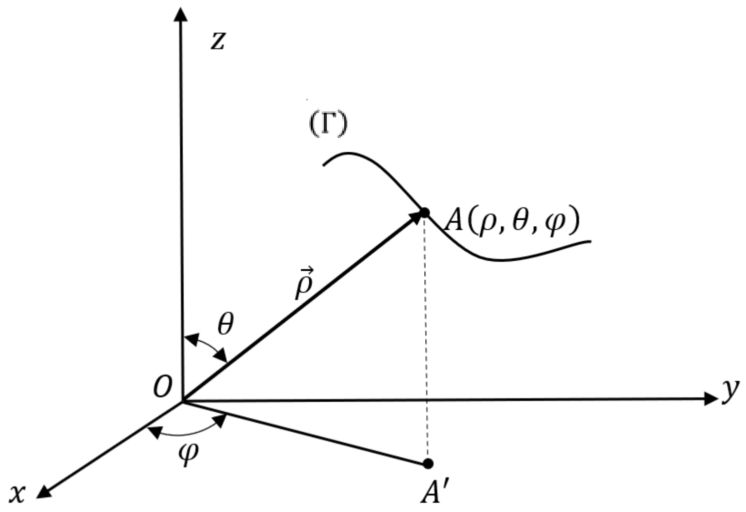
- Definirea poziției punctului material în coordonate **polare**



$$\begin{cases} \rho = \rho(t) \\ \theta = \theta(t) \end{cases}$$

Fig. 1.2 c) Precizarea traiectoriei în coordonate polare

■ Definirea poziției punctului material în coordonate **sferice**



$$\vec{r}\quad \begin{cases} \theta = \theta(t) \\ \rho = \rho(t) \\ \varphi = \varphi(t) \end{cases}$$

Fig. 1.2 d) Precizarea traiectoriei în coordonate sferice

Mențiune:

În problemele de cinematică, uneori este necesar să se cunoască funcția care determină distanța parcursă de punctul material, măsurată pe traiectorie. În acest caz, traiectoria se exprimă prin funcția $s = s(t)$ și se numește **lege orară** (Fig. 1.3).

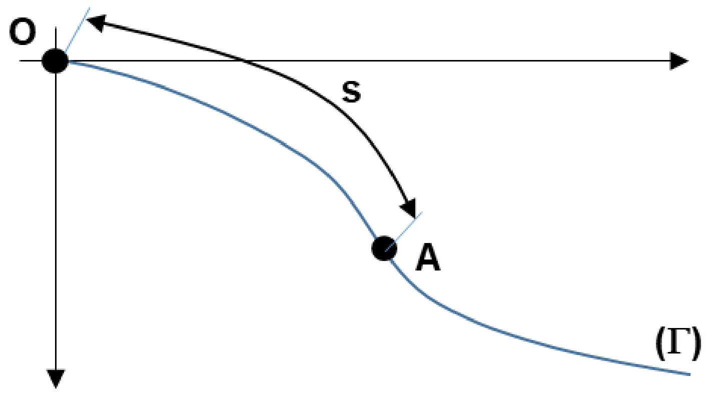


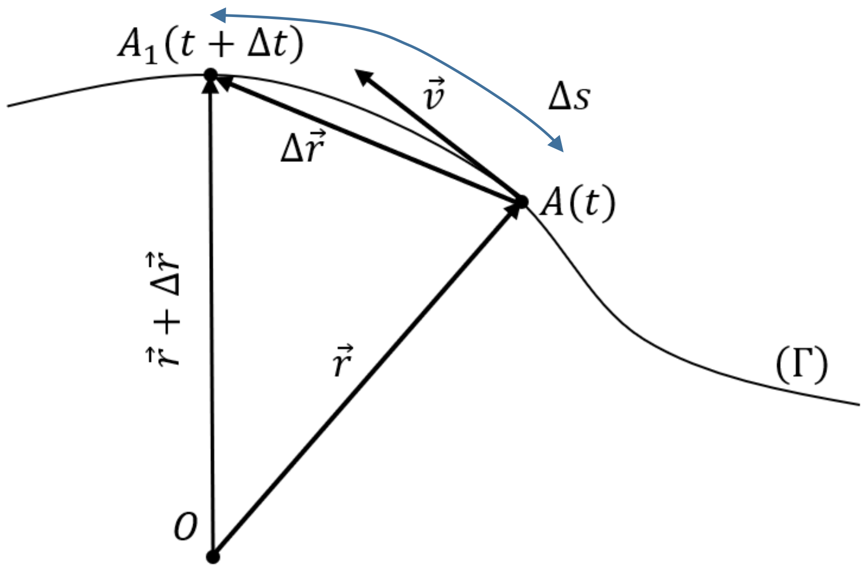
Fig. 1.3 Exprimarea traiectoriei prin legea orară

s reprezintă distanța, măsurată pe traiectorie, parcursă dintr-un punct O, numit **origine** până în locul în care se găsește punctul la un moment dat.

Funcția $s = s(t)$ se numește **lege orară** și exprimă modul în care variază acest drum; de exemplu, *Mersul trenurilor* se alcătuiește pe baza legii orare.

1.1.2 Viteza medie liniară. Viteza instantanee

Se consideră un punct material care se mișcă pe o curbă (Fig. 1.4).



Notații:

Δt – intervalul de timp în care se parcurge distanța Δs, măsurată pe traiectorie;

$\Delta\vec{r}$ – coarda care subîntinde arcul de curbă Δs.

Fig. 1.4 Reprezentarea vitezei punctului material

Se definește **viteza medie** (v_m) ca raport al distanței măsurate pe traiectorie (Δs) și intervalul de timp (Δt) în care s-a parcurs această distanță:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Aplicând operatorul limită se obține **viteza instantanee**:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v = \dot{s}$$

Conform definițiilor de mai sus nu se poate identifica direcția după care se desfășoară mișcarea; prin urmare, este nevoie de definirea vitezei ca mărime vectorială:

- Viteza medie:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

- Viteza instantanee:

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\vec{\tau} = v\cdot\vec{\tau} = \dot{s}\cdot\vec{\tau}$$

unde $\vec{\tau}$ este versorul tangentei la curbă.

Așadar, viteza instantanee va avea expresia vectorială:

$$\vec{v} = v \cdot \vec{\tau} = \dot{s} \cdot \vec{\tau}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

În concluzie, **viteza se definește ca mărimea vectorială ce măsoară variația spațiului în raport cu timpul, are <u>direcția</u> tangentă la traiectorie, <u>punctul de aplicație</u> în punctul a cărui mișcare se studiază, iar <u>sensul</u> este dat de sensul mișcării.**

Unitatea de măsură pentru viteză este:

$$[v] = \frac{[L]}{[T]} = \frac{m}{s}$$

Viteza este derivata spațiului în raport cu timpul. Ca mărime vectorială, este **derivata de ordinul I a vectorului de poziție** ($\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$).

1.1.3 Accelerația medie liniară. Accelerația instantanee

La mișcarea punctului material pe o traiectorie, viteza poate varia, la rândul ei. Pentru a exprima variația vitezei, în punctul A se construiește un vector echipolent cu $\vec{v}_1$ (Fig. 1.5).

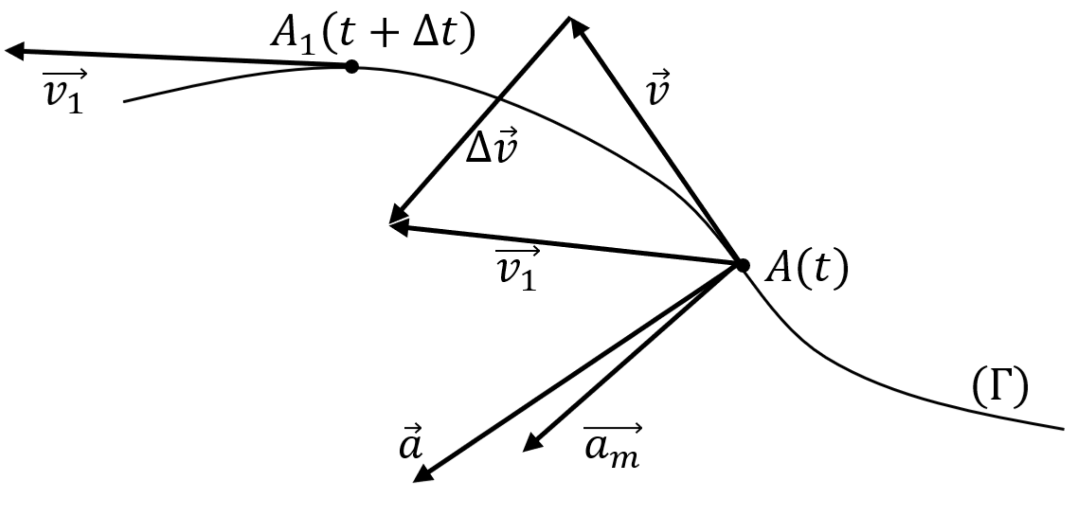


Fig. 1.5 Reprezentarea accelerației punctului material

Se definește **accelerația medie** (a_m) ca variație a vitezei (Δv) în intervalul de timp (Δt):

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}$$

Aplicând operatorul limită se obține **accelerația instantanee**:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Accelerația se definește ca mărimea vectorială ce măsoară variația vitezei în raport cu timpul, având <u>punctul de aplicație</u> în punctul a cărui mișcare se studiază, orientarea și direcția fiind spre concavitatea curbei.

Unitatea de măsură pentru accelerație este:

$$[a] = \frac{[v]}{[T]} = \frac{[L]}{[T]} \cdot \frac{1}{[T]} = \frac{m}{s^2}$$

1.1.4 Viteza unghiulară. Accelerația unghiulară. Derivata unui vector rotitor sau turnant, constant în modul

Fie un punct material A ce se deplasează pe o traiectorie circulară, de rază r, Fig. 1.6.

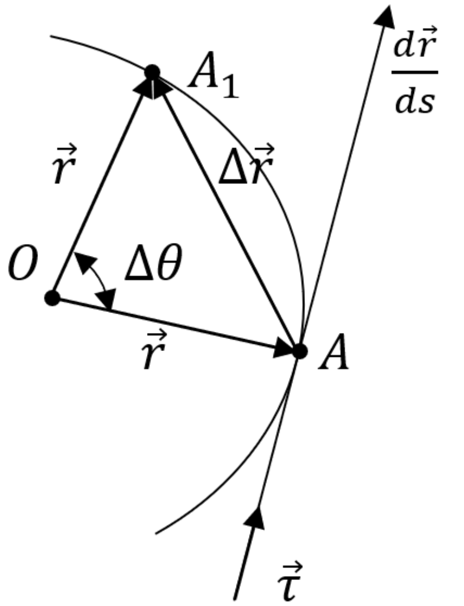


Fig. 1.6

Δs = $arc(AA_1) \Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta r}$ infinitezimal

$$arc(AA_1) = r \cdot \Delta\theta$$

$\vec{\tau}$ este versorul tangentei la traiectorie.

Se pune problema determinării derivatei vectorului rotitor:

$$\frac{d\vec{r}}{ds}$$

Soluție:

$$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{arc(AA_1)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{r \cdot \Delta\theta}{\Delta s} = r \cdot \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = r \cdot \frac{d\theta}{ds}$$

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = r \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{\tau} \tag{1.1}$$

Derivata unui vector rotitor constant în modul, în raport cu un scalar s, are mărimea definită de produsul dintre mărimea vectorului însuși și derivata unghiului de rotire; direcția este tangentă la traiectorie ($\vec{\tau}$) iar sensul este dat de sensul de rotire a vectorului rotitor.

Dacă se consideră că scalarul **s** este timpul t, atunci raportul:

$$\frac{d\theta}{dt}$$

definește noțiunea de **viteză unghiulară**:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \dot{\vec{\theta}}$$

Accelerația unghiulară va fi definită:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \ddot{\vec{\theta}}$$

$$\vec{\omega} = \dot{\vec{\theta}}$$

$$\vec{\varepsilon} = \dot{\vec{\omega}} = \ddot{\vec{\theta}}$$

$\vec{\varepsilon}$ poate fi un vector având: același sens cu $\vec{\omega}$ $\Rightarrow$ mișcare accelerată;
sens opus lui $\vec{\omega}$ $\Rightarrow$ mișcare decelerată.

Se consideră că vectorul turnant execută rotația într-un plan orizontal:

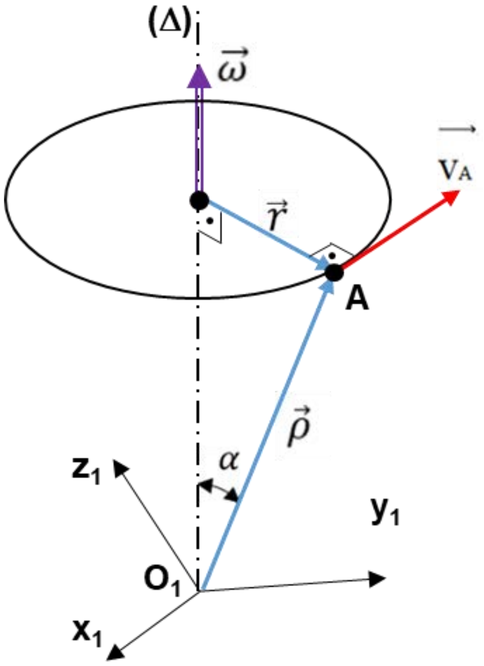


Fig. 1.7

$$\dot{\vec{\rho}} = \overrightarrow{v_A}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= r \cdot \omega \cdot \vec{\tau} \\ r &= \rho \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\vec{r}}{dt} &= \rho \cdot \sin\alpha \cdot \omega \cdot \vec{\tau} \\ |\vec{\omega} \times \vec{\rho}| &= \rho \cdot \omega \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_A} = |\vec{\omega} \times \vec{\rho}| \cdot \vec{\tau}$$

$$\overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \qquad (1.2)$$

Observație:

Relația (1.2) permite o analogie între torsorul din statică și un alt torsor, numit **torsor cinematic**.

- în statică: $T_{o(\vec{F})} = \begin{Bmatrix} \vec{F} \\ \overrightarrow{M_o} = \vec{r} \times \vec{F} \end{Bmatrix}$

- în cinematică: $T_{A(\vec{\omega})} = \begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ \overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \end{Bmatrix}$

Pornind de la relația (1.1) și ținând cont de faptul că $\overrightarrow{v_A} = \dot{\vec{\rho}}$,

rezultă că: $$\dot{\vec{\rho}} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} \tag{1.3}$$

În baza relației (1.3) se deduc **formulele lui Poisson**, pentru un sistem de referință cartezian, Fig. 1.8:

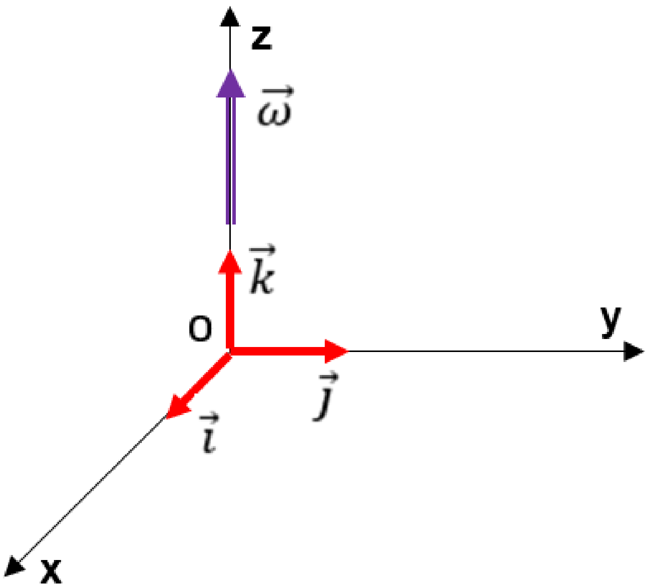


Fig. 1.8

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}$

$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}$

$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$

unde $\vec{i}, \vec{j}$ *și* $\vec{k}$ reprezintă versorii sistemului de coordonate.

În acest caz:

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i} = \omega \cdot \vec{j}$

$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j} = -\omega \cdot \vec{i}$

$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k} = 0$

1.1.5 Derivata unui vector în raport cu un reper fix când acest vector este precizat prin proiecțiile sale față de un reper mobil

Se consideră un vector $\vec{u}$, pentru care se cunosc proiecțiile față de reperul mobil $Oxyz$ (Fig. 1.9): $\vec{u} = u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k}$

Se pune problema determinării derivatei acestui vector față de reperul fix $O_1x_1y_1z_1$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = ?$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \cdot \vec{i} + u_x \cdot \dot{\vec{i}} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \cdot \vec{j} + u_y \cdot \dot{\vec{j}} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \cdot \vec{k} + u_z \cdot \dot{\vec{k}}$$

$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega} \times \vec{i}$
$\dot{\vec{j}} = \vec{\omega} \times \vec{j}$
$\dot{\vec{k}} = \vec{\omega} \times \vec{k}$

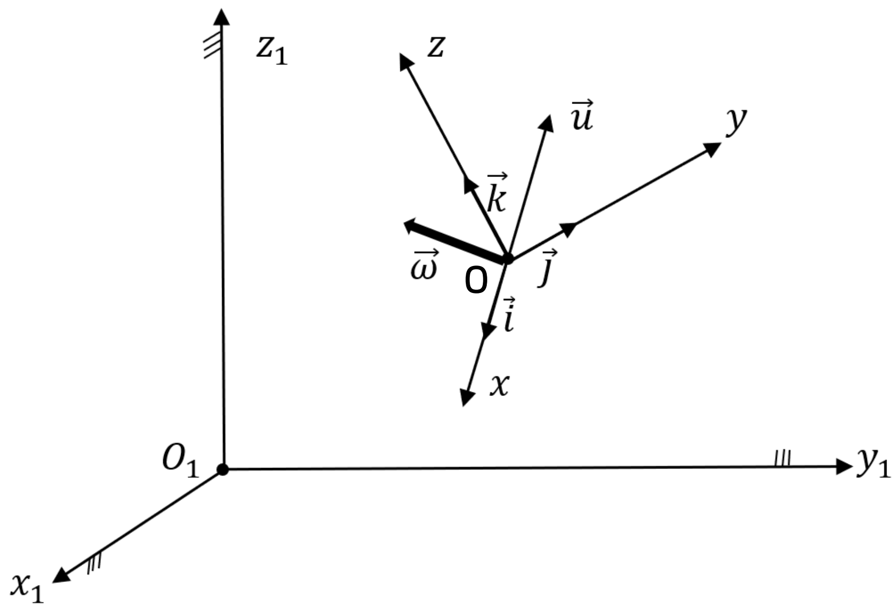


Fig. 1.9 Vectorul $\vec{u}$ precizat prin proiecțiile sale față de reperul mobil

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \cdot \vec{k} + u_x \cdot (\vec{\omega} \times \vec{i}) + u_y \cdot (\vec{\omega} \times \vec{j}) + u_z \cdot (\vec{\omega} \times \vec{k})$$

unde: $\frac{\partial u_x}{\partial t} \cdot \vec{i} + \frac{\partial u_y}{\partial t} \cdot \vec{j} + \frac{\partial u_z}{\partial t} \cdot \vec{k} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t}$

reprezintă derivata relativă a vectorului (derivata în raport cu reperul mobil).

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times (u_x \cdot \vec{i} + u_y \cdot \vec{j} + u_z \cdot \vec{k})$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u} \qquad (1.4)$$

Relația (1.4) exprimă derivata absolută a unui vector precizat prin proiecțiile sale față de un reper mobil.

Regulă: Derivata absolută a unui vector precizat prin proiecțiile sale față de un reper mobil este egală cu derivata relativă a vectorului (în raport cu reperul mobil) la care se adaugă produsul vectorial dintre viteza unghiulară a reperului mobil și vectorul însuși.

! Regulă foarte importantă pentru rezolvarea unor probleme de cinematică și dinamică.

1.1.6 Viteza areolară

Fie curba (Γ) descrisă de un punct material. Se notează cu ΔS aria „măturată” de vectorul de poziție $\vec{\rho}$:

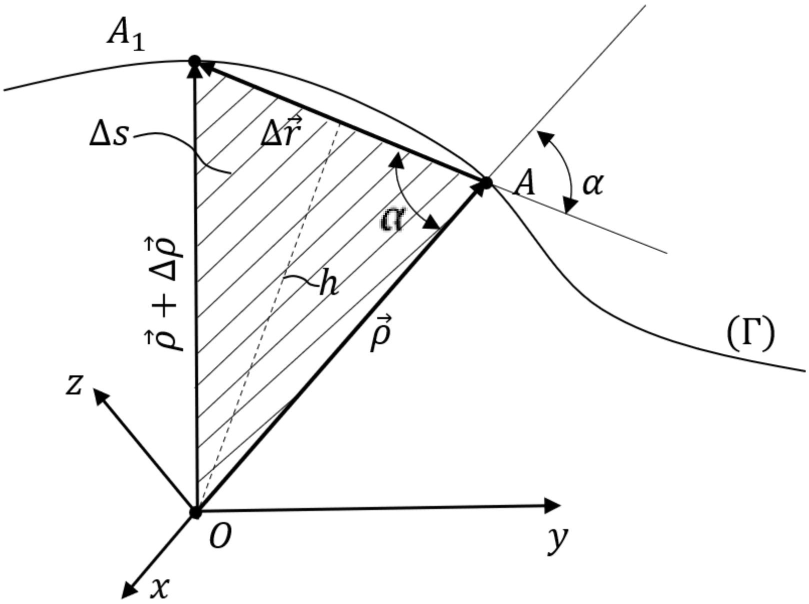


Fig. 1.10

$$\Delta \mathrm{S} \cong \mathrm{A}_{\triangle OAA_1} = \frac{h \cdot AA_1}{2}$$

unde h reprezintă înălțimea triunghiului OAA_1.

Se notează cu α unghiul dintre vectorul de poziție $\vec{\rho}$ și vectorul $\Delta\vec{r}$.

$$\left.\begin{aligned} AA_1 &= |\Delta\vec{r}| \\ h &= \rho \cdot \sin\alpha \end{aligned}\right\} \Rightarrow \ \Delta \mathrm{S} = \frac{\rho \cdot \sin\alpha \cdot \Delta r}{2} = \frac{|\vec{\rho} \times \Delta\vec{r}|}{2}$$

$$\Delta\vec{\mathrm{S}} = \frac{1}{2}(\vec{\rho} \times \Delta\vec{r})$$

Definiție: Se definește **viteza areolară medie** mărimea notată cu:

$$\overrightarrow{\Omega_m} = \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t}$$

Dacă raportului de mai sus i se aplică operatorul limită, rezultă **viteza areolară instantanee**.

$$\vec{\Omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{S}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2}\left(\vec{\rho} \times \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{1}{2} \cdot \vec{\rho} \times \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot \vec{\rho} \times \vec{v}$$

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{v})$$

Definiție: **Viteză areolară** reprezintă “iuțeala” cu care vectorul de poziție cu punctul de aplicație în originea reperului și cu vârful sprijinit pe traiectorie descrie o suprafață conică.

Viteza areolară caracterizează creșterea ariei sectoriale cuprinsă între două raze vectoare și arcul de traiectorie.

1.1.7 Accelerația areolară

Accelerația areolară medie este dată de relația:

$$\overrightarrow{W_m} = \frac{\Delta\overrightarrow{\Omega_m}}{\Delta t}$$

Accelerația areolară instantanee se obține aplicând operatorul limită:

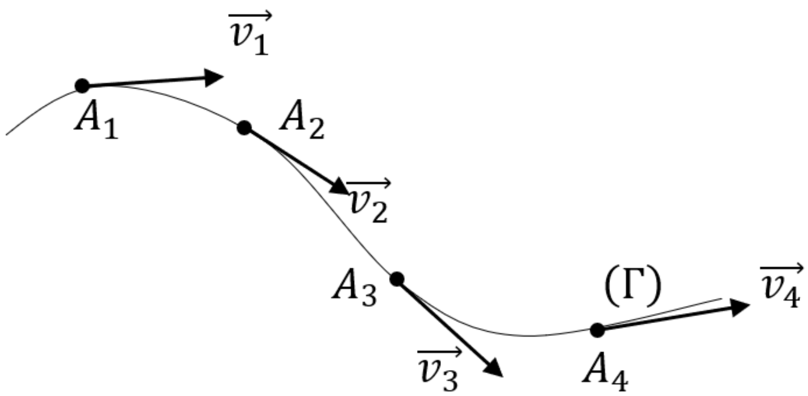
$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\overrightarrow{\Omega_m}}{\Delta t} = \dot{\vec{\Omega}}$$

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \cdot (\dot{\vec{\rho}} \times \vec{v}) + \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \dot{\vec{v}}) = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{a})$$

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{a})$$

1.1.8 Hodograful vitezei

Definiție: Hodograful vitezei reprezintă locul geometric al vârfurilor vectorilor viteză aplicați în același pol P, vectori ce reprezintă vitezele unui punct care descrie o traiectorie într-un interval de timp.



În polul P se aplică vectorii echipolenți cu vectorii viteză:

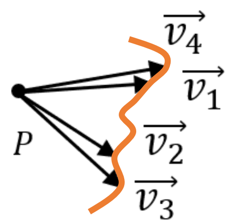


Fig. 1.11 Hodograful vitezei

De exemplu – în mișcarea circulară, hodograful vitezei este un cerc**.**

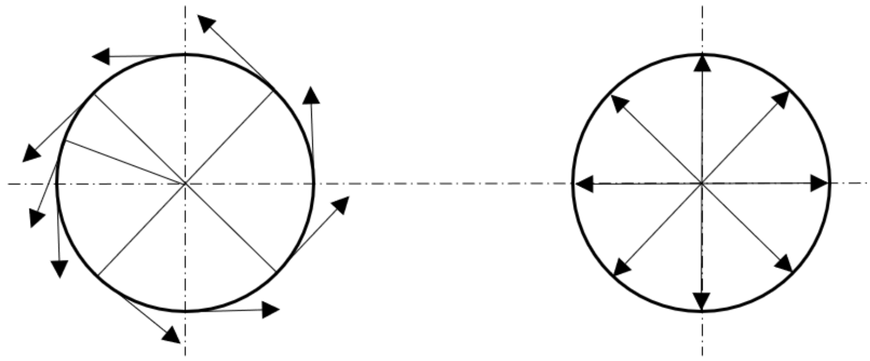


Fig. 1.12 Hodograful vitezei în mișcarea circulară: un cerc

1.2 Mărimi cinematice în diferite sisteme de coordonate

1.2.1 Sistemul de coordonate carteziene

1. Traiectoria

Fie un punct material *M* ce se deplasează pe o curbă oarecare (Γ).

Vectorul de poziție are expresia: $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t) \cdot \vec{i} + y(t) \cdot \vec{j} + z(t) \cdot \vec{k}$,

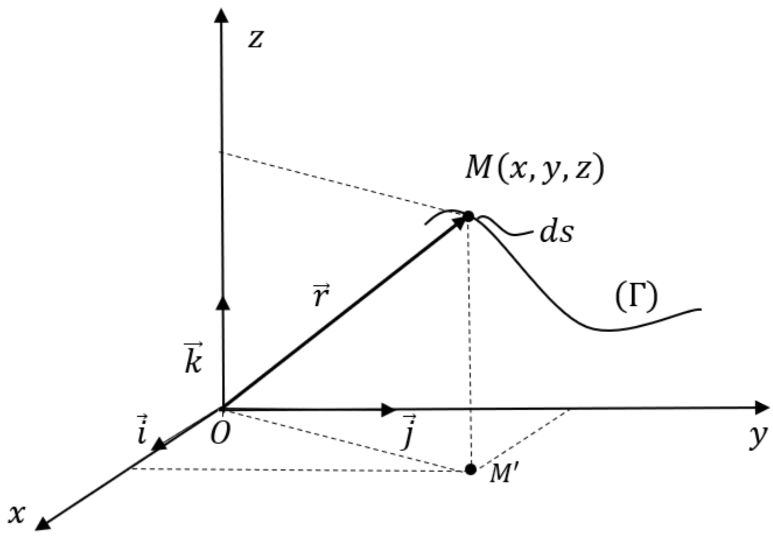


Fig.1.13

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ reprezintă **<u>ecuațiile parametrice ale traiectoriei.</u>**

Dacă se elimină timpul, se poate obține ecuația traiectoriei ca intersecție a două suprafețe:

$$\begin{cases} \varphi_1(x, y, z) = 0 \\ \varphi_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

Cele două ecuații reprezintă **<u>forma implicită a ecuației traiectoriei</u>.**

Se consideră legea orară:

$$s = s(t) = \int v \cdot dt + C$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} \\ \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \dot{x} \cdot dt \\ dy = \dot{y} \cdot dt \\ dz = \dot{z} \cdot dt \end{cases} \Rightarrow ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

Rezultă că spațiul elementar parcurs pe traiectorie, ds , se determină ca diagonala mare a unui paralelipiped cu laturile $dx, dy\ dz$.

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt = v \cdot dt \quad , \quad \text{unde} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}.$$

Prin integrare se obține drumul parcurs pe traiectorie de punctul M:

$$s = \int v \cdot dt + C$$

În scrierea matriceală, componentele vectorului de poziție au expresia: $\{r\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}$

2. Viteza

$\vec{v} = v_x \cdot \vec{i} + v_y \cdot \vec{j} + v_z \cdot \vec{k}$

unde $\begin{cases} v_x = \dot{x} \\ v_y = \dot{y} \\ v_z = \dot{z} \end{cases}$ reprezintă <u>ecuațiile parametrice ale vitezei</u>

$\vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k}$

mărimea vitezei: $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$

în scrierea matriceală: $\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}$

$v^2 = \{v\}^T \cdot \{v\} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$

3. Accelerația

$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$

unde $\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases}$ reprezintă <u>ecuațiile parametrice ale accelerației</u>

$\vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k}$

mărimea accelerației: $a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2 + {a_z}^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$

în scrierea matriceală: $\{a\} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}$

$a^2 = \{a\}^T \cdot \{a\} = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2$

4. Viteza unghiulară

$\vec{\omega} = \omega_x \cdot \vec{i} + \omega_y \cdot \vec{j} + \omega_z \cdot \vec{k}$

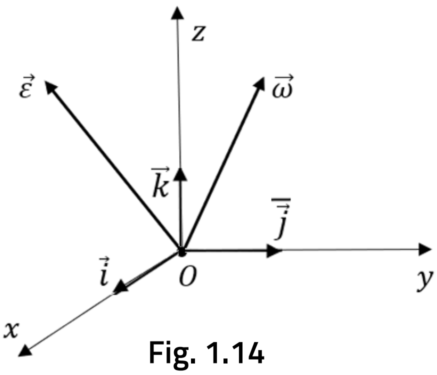


Fig. 1.14

5. Accelerația unghiulară

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon_x \cdot \vec{i} + \varepsilon_y \cdot \vec{j} + \varepsilon_z \cdot \vec{k}$

6. Viteza areolară

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(y \cdot \dot{z} - z \cdot \dot{y}) \cdot \vec{i} + (z \cdot \dot{x} - x \cdot \dot{z}) \cdot \vec{j} + (x \cdot \dot{y} - y \cdot \dot{x}) \cdot \vec{k} \right]$$

unde $\begin{cases} \vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ \vec{v} = \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} \end{cases}$

7. Accelerația areolară

$$\vec{W} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{\rho} \times \vec{a}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[(y \cdot \ddot{z} - z \cdot \ddot{y}) \cdot \vec{i} + (z \cdot \ddot{x} - x \cdot \ddot{z}) \cdot \vec{j} + (x \cdot \ddot{y} - y \cdot \ddot{x}) \cdot \vec{k} \right]$$

unde $\begin{cases} \vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \\ \vec{a} = \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} \end{cases}$

$$|\vec{W}| = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}$$

Exemplu de mișcare exprimată în sistemul de coordonate carteziene:

- **Mișcarea pe evolventă**

Fie un fir înfășurat pe o curbă fixă, legat în punctul A. Se desfășoară firul, ținut întins, apucând de punctul B. Locul geometric al pozițiilor succesive ale punctului B, obținut în această operație, poartă numele de evolventă.

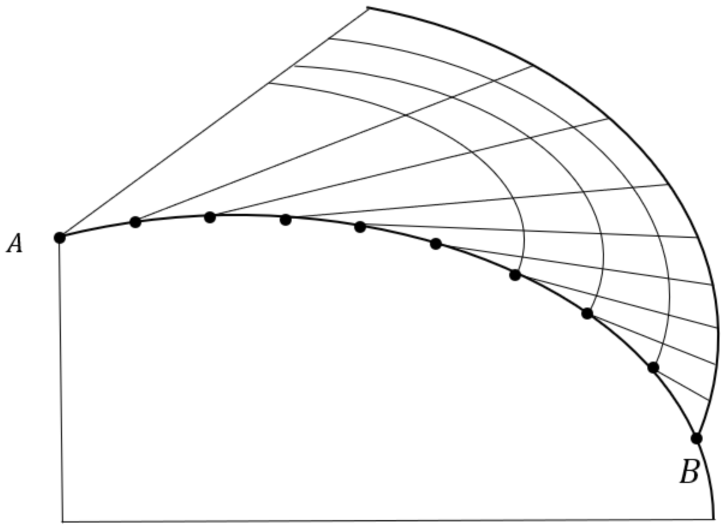


Fig. 1.15

O curbă are o familie de evolvente, deoarece orice punct de pe fir poate fi ales ca punct B. Evolventa se mai numește și **curbă desfășurătoare** (limba latină: *evolvere* = *a desfășura*).

Mișcarea pe evolventa cercului presupune determinarea ecuației analitice a traiectoriei, vitezei și accelerației unui punct al unei drepte ce se rostogolește, fără alunecare, pe un cerc de rază R.

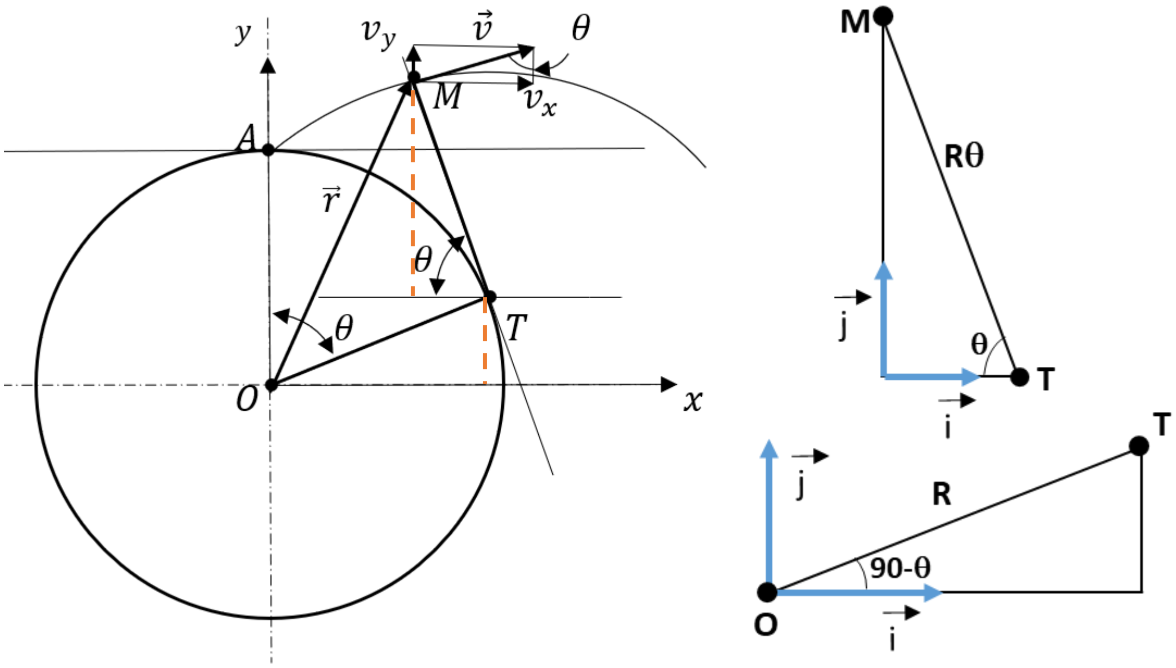


Fig. 1.16

Parametrul cinematic este reprezentat de unghiul θ pe care îl face raza OT cu verticala.

$TM = arc\ AT = R \cdot \theta$, unde $R -$ este raza cercului.

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TM}$

$$\overrightarrow{OT} = R \cdot \cos(90° - \theta) \cdot \vec{\imath} + R \cdot \sin(90° - \theta) \cdot \vec{\jmath} = R \cdot \sin\theta \cdot \vec{\imath} + R \cdot \cos\theta \cdot \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{TM} = -R \cdot \theta \cdot \cos\theta \cdot \vec{\imath} + R \cdot \theta \cdot \sin\theta \cdot \vec{\jmath}$$

$$\vec{r} = R \cdot (\sin\theta - \theta \cdot \cos\theta) \cdot \vec{\imath} + R \cdot (\cos\theta + \theta \cdot \sin\theta) \cdot \vec{\jmath}$$

Ecuațiile parametrice ale evolventei sunt:

$$x = R \cdot (\sin\theta - \theta \cdot \cos\theta)$$

$$y = R \cdot (\cos\theta + \theta \cdot \sin\theta)$$

Componentele vitezei se calculează astfel:

$$v_x = \dot{x} = R \cdot \dot{\theta} \cdot (\cos\theta - \cos\theta + \theta \cdot \sin\theta) = R \cdot \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta$$

$$v_y = \dot{y} = R \cdot \dot{\theta} \cdot (-\sin\theta + \sin\theta + \theta \cdot \cos\theta) = R \cdot \theta \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta$$

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(R \cdot \theta \cdot \dot{\theta}\right)^2$$

$$v = \left|R \cdot \theta \cdot \dot{\theta}\right|$$

Componentele accelerației sunt date de relațiile:

$$a_x = \ddot{x} = R \cdot \theta \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta + R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta + R \cdot \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta$$

$$a_y = \ddot{y} = R \cdot \theta \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta + R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta - R \cdot \theta \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta$$

$$a^2 = R^2 \cdot \left(\theta^2 \cdot \ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4 + \theta^2 \cdot \dot{\theta}^4 + 4 \cdot \theta \cdot \ddot{\theta} \cdot \dot{\theta}^2\right)$$

Lungimea arcului de evolventă este:

$$s = \int v \cdot dt = R \int_0^{\alpha} \theta \cdot \dot{\theta} \cdot dt = R \int_0^{\alpha} \theta \cdot d\theta = R\frac{\alpha^2}{2}$$

pentru $\dot{\theta} \geq 0$.

Unghiul făcut de vectorul viteză cu verticala este:

$$\tan\beta = \left|\frac{v_x}{v_y}\right| = \tan\theta \;\Rightarrow\; \beta = \theta$$

Proprietăți

- viteza este perpendiculară pe TM (paralelă cu OT)
- viteza are valoarea: $v = \left|R \cdot \theta \cdot \dot{\theta}\right| = TM \cdot \omega$, unde $\dot{\theta} = \omega$
- Punctul M se comportă, din punct de vedere al vitezei, ca și cum ar avea o mișcare circulară pe un cerc de raza TM și centrul T, cu viteza unghiulară ω

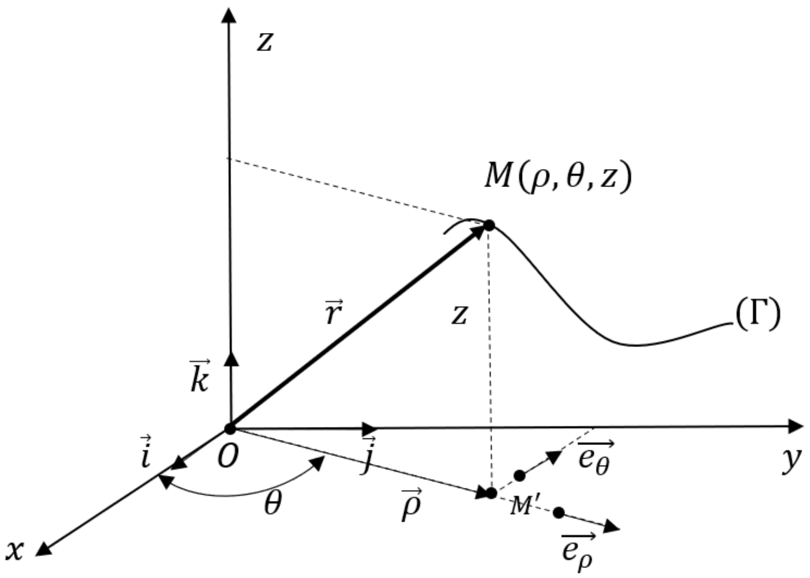
$$\text{Dacă } \dot{\theta} = \omega = const \;\Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \begin{cases} a_x = R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (\sin\theta + \theta \cdot \cos\theta) \\ a_y = R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot (\cos\theta - \theta \cdot \sin\theta) \end{cases}$$

$$a^2 = {a_x}^2 + {a_y}^2 = \left(R \cdot \dot{\theta}^2\right)^2 \cdot (1 + \theta^2)$$

$$a = R \cdot \dot{\theta}^2 \sqrt{1 + \theta^2} = \omega^2 \cdot OM$$

1.2.2 Sistemul de coordonate cilindrice

Fie punctul material M, în mișcare pe curba (Γ), Fig. 1.17. Poziția sa poate fi definită de următorii parametri:



ρ - raza polară;

θ - unghiul polar;

z - cota.

$$\begin{cases} \theta = \theta(t) \\ \rho = \rho(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Fig. 1.17. sistemul de coordonate cilindrice

Sistemul de coordonate ales este caracterizat de **versorii**:

$\overrightarrow{e_\rho}$: paralel cu proiecția vectorului $\overrightarrow{OM}$ pe planul xOy (are direcția razei polare ρ)

$\overrightarrow{e_\theta}$: în planul Oxy şi perpendicular pe $\overrightarrow{e_\rho}$

$\vec{k}$: versorul axei Oz .

Vectorul de poziție $\vec{r}$ se poate scrie:

$$\vec{r} = \rho \cdot \overrightarrow{e_\rho} + z \cdot \vec{k}$$

Definiție: Sistemul de coordonate determinat de cei trei versori $\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}$ și $\vec{k}$ se numește sistemul de coordonate cilindrice.

! Este un sistem de coordonate **mobil**, ce **se mișcă odată cu punctul** a cărui mișcare se studiază.

Pentru a determina expresia noilor versori $\overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\theta}$, se consideră reprezentarea din Fig. 1.18:

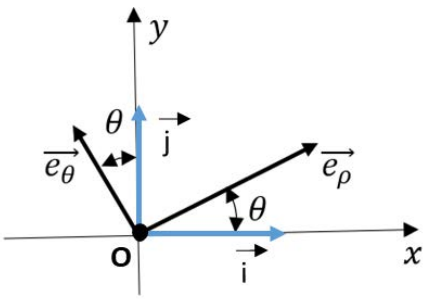


Fig. 1.18

$$\vec{e_\rho} = \cos\theta \cdot \vec{\imath} + \sin\theta \cdot \vec{\jmath}$$
$$\vec{e_\theta} = -\sin\theta \cdot \vec{\imath} + \cos\theta \cdot \vec{\jmath}$$
$$\begin{cases} \dot{\vec{e_\rho}} = (-\sin\theta \cdot \vec{\imath} + \cos\theta \cdot \vec{\jmath}) \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} \\ \dot{\vec{e_\theta}} = -(\cos\theta \cdot \vec{\imath} + \sin\theta \cdot \vec{\jmath}) \cdot \dot{\theta} = -\dot{\theta} \cdot \vec{e_\rho} \\ \dot{\vec{k}} = 0 \end{cases}$$

- **Viteza** punctului material în coordonate cilindrice:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e_\rho} + \rho \cdot \dot{\vec{e_\rho}} + \dot{z} \cdot \vec{k} + z \cdot \dot{\vec{k}} = \dot{\rho} \cdot \vec{e_\rho} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} + \dot{z} \cdot \vec{k}$$

$\dot{\rho} = v_\rho$: componenta radială;

$\rho \cdot \dot{\theta} = v_\theta$: componenta transversală;

$\dot{z} = v_z$: componenta axială.

Mărimea vitezei este dată de relația:

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2}$$

- **Accelerația** punctului material în coordonate cilindrice:

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\rho} \cdot \vec{e_\rho} + \dot{\rho} \cdot \dot{\vec{e_\rho}} + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} + \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \dot{\vec{e_\theta}} + \ddot{z} \cdot \vec{k} \\ &= \ddot{\rho} \cdot \vec{e_\rho} + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} + \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{e_\theta} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{e_\rho} + \ddot{z} \cdot \vec{k} \\ &= \left(\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2\right) \cdot \vec{e_\rho} + \left(2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}\right) \cdot \vec{e_\theta} + \ddot{z} \cdot \vec{k} \end{aligned}$$

$\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 = a_\rho$: componenta radială;

$2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} = a_\theta$: componenta transversală;

$\ddot{z} = a_z$: componenta axială.

Mărimea accelerației este dată de relația:

$$a = \sqrt{\left(\ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2\right)^2 + \left(2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta}\right)^2 + \ddot{z}^2}$$

În scriere matriceală:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} \rho \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}; \qquad \{v\} = \begin{Bmatrix} \dot{\rho} \\ \rho \cdot \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}; \qquad \{a\} = \begin{Bmatrix} \ddot{\rho} - \rho \cdot \dot{\theta}^2 \\ 2 \cdot \dot{\rho} \cdot \dot{\theta} + \rho \cdot \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}$$

Caz particular: mișcarea punctului material pe un cilindru:

$$\rho = R; \qquad \dot{\rho} = 0; \qquad \ddot{\rho} = 0$$

Astfel, mărimile cinematice se vor scrie:

$$\{r\} = \begin{Bmatrix} R \\ \theta \\ z \end{Bmatrix}; \qquad \{v\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ R \cdot \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{Bmatrix}; \qquad \{a\} = \begin{Bmatrix} -R \cdot \dot{\theta}^2 \\ R \cdot \ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{Bmatrix}$$

Având în vedere simplitatea relațiilor care descriu mișcarea pe un cilindru, se justifică utilizarea sistemului de coordonate cilindrice în locul sistemului de coordonate cartezian.

Aplicația 1.1: Mișcarea pe elicea cilindrică

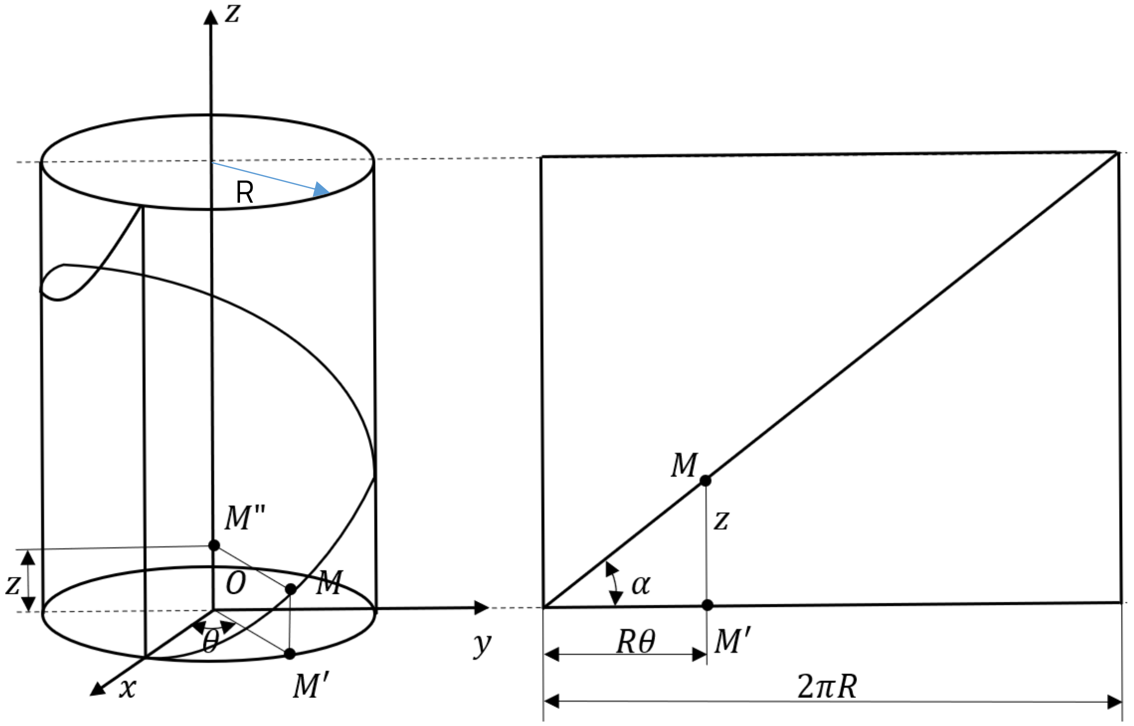


Fig. 1.19 Mișcarea pe elicea cilindrică

- **Analiza mișcării în coordonate carteziene:**

Ecuațiile parametrice ale mișcării : $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

$$\begin{cases} x = x(t) = R \cdot \cos\theta \\ y = y(t) = R \cdot \sin\theta \\ z = z(t) = R \cdot \theta \cdot \tan\alpha \end{cases}$$

Prin derivare se obțin componentele vitezei și ale accelerației:

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \\ v_y = \dot{y} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \\ v_z = \dot{z} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \tan\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \ddot{x} = -R \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta \\ a_y = \ddot{y} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta \\ a_z = \ddot{z} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \tan\alpha \end{cases}$$

Mărimea vitezei și a accelerației se determină astfel:

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \left(R \cdot \dot{\theta}\right)^2 (1 + \tan^2 \alpha) = \frac{\left(R \cdot \dot{\theta}\right)^2}{\cos^2 \alpha}$$

$$v = R \left| \frac{\dot{\theta}}{\cos \alpha} \right|$$

$$a^2 = R^2 \cdot \ddot{\theta}^2 + R^2 \cdot \dot{\theta}^4 + R^2 \cdot \ddot{\theta}^2 \cdot \tan^2 \alpha = R^2 \cdot \left(\frac{\ddot{\theta}^2}{\cos^2 \alpha} + \dot{\theta}^4 \right)$$

$$a = R \sqrt{\frac{\ddot{\theta}^2}{\cos^2 \alpha} + \dot{\theta}^4}$$

Lungimea arcului de elice este:

$$s = \int ds = \int v \cdot dt = \frac{R}{\cos \alpha} \int_0^{\beta} \dot{\theta} \cdot dt = \frac{R}{\cos \alpha} \cdot \beta$$

unde β reprezintă valoarea pe care o ia unghiul θ.

Analiza mișcării în coordonate cilindrice:

$\rho = OM' = R \qquad\qquad z = R \cdot \theta \cdot \tan \alpha$

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = R \cdot \overrightarrow{e_\rho} + R \cdot \theta \cdot \tan \alpha \cdot \vec{k}$$

Prin derivări succesive obținem:

$$\vec{v} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} + R \cdot \dot{\theta} \cdot \tan \alpha \cdot \vec{k}$$

$$\vec{a} = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{e_\rho} + R \cdot \ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} + R \cdot \ddot{\theta} \cdot \tan \alpha \cdot \vec{k}$$

Se observă că, utilizând coordonatele cilindrice, componentele vitezei și ale accelerației sunt exprimate mult mai simplu.

1.2.3 Sistemul de coordonate polare

Sistemul de coordonate polare reprezintă cazul particular al sistemului de coordonate cilindrice, considerat atunci când mişcarea se desfăşoară în plan ($z = 0$).

$$\dot{\overrightarrow{e_r}} = \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

$$\dot{\overrightarrow{e_\theta}} = -\dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_r}$$

Expresia **vectorului de poziție** este:

$$\vec{r} = r \cdot \overrightarrow{e_r}$$

($\vec{r} = \rho \cdot \overrightarrow{e_\rho} + z \cdot \vec{k}$, cu $\rho = r$ și $z = 0$)

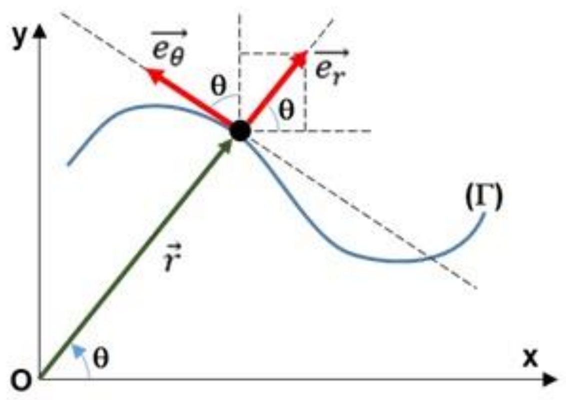


Fig. 1.20

Viteza este dată de relația:

$$\vec{v} = \dot{r} \cdot \overrightarrow{e_r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\theta}^2}$$

Viteza are două componente:

$\dot{r} = v_r$ componenta radială;

$r \cdot \dot{\theta} = v_\theta$ componenta transversală;

Accelerația se exprimă astfel:

$$\vec{a} = \ddot{r} \cdot \overrightarrow{e_r} + \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} + \dot{r} \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} - r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{e_r} + r \cdot \ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$
$$= \left(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2\right) \cdot \overrightarrow{e_r} + \left(r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta}\right) \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

$$a = \sqrt{\left(\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2\right)^2 + \left(r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta}\right)^2}$$

Accelerația are două componente:

$\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2 = a_r$ componenta radială;

$r \cdot \ddot{\theta} + 2 \cdot \dot{r} \cdot \dot{\theta} = a_\theta$ componenta transversală.

1.2.4 Sistemul de coordonate naturale. Triedrul lui Frenet

Fie un punct material *M* care se mișcă pe o curbă descrisă de o ecuație cunoscută: $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

Dacă pe curbă se ia un punct de referință *A* de la care se măsoară lungimea arcului de curbă, poziția punctului material poate fi definită prin lungimea arcului de curbă: $s = s(t)$ (legea orară).

Se consideră următoarele **definiții:**

TANGENTA într-un punct la o curbă reprezintă limita unei drepte ce intersectează curba în punctul considerat și încă în unul de tinde să se confunde cu acesta.

PLANUL NORMAL este planul perpendicular pe tangenta într-un punct la o curbă.

PLANUL OSCULATOR este planul determinat de două tangente la o curbă, ce tind să se confunde.

NORMALA PRINCIPALĂ reprezintă intersecția dintre planul normal și planul osculator.

RAZA DE CURBURĂ reprezintă raza unui cerc conținut în planul osculator, tangent la curbă, care permite ca lungimea unui arc elementar de pe acesta, $\rho \cdot d\theta$, să se asimileze cu lungimea elementară a unui arc măsurat pe curbă: $ds = \rho \cdot d\theta$ (Fig. 1.21).

Observație: pentru o traiectorie rectilinie, raza de curbură este infinită:

$$\rho = \infty$$

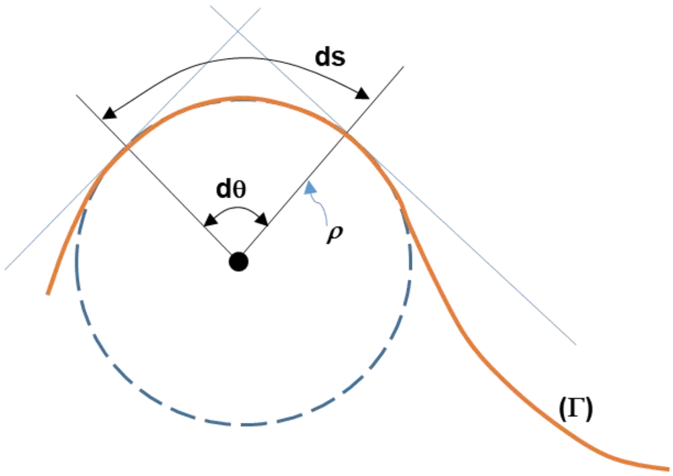


Fig. 1.21

În baza noțiunilor de mai sus, se definește:

Sistemul de coordonate naturale, sau **Triedrul lui Frenet**: reper **mobil**, cu originea în punctul a cărui mișcare o studiem și axele definite de versorii:

$\vec{\tau}$ după direcția tangentei, în sensul creșterii drumului parcurs pe traiectorie, s

$\vec{\nu}$ după direcția normalei principale, orientată spre concavitatea curbei

$\vec{\beta}$ după direcția binormalei dată de relația: $\vec{\beta} = \vec{\tau} \times \vec{\nu}$

Rezultă că sistemul de coordonate naturale este **ortogonal**.

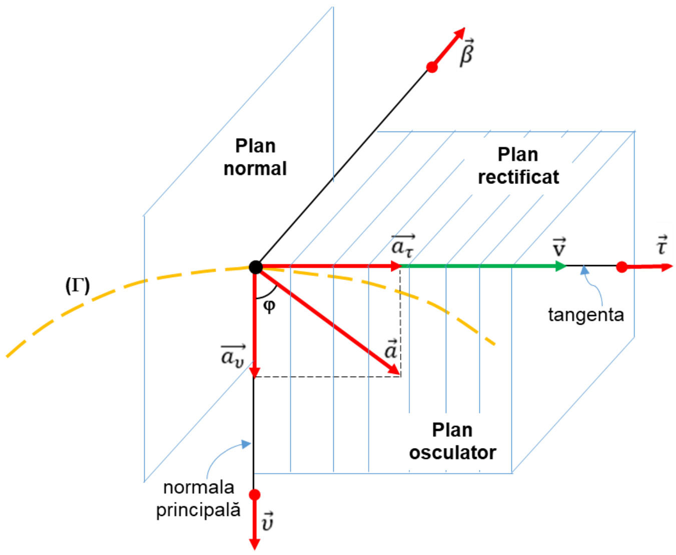


Fig. 1.22 Reprezentarea Triedrului lui Frenet

În sistemul de coordonate naturale, mărimile cinematice se exprimă astfel:

- Viteza:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} = v \cdot \vec{\tau}$$

Se observă că, în raport cu triedrul lui Frenet, **viteza are o singură** componentă, de-a lungul tangentei:

$$\begin{cases} v_\tau = \dot{s} \\ v_\nu = 0 \\ v_\beta = 0 \end{cases}$$

- Accelerația:

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \dot{s} \cdot \dot{\vec{\tau}}$$

$$\dot{\vec{\tau}} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dt} \cdot \frac{ds}{ds} = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{d\vec{\tau}}{ds} = v \cdot \frac{d\theta}{ds} \cdot \vec{\nu} = v \cdot \frac{d\theta}{\rho \cdot d\theta} \cdot \vec{\nu} = \frac{v}{\rho} \cdot \vec{\nu}$$

$$\vec{a} = \dot{v} \cdot \vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho} \cdot \vec{\nu} = \ddot{s} \cdot \vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho} \cdot \vec{\nu}$$

Accelerația are o două componente:

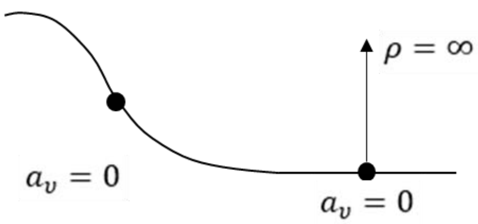
$$\begin{cases} a_\tau = \dot{v} = \ddot{s} \\ a_\nu = \dfrac{v^2}{\rho} = \dfrac{\dot{s}^2}{\rho} \\ a_\beta = 0 \end{cases}$$

Unghiul pe care îl face accelerația cu direcția normalei principale se notează cu φ :

$$\tan\varphi = \frac{a_\tau}{a_\nu}$$

Concluzie:

1. Față de Triedrul lui Frenet, viteza are o singură componentă, după direcția tangentei.
2. Față de Triedrul lui Frenet, accelerația are două componente: după direcția tangentei și după direcția normalei principale.
3. Dacă $\frac{1}{\rho} = 0$, rezultă că $\rho = \infty$, deci mișcarea este rectilinie uniformă; în acest caz, componenta normală a accelerației este nulă



1.3 Mișcări particulare ale punctului material

- Mișcarea rectilinie - uniformă
  - uniform variată
- Mișcarea circulară
- Mișcarea oscilatorie

1.3.1 Mișcarea rectilinie uniformă

Definiție: mișcarea în care **traiectoria este o dreaptă** iar **viteza este constantă** se numește mișcare rectilinie uniformă.

Se analizează în sistemul de coordonate carteziene:

$$\begin{cases} v_x = v_0 \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}, \qquad v_x = v_0 = \dot{x} = const.$$

$$x = C_1 \cdot t + C_2$$

Dacă se aplică condițiile inițiale:

$$\left.\begin{matrix} t = 0 \\ x = x_0 \\ v = v_0 \end{matrix}\right\} \quad \Rightarrow \quad v_x|(t=0) = v_0 = C_1$$

$$x|(t=0) = C_2$$

Rezultă: $x = x_0 + v_0 \cdot t$ - **legea de mișcare rectilinie uniformă**

Accelerația va fi: $a = \dot{v} = \ddot{x} = 0$

Reciproca: mișcarea pentru care accelerația este nulă se numește mișcare rectilinie uniformă

$$\ddot{x} = 0, \qquad \ddot{y} = 0, \qquad \ddot{z} = 0$$

$$\dot{x} = C_1, \qquad \dot{y} = C_2, \qquad \dot{z} = C_3$$

$$x = C_1 \cdot t + C_4 \qquad y = C_2 \cdot t + C_5 \qquad z = C_3 \cdot t + C_6$$

Punând condițiile inițiale:

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = v_{0y} \qquad v_z = v_{0z}$$

$$x = x_0 \qquad y = y_0 \qquad z = z_0$$

Rezultă ecuațiile parametrice ale mișcării:

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t \\ y = y_0 + v_{0y} \cdot t \\ z = z_0 + v_{0z} \cdot t \end{cases}$$

Eliminând timpul t din ecuațiile de mai sus, rezultă **ecuația traiectoriei** (ecuația unei drepte):

$$\frac{x - x_0}{v_{0x}} = \frac{y - y_0}{v_{0y}} = \frac{z - z_0}{v_{0z}}$$

Mărimea vitezei este dată de relația:

$$v^2 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2 = const.$$

1.3.2 Mișcarea rectilinie uniform variată

Definiție: mișcarea în care **traiectoria este o dreaptă** iar **accelerația este constantă** se numește mișcare rectilinie uniform variată.

$$\begin{cases} a_x = a \\ a_y = 0 \\ a_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_x = a \cdot t + C_1 \\ v_y = C_2 \\ v_z = C_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a \cdot t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_4 \\ y = C_2 \cdot t + C_5 \\ z = C_3 \cdot t + C_6 \end{cases}$$

Punând condițiile inițiale corespunzătoare momentului $t = 0$:

$$v_x = v_{0x} \qquad v_y = 0 \qquad v_z = 0$$

$$x = x_0 \qquad y = 0 \qquad z = 0$$

Rezultă:

$$\begin{cases} v_x = v = v_{0x} + a \cdot t \\ v_y = 0 \\ v_z = 0 \end{cases}$$ - **legea vitezei** în mișcarea rectilinie uniform variată

și

$$\begin{cases} x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

- **legea spațiului** în mișcarea rectilinie uniform variată

Dacă se elimină timpul din ecuațiile de mai sus, se obține ecuația lui Torricelli/ formula lui Galilei:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

$$x = \frac{a}{2} \cdot \left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 + v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + x_0$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

Dacă mobilul pleacă din origine cu viteza inițială nulă, adică $v_0 = 0$ $și$ $x_0 = 0$, se poate scrie:

$$v^2 = 2 \cdot a \cdot x$$

Dacă **viteza și accelerația au același sens**, mișcarea este **uniform accelerată**.

Dacă **viteza și accelerația au sensuri contrare**, mișcarea este **uniform încetinită**.

Reprezentarea legilor mișcării în funcție de timp reprezintă **graficul mișcării**, Fig. 1.23:

- traiectoria: $s = s(t)$
- viteza: $v = v(t)$
- accelerația: $a = a(t)$

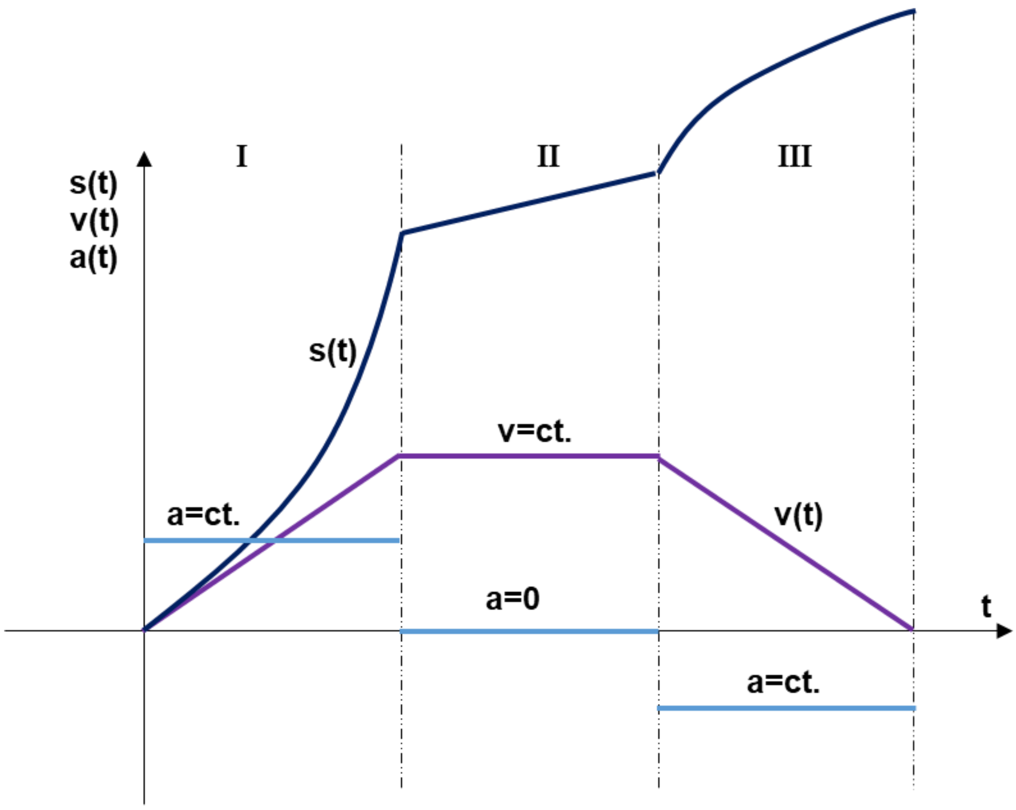


Fig. 1.23 Graficul mișcării

Observații:

1. Graficul se modifică dacă mișcarea se consideră cu viteză inițială și spațiu inițial.
2. În tehnică, graficul mișcării explică cele trei faze în funcționarea unei mașini (instalații):

I – faza de demaraj (pornire),

II – faza de regim,

III – faza de oprire.

Deoarece fazele de pornire și oprire au loc într-un timp scurt, din punct de vedere mecanic interesează faza de regim.

1.3.3 Mișcarea circulară

Definiție: mișcarea unui punct material pe un cerc fix.

Analiza se poate face în coordonate carteziene, polare sau naturale.

- Studiul mișcării circulare în coordonate carteziene, Fig. 1.24

$$\begin{cases} x = R \cdot \cos\theta \\ y = R \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \sin\theta \\ \dot{y} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -R \cdot \ddot{\theta} \cdot \sin\theta - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \cos\theta \\ \ddot{y} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \cos\theta - R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \sin\theta \end{cases}$$

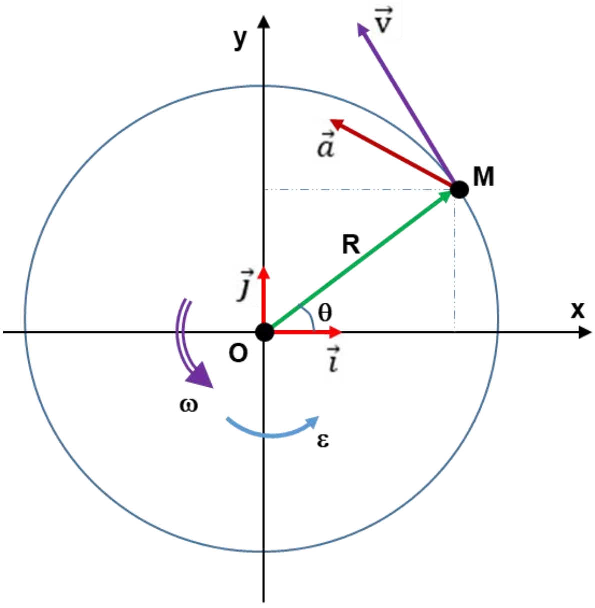


Fig. 1.24

$v^2 = R^2 \cdot \dot{\theta}^2 \qquad \Rightarrow \qquad v = R \cdot |\dot{\theta}|$

$a^2 = R^2 \cdot (\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4)$

Dacă $\dot{\theta} = const. \quad \Rightarrow \quad v = const.$ iar mișcarea se numește **circulară uniformă.**

Se notează $\dot{\theta} = \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \theta = \omega_0 \cdot t + \theta_0$, **legea spațiului în mișcarea circulară uniformă.**

Dacă $\ddot{\theta} > 0$ mișcarea se numește **circulară uniform accelerată.**

Dacă $\ddot{\theta} < 0$ mișcarea se numește **circulară uniform încetinită.**

Se notează: $\ddot{\theta} = \varepsilon \quad \Rightarrow$ **legea spațiului în mișcarea circulară uniform variată**:

$$\theta = \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2} + \omega_0 \cdot t + \theta_0$$

- Studiul mișcării circulare în coordonate polare, Fig. 1.25

$$\vec{r} = R \cdot \overrightarrow{e_r}$$

$$\vec{v} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} \;, \qquad v = R \cdot \dot{\theta}$$

$$\vec{a} = -R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{e_r} + R \cdot \ddot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} \;,$$

$$a = R \cdot \sqrt{\ddot{\theta}^2 + \dot{\theta}^4}$$

$$a_r = R \cdot \dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = R \cdot \ddot{\theta}$$

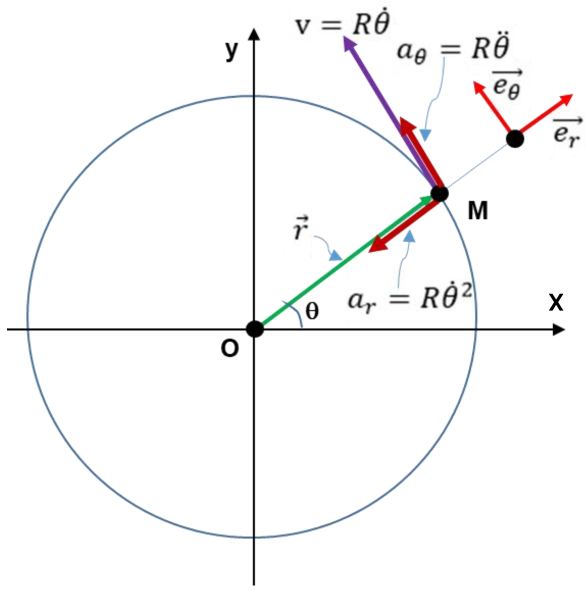


Fig. 1.25

- Studiul mișcării circulare în coordonate naturale, Fig. 1.26

$$v = \dot{s} = R \cdot \dot{\theta}$$

$$\vec{v} = \dot{s} \cdot \vec{\tau} = R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{\tau}$$

$$a_\tau = \ddot{s} = R \cdot \ddot{\theta}$$

$$a_\nu = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = R \cdot \dot{\theta}^2 \;, \quad \rho = R$$

$$\vec{a} = R \cdot \ddot{\theta} \cdot \vec{\tau} + R \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \vec{\nu}$$

$$\tan\alpha = \frac{a_\tau}{a_\nu} = \frac{R \cdot \ddot{\theta}}{R \cdot \dot{\theta}^2} = \frac{\ddot{\theta}}{\dot{\theta}^2}$$

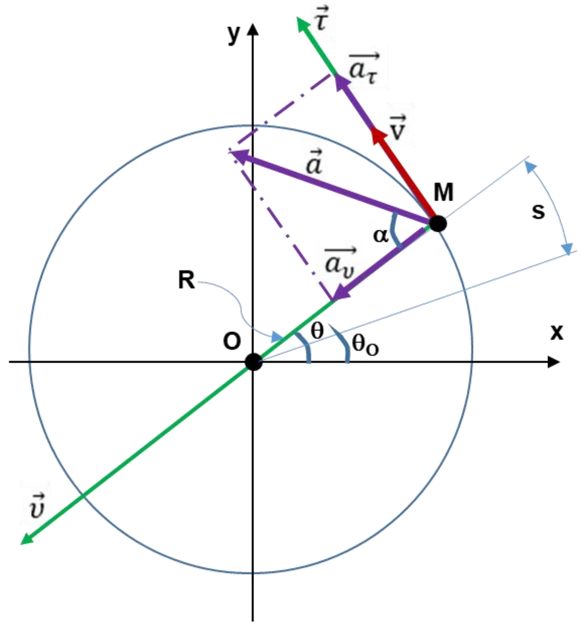


Fig. 1.26

2. Cinematica rigidului

2.1 Elemente generale

Definiție: **Rigidul (Solidul rigid)** reprezintă un sistem cu o infinitate de puncte materiale.

Ipoteza de rigiditate: distanța dintre două puncte materiale ale rigidului este constantă.

Cunoașterea mișcării rigidului presupune **cunoașterea mișcării oricărui punct al acestuia**.

Fie un rigid cu ***n*** puncte materiale:

- numărul gradelor de libertate este **3*n***;
- numărul minim de legături pentru a se asigura rigiditatea ansamblului este 3(*n*-4)+6;
- numărul de parametri necesari pentru a descrie mișcarea rigidului este 3*n*-[3(*n*-4)+6]=6.

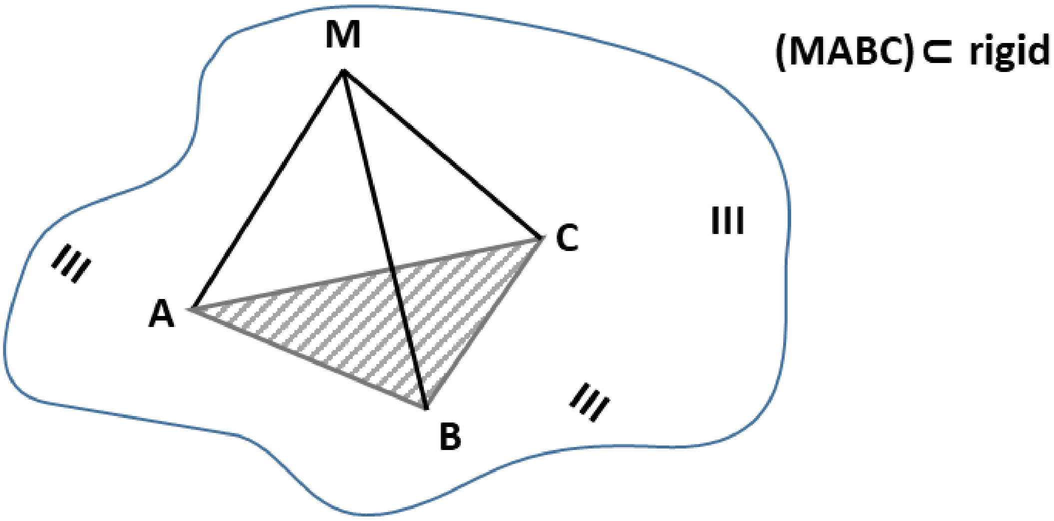


Fig. 2.1 Reprezentarea rigidului în vederea studiului mișcării sale

Pentru studiul mișcării unui rigid sau pentru precizarea poziției sale la un moment dat este necesar să se cunoască cinematica a trei puncte ce aparțin acestuia (A,B,C), Fig. 2.1:

1) Dacă A, B și C sunt fixe, rigidul este în **repaus**;
2) Dacă două puncte sunt fixe (există o infinitate de puncte fixe situate pe dreapta ce unește cele două puncte), rigidul execută o **rotație cu axă fixă**;
3) Dacă un punct este fix, rigidul execută o **rostogolire cu punct fix**;
4) Dacă toate cele trei puncte sunt mobile, rigidul se află în **mișcare oarecare** sau **generală**.

Problemele rigidului presupun determinarea:

- legilor de mișcare ale punctelor ce aparțin rigidului;
- distribuției de viteze (legea de variație a vitezei punctelor ce aparțin rigidului);
- distribuției de accelerații (legea de variație a accelerației punctelor ce aparțin rigidului).

2.2 Studiul mișcării unui punct ce aparține rigidului în mișcarea generală (oarecare)

2.2.1 Modelul de studiu

Fie modelul de studiu prezentat în Fig. 2.2. Se notează cu (T_1): $O_1X_1Y_1Z_1$ - sistemul de referință fix , iar cu (T): OXYZ, sistemul de referință mobil, invariabil legat de rigid.

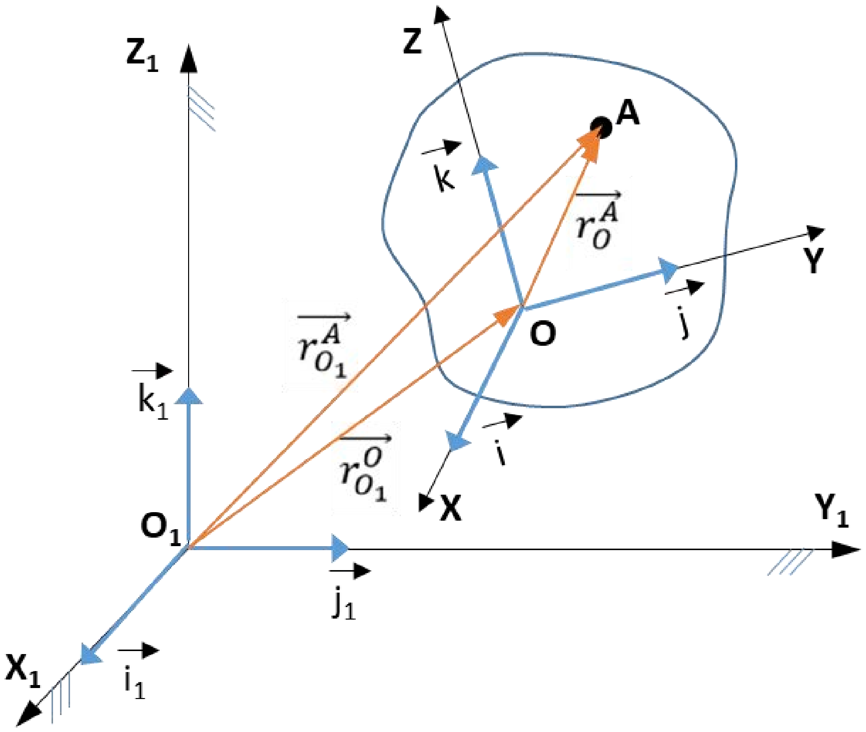


Fig. 2.2 Modelul de studiu pentru mișcarea generală a rigidului

Se notează cu $\overrightarrow{r_{O_1}^A}$ poziția unui punct oarecare A aparținând rigidului, în raport cu reperul fix. Mișcarea punctului A este cunoscută dacă se cunoaște legea de variație a vectorului de poziție: $\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^A}(t)$.

Legea de mișcare a punctului A sub formă vectorială se exprimă prin relația:

$$\boxed{\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A}} \quad (2.1)$$

unde:

$\overrightarrow{r_{O_1}^O} = x_{O_1}^O \cdot \overrightarrow{\iota_1} + y_{O_1}^O \cdot \overrightarrow{J_1} + z_{O_1}^O \cdot \overrightarrow{k_1}$, având ca **variabile coordonatele originii reperului mobil** invariabil legat de rigid, față de reperul fix $\overrightarrow{r_{O_1}^O} \Rightarrow [x_{O_1}^O(t) \quad y_{O_1}^O(t) \quad z_{O_1}^O(t)]$. (2.2)

Rezultă că vectorul $r_{O_1}^O(t)$ se cunoaște când sunt precizați parametrii geometrici sau funcțiile $[x_{O_1}^O(t) \quad y_{O_1}^O(t) \quad z_{O_1}^O(t)]$.

$\overrightarrow{r_O^A} = x_O^A \cdot \vec{\iota} + y_O^A \cdot \vec{J} + z_O^A \cdot \vec{k}$, având coordonatele constante (în baza ipotezei de rigiditate) $\overrightarrow{r_O^A} \Rightarrow [x_O^A \quad y_O^A \quad z_O^A]$ = const. (2.3)

iar **direcțiile reperului mobil, date de versorii** $[\vec{\iota}(t) \quad \vec{J}(t) \quad \vec{k}(t)]$ **, variabile** (se cunosc atunci când se precizează unghiurile pe care axele reperului mobil le formează cu axele reperului fix).

Definiție: Direcțiile reperului mobil (T) în raport cu reperul fix (T_1) sunt date de **cosinușii directori** ai unghiurilor dintre axele celor două repere, Tabelul 2.1.

Tabelul 2.1 Definiția cosinușilor directori[1]

T / T_1	$\vec{\iota}$	$\vec{J}$	$\vec{k}$
$\vec{\iota}_1$	α_{xx_1}	α_{yx_1}	α_{zx_1}
$\vec{J}_1$	α_{xy_1}	α_{yy_1}	α_{zy_1}
$\vec{k}_1$	α_{xz_1}	α_{yz_1}	α_{zz_1}

Funcțiile $\vec{\iota}(t)$, $\vec{J}(t)$, $\vec{k}(t)$, respectiv $\overrightarrow{r_O^A} = x_O^A \cdot \vec{\iota}(t) + y_O^A \cdot \vec{J}(t) + z_O^A \cdot \vec{k}(t)$ sunt cunoscute atunci când se cunosc 9 unghiuri, respectiv **matricea cosinușilor directori**:

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{xx_1} & \alpha_{yx_1} & \alpha_{zx_1} \\ \alpha_{xy_1} & \alpha_{yy_1} & \alpha_{zy_1} \\ \alpha_{xz_1} & \alpha_{yz_1} & \alpha_{zz_1} \end{bmatrix}.$$

Din relațiile (2.2) și (2.3) rezultă că vectorul de poziție al punctului A, dat de relația (2.1), este cunoscut atunci când se cunosc 3 distanțe și 9 unghiuri.

Pe de altă parte, un rigid are 6 grade de libertate (pentru cunoașterea poziției sale la un moment dat este nevoie de 6 parametri geometrici).

Funcțiile (2.3) trebuie să îndeplinească, pe lângă condițiile de continuitate și derivabilitate, condiția de ortogonalitate:

[1] A se citi „cos(α)" în loc „α". Notația s-a adoptat exclusiv din rațiuni de scriere simplificată.

$$\begin{cases} \vec{\iota}\cdot\vec{\jmath}=0 \\ \vec{\jmath}\cdot\vec{k}=0 \\ \vec{k}\cdot\vec{\iota}=0 \end{cases} \quad (2.4) \qquad \text{și} \qquad \begin{cases} (\vec{\iota})^2=1 \\ (\vec{\jmath})^2=1 \\ \left(\vec{k}\right)^2=1 \end{cases} \quad (2.5)$$

Acestea sunt explicitate mai jos:

$$\vec{\iota}\cdot\vec{\jmath}=0=\alpha_{xx_1}\cdot\alpha_{yx_1}+\alpha_{xy_1}\cdot\alpha_{yy_1}+\alpha_{xz_1}\cdot\alpha_{yz_1} \qquad (\vec{\iota})^2=1=\alpha_{xx_1}^2+\alpha_{xy_1}^2+\alpha_{xz_1}^2$$

$$\vec{\jmath}\cdot\vec{k}=0=\alpha_{yx_1}\cdot\alpha_{zx_1}+\alpha_{yy_1}\cdot\alpha_{zy_1}+\alpha_{yz_1}\cdot\alpha_{zz_1} \qquad (\vec{\jmath})^2=1=\alpha_{yx_1}^2+\alpha_{yy_1}^2+\alpha_{yz_1}^2$$

$$\vec{k}\cdot\vec{\iota}=0=\alpha_{zx_1}\cdot\alpha_{xx_1}+\alpha_{zy_1}\cdot\alpha_{xy_1}+\alpha_{zz_1}\cdot\alpha_{xz_1} \qquad \left(\vec{k}\right)^2=1=\alpha_{zx_1}^2+\alpha_{zy_1}^2+\alpha_{zz_1}^2$$

Din relațiile (2.4) și (2.5) rezultă că, din cele 9 unghiuri, doar 3 sunt independente, celelalte putând fi determinate cu relațiile (2.4) și (2.5).

În concluzie, cele 3 unghiuri independente și cele 3 distanțe - parametrii geometrici precizați de funcțiile din relația (2.2) - formează cei 6 parametri necesari pentru precizarea poziției rigidului la un moment dat.

2.2.2 Legea de mișcare

Determinarea legii de mișcare a rigidului în mișcare generală (oarecare) presupune aflarea modului în care variază vectorul de poziție al punctului A aparținând rigidului față de reperul fix: $\overrightarrow{r_{O_1}^A}$.

Conform celor prezentate mai sus, acesta are expresia:

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A}=x_{O_1}^O\cdot\overrightarrow{\iota_1}(t)+y_{O_1}^O\cdot\overrightarrow{\jmath_1}(t)+z_{O_1}^O\cdot\overrightarrow{k_1}(t)+x_O^A\cdot\vec{\iota}(t)+y_O^A\cdot\vec{\jmath}(t)+z_O^A\cdot\vec{k}(t) \qquad (2.6)$$

Pentru trecerea la scrierea matriceală se adoptă notațiile:

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A}\longrightarrow\{R_1\}=\begin{Bmatrix} x_{O_1}^A \\ y_{O_1}^A \\ z_{O_1}^A \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{r_{O_1}^O}\longrightarrow\{R_0\}=\begin{Bmatrix} x_{O_1}^O \\ y_{O_1}^O \\ z_{O_1}^O \end{Bmatrix} \qquad \overrightarrow{r_O^A}\longrightarrow\{R\}=\begin{Bmatrix} x_O^A \\ y_O^A \\ z_O^A \end{Bmatrix}$$

$$[A]=\begin{bmatrix} \alpha_{xx_1} & \alpha_{yx_1} & \alpha_{zx_1} \\ \alpha_{xy_1} & \alpha_{yy_1} & \alpha_{zy_1} \\ \alpha_{xz_1} & \alpha_{yz_1} & \alpha_{zz_1} \end{bmatrix}$$

Astfel, relația 2.6 devine:

$$\{R_1\}=\{R_O\}+[A]\cdot\{R\} \quad \equiv \quad \begin{Bmatrix} x_{O_1}^A \\ y_{O_1}^A \\ z_{O_1}^A \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} x_{O_1}^O \\ y_{O_1}^O \\ z_{O_1}^O \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} \alpha_{xx_1} & \alpha_{yx_1} & \alpha_{zx_1} \\ \alpha_{xy_1} & \alpha_{yy_1} & \alpha_{zy_1} \\ \alpha_{xz_1} & \alpha_{yz_1} & \alpha_{zz_1} \end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix} x_O^A \\ y_O^A \\ z_O^A \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

Efectuând calculele, se obține **legea de mișcare pentru punctul A aparținând rigidului în mișcare generală (oarecare)**:

$$x_{O_1}^A = x_{O_1}^O + x_O^A \cdot \alpha_{xx_1} + y_O^A \cdot \alpha_{yx_1} + z_O^A \cdot \alpha_{zx_1}$$
$$y_{O_1}^A = y_{O_1}^O + x_O^A \cdot \alpha_{xy_1} + y_O^A \cdot \alpha_{yy_1} + z_O^A \cdot \alpha_{zy_1} \qquad (2.8)$$
$$z_{O_1}^A = z_{O_1}^O + x_O^A \cdot \alpha_{xz_1} + y_O^A \cdot \alpha_{yz_1} + z_O^A \cdot \alpha_{zz_1}$$

2.2.3 Distribuția de viteze

Fie un solid rigid într-o mișcare generală (oarecare). Legile de mișcare ale unui punct material oarecare A aparținând rigidului față de un reper fix (T_1), sunt date de relația (2.1):

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A}$$

Pentru a putea exprima distribuția de viteze, se face apel la calulul derivatei absolute a unui vector precizat prin proiecțiile sale față de un reper mobil (vezi paragraful 1.1.5):

Dacă se consideră vectorul $\vec{u} = u_x \cdot \vec{\imath} + u_y \cdot \vec{\jmath} + u_z \cdot \vec{k}$, unde $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ și $\vec{k}$ sunt versorii reperului mobil OXYZ, derivata sa față de reperul fix $O_1X_1Y_1Z_1$ va avea expresia:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

unde ω este vectorul viteză unghiulară și reprezintă viteza de rotație a reperului mobil, invariabil legat de rigid, față de reperul fix.

Derivând relația (2.1) și ținând cont de relația de mai sus, rezultă:

$$\dot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \dot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \frac{\partial\overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A} \quad \text{, deoarece} \quad \frac{\partial\overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} = 0$$

rezultă:

$$\dot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \dot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A} \text{, adică}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}}$$ **Formula lui Euler pentru distribuția de viteze** (2.9)

Relația (2.9) reprezintă **legea de variație a vitezelor punctelor aparținând unui rigid în mișcare generală și cu ajutorul ei se poate determina distribuția de viteze pentru toate punctele aparținând rigidului**.

Dacă se alege un al doilea punct B, oarecare, aparținând rigidului, viteza lui se poate exprima direct față de punctul A, considerând punctul A ca fiind originea unui nou sistem de coordonate mobil.

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^B} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_A^B} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$$

- **Reprezentarea grafică** a distribuției de viteze:

Viteza punctului A aparținând rigidului în mișcare generală (oarecare) $\overrightarrow{V_A}$ se compune din:

$\overrightarrow{V_O}$, reprezentând viteza din mișcarea de translație a rigidului, și

$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$, reprezentând viteza punctului A din mișcarea de rotație a rigidului în jurul suportului lui $\vec{\omega}$.

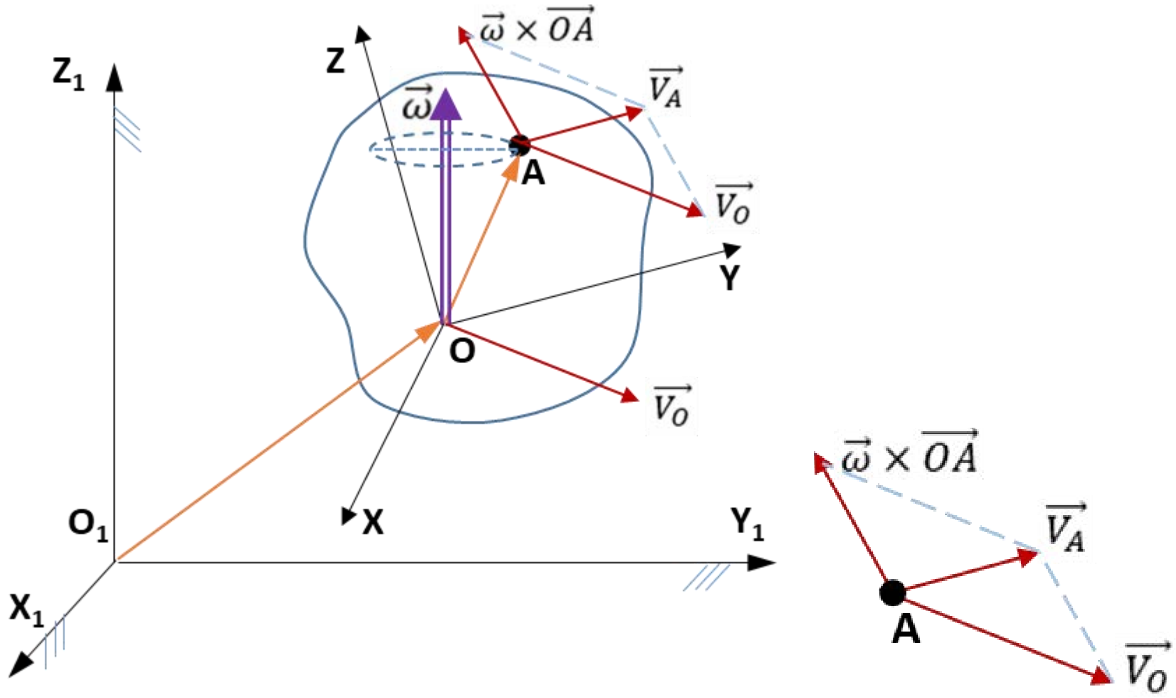


Fig. 2.3 Reprezentarea grafică a distribuției de viteze în mișcarea generală a rigidului

Observație: O mișcare generală a unui rigid se compune dintr-o translație oarecare și o rotație oarecare a acestuia.

- **Proprietățile distribuției de viteze**

Proprietatea 1. Proiecțiile vitezelor a două puncte oarecare ale unui rigid în mișcare generală, pe dreapta care le unește, sunt egale (**Teorema proiecțiilor vitezelor),** Fig. 2.4 a).

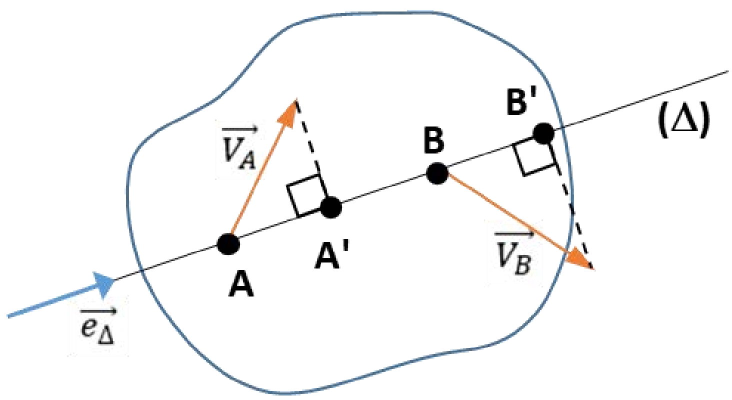


Fig. 2.4 a)

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \qquad | \cdot \overrightarrow{e_\Delta}$$

$$\overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} = \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{e_\Delta} + \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{e_\Delta} \qquad , unde \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{e_\Delta} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{pr_{(\Delta)}\overrightarrow{V_B} = pr_{(\Delta)}\overrightarrow{V_A}}$$

De reținut: *Proprietatea stă la baza metodei grafice de determinare a distribuțiilor de viteze în mișcarea plan-paralelă.*

Proprietatea 2. Viteza unghiulară a rigidului în mișcare oarecare este un invariant.

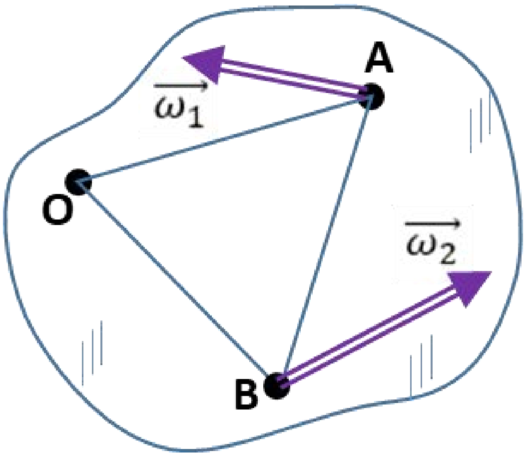


Fig. 2.4 b)

$$\overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{OA}$$
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{\omega_1} \times \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\omega_2} \times \overrightarrow{OB} \quad \Rightarrow$$
$$\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{\omega_2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{\omega} = invariant}$$

Proprietatea 3. Proiecția vitezelor punctelor ce aparțin unui rigid, pe suportul lui $\vec{\omega}$, este un invariant.

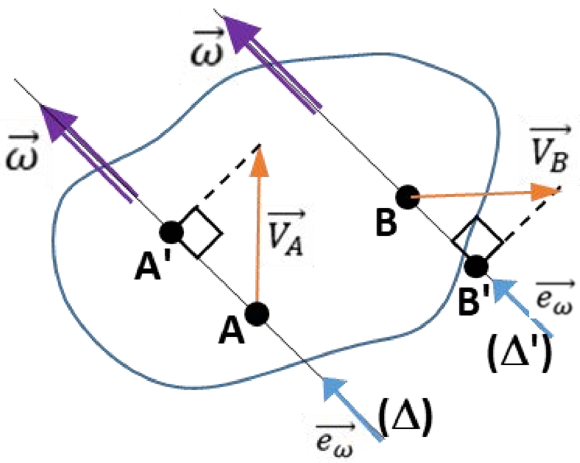


Fig. 2.4 c)

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB} \qquad | \cdot \overrightarrow{e_\omega}$$
$$\overrightarrow{V_B} \cdot \overrightarrow{e_\omega} = \overrightarrow{V_A} \cdot \overrightarrow{e_\omega} + \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{e_\omega} \ , dar \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}\right) \cdot \overrightarrow{e_\omega} = 0$$

$$\boxed{pr_\omega \overrightarrow{V_B} = pr_\omega \overrightarrow{V_A}}$$

Proprietatea 4. Vitezele punctelor ce aparțin unui rigid și sunt coliniare au vârfurile, de asemenea coliniare.

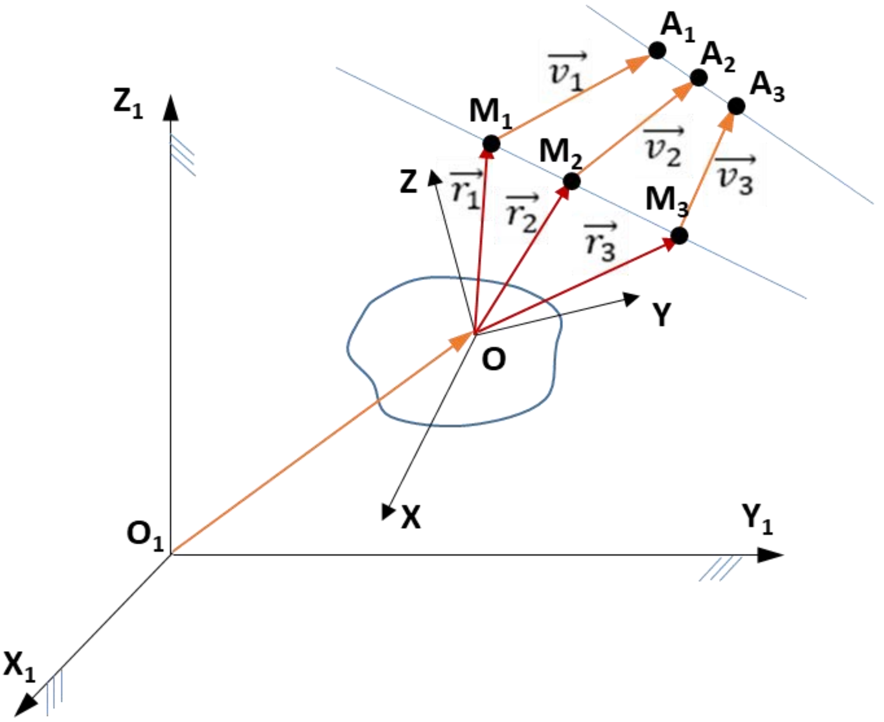


Fig. 2.4 d)

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{M_1M_3} \qquad \vec{r_2} - \vec{r_1} = \lambda \cdot (\vec{r_3} - \vec{r_1}) \tag{2.10}$$

$$\vec{v_2} - \vec{v_1} = \lambda \cdot (\vec{v_3} - \vec{v_1}) \qquad \overrightarrow{M_2A_2} - \overrightarrow{M_1A_1} = \lambda \cdot (\overrightarrow{M_3A_3} - \overrightarrow{M_1A_1}) \tag{2.11}$$

Din relațiile (2.10) și (2.11) rezultă:

$$(\vec{r_2} + \overrightarrow{M_2A_2}) - (\vec{r_1} + \overrightarrow{M_1A_1}) = \lambda \cdot [(\vec{r_3} + \overrightarrow{M_3A_3}) - (\vec{r_1} + \overrightarrow{M_1A_1})]$$

$$\overrightarrow{OA_2} - \overrightarrow{OA_1} = \lambda \cdot (\overrightarrow{OA_3} - \overrightarrow{OA_1}) \qquad \overrightarrow{A_1A_2} = \lambda \cdot \overrightarrow{A_1A_3} \tag{2.12}$$

Din relația (2.12) se observă că vârfurile vitezelor a trei puncte coliniare de pe un rigid sunt de asemenea coliniare.

Prin urmare, dacă M_2 împarte segmentul M_1M_3 în raportul λ, atunci A_2 va împărți segmentul A_1A_3 în același raport λ.

***De reținut**: această proprietate este aplicată la distribuția vitezei în mișcarea de rotație cu axă de rotație elicoidală sau plan-paralelă.*

Proprietatea 5. Punctele ce aparțin unei direcții paralele cu ω au aceeași viteză liniară.

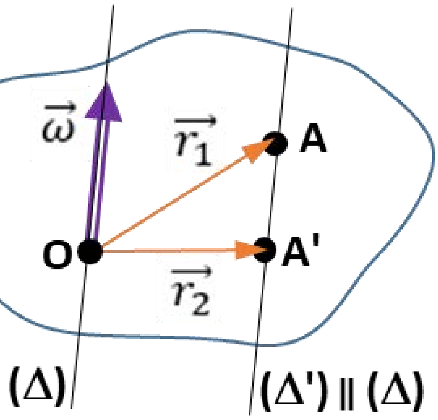
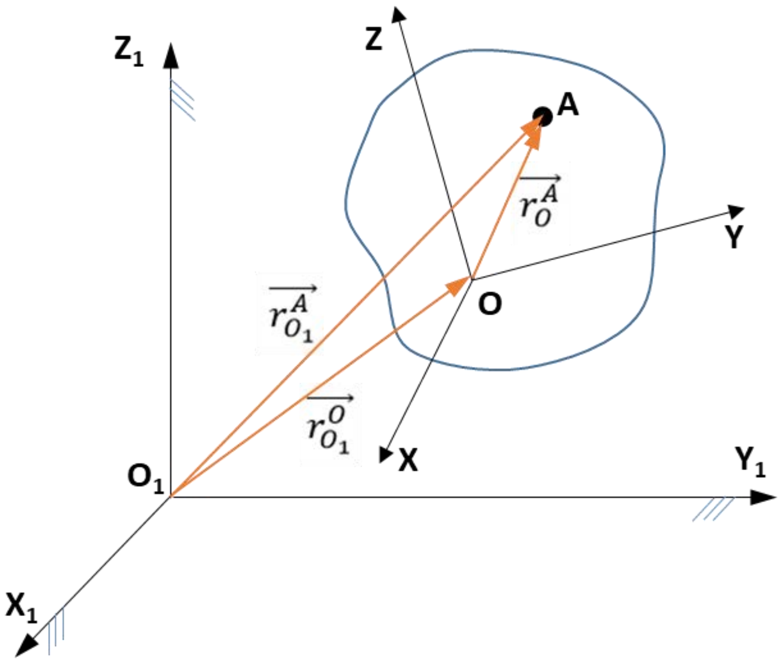


Fig. 2.4 e)

$$\vec{V_A} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_1}$$
$$\vec{V_{A'}} = \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_2} =$$
$$= \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \left(\vec{r_1} + \overrightarrow{AA'}\right) =$$
$$= \vec{V_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_1} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{AA'}$$
$$\text{Dar } \vec{\omega} \times \overrightarrow{AA'} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{V_A} = \vec{V_{A'}}}$$

2.2.4 Distribuția de accelerații

Revenim la modelul de studiu al unui punct oarecare A în mișcare generală (oarecare), reprezentat de Fig. 2.1 (redată mai jos):



$$\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A}$$
$$\dot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \dot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \dot{\overrightarrow{r_O^A}}$$
$$\vec{v_A} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}$$

Pornind de la formula lui Euler și aplicând operatorul de derivare, se obține expresia accelerației unui punct aparținând rigidului în mișcare generală (oarecare):

$$\dot{\vec{v_A}} = \dot{\vec{v_O}} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{r_0^A} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \overrightarrow{r_0^A}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}\right); \qquad \text{se ține cont că: } \frac{\partial \overrightarrow{r_0^A}}{\partial t} = 0$$

Așadar rezultă:

$$\vec{a_A} = \vec{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA})} \qquad (2.13)$$

Relația 2.13 reprezintă **formula lui Euler-Rivals cu privire la distribuția de accelerații pentru punctele unui rigid în mișcare generală**.

Dacă se cunoaște accelerația într-un punct oarecare A aparținând rigidului, se poate determina accelerația în oricare punct B, după relația:

$$\overrightarrow{a_B} = \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{AB})$$

Definiție: Accelerația unui punct ce aparține rigidului în raport cu originea reperului mobil este egală cu accelerația din mișcarea de translație a rigidului la care se adaugă accelerația dată de un termen rezultat din mișcarea circulară a punctului în jurul suportului lui ε - componenta tangențială (Fig. 2.5 a) și un alt termen care rezultă din mișcarea circulară a punctului în jurul suportului lui ω – componenta normală (Fig. 2.5 b).

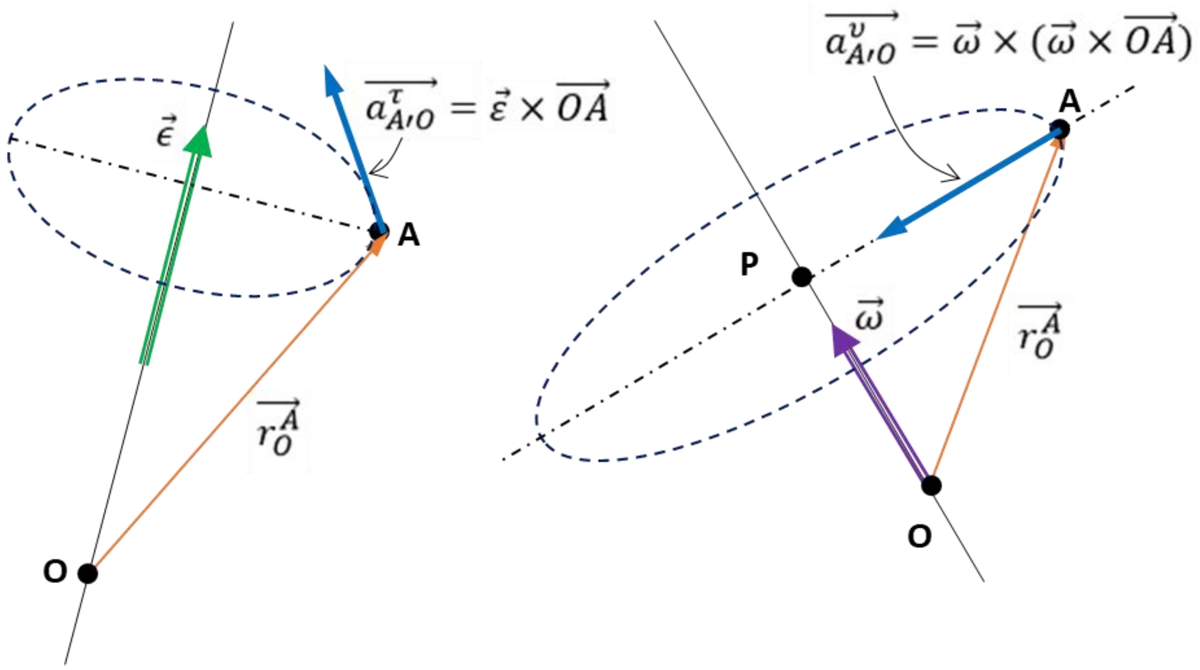


Fig. 2.5 Reprezentarea componentelor accelerației față de reperul mobil, invariabil legat de rigid: a) – componenta tangențială și b) – componenta normală

$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA} \qquad | \vec{\omega} \times$

$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{PA} \qquad | \vec{\omega} \times$

Se ține cont de faptul că $\vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = 0$ și rezultă:

$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}\right) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{PA})$

$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{PA}\right) \cdot \vec{\omega} - \omega^2 \cdot \overrightarrow{PA}$

Se ține cont de faptul că $\left(\vec{\omega} \cdot \overrightarrow{PA}\right) \cdot \vec{\omega} = 0$ și rezultă:

$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}) = -\omega^2 \cdot \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{a_{A'O}^{\nu}}$, unde PA este raza cercului descris de punctul A

$\overrightarrow{a_{A'O}^{\nu}}$ este accelerația centripetă îndreptată spre suportul vectorului ω.

În baza formulei lui Euler-Rivals și a precizărilor făcute cu privire la ultimii doi termeni ai formulei, se poate reprezenta grafic accelerația unui punct oarecare A ce aparține rigidului, Fig. 2.6.

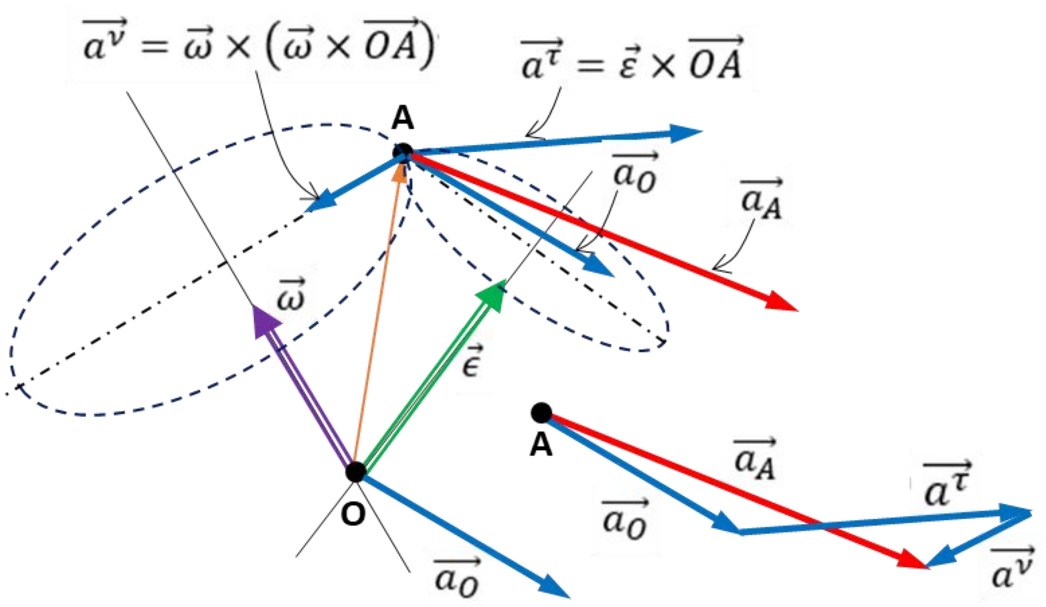


Fig. 2.6 Reprezentarea grafică a distribuției de accelerații în mișcarea generală a rigidului

Observație: În mișcarea generală a rigidului, vectorii ε și ω nu au același suport:

$$\boxed{\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA})}$$

2.3 Mișcări particulare ale rigidului

2.3.1 Mișcarea de translație

Definiție: Mișcarea de translație este mișcarea rigidului în care o dreaptă solidară cu acesta rămâne, pe tot timpul mișcării, paralelă cu o dreaptă fixă în spațiu.

Toate punctele rigidului descriu traiectorii egale și paralele.

Exemple:

- Translația rectilinie: ghidajul de tip coadă de rândunică,
- Translație circulară: mecanismul patrulater (paralelogram).

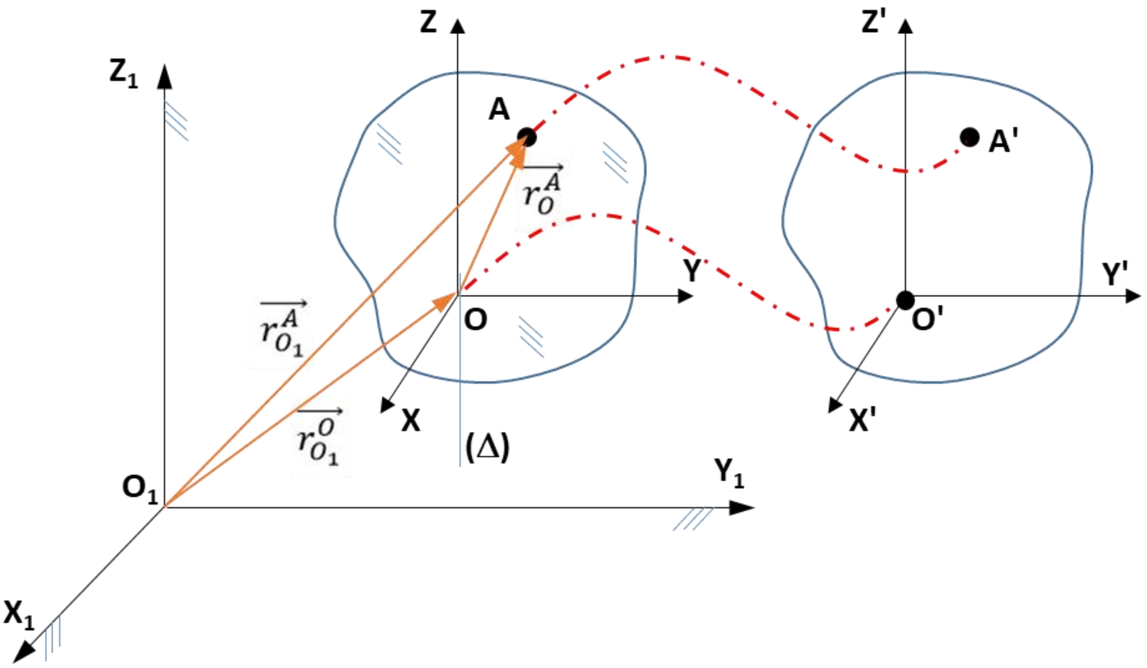


Fig. 2.7 Reprezentarea mișcării de translație a rigidului

Conform definiției, orice dreaptă aparținând rigidului rămâne tot timpul paralelă cu ea însăși; în mod particular se poate considera că și axele sistemului de coordonate *OX*, *OY* și *OZ* păstrează aceeași caracteristică. Rezultă că versorii acestor axe nu vor schimba poziția în timpul mișcării:

$$\dot{\vec{\imath}} = 0 \quad ; \qquad \dot{\vec{\jmath}} = 0 \quad ; \qquad \dot{\vec{k}} = 0$$

a) <u>Legile de mișcare</u>

$$\overrightarrow{r_{O_1}^{A}} = \overrightarrow{r_{O_1}^{O}} + \overrightarrow{r_{O}^{A}}$$

$$\{R_1\} = \{R_0\} + [A] \cdot \{R\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{O_1}^{A} \\ y_{O_1}^{A} \\ z_{O_1}^{A} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{O_1}^{O} \\ y_{O_1}^{O} \\ z_{O_1}^{O} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_{O}^{A} \\ y_{O}^{A} \\ z_{O}^{A} \end{Bmatrix}$$

Explicitând relația de mai sus rezultă **legile de mișcare ale unui punct ce aparține rigidului în mișcare de translație**:

$$\begin{cases} x_{O_1}^{A} = x_{O_1}^{O} + x_{O}^{A} \\ y_{O_1}^{A} = y_{O_1}^{O} + y_{O}^{A} \\ z_{O_1}^{A} = z_{O_1}^{O} + z_{O}^{A} \end{cases}.$$

Parametri variabili ai acestui tip de mișcare sunt: $\begin{cases} x_{O_1}^{O}(t) \\ y_{O_1}^{O}(t) \\ z_{O_1}^{O}(t) \end{cases}$

Rezultă că rigidul în mișcare de translație are 3 grade de libertate; în particular, pot exista mișcări de translație cu 2 sau 1 grad de libertate.

b) <u>Distribuția de viteze și de accelerații</u>

$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} \qquad \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}$$

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A})$$

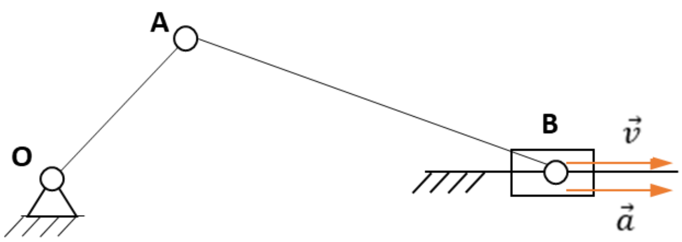
Particularitatea mișcării de translație: $\vec{\omega} = 0 \quad și \quad \vec{\varepsilon} = 0$

Rezultă: $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} \quad și \quad \overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0}$

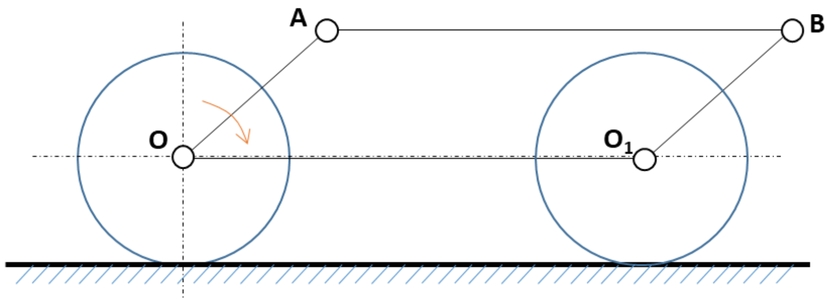
Deoarece punctul *A* este un punct oarecare, se poate spune că, în mișcarea de translație a rigidului, punctele ce aparțin acestuia, la un moment dat au aceeași viteză și aceeași accelerație.

Aplicații:

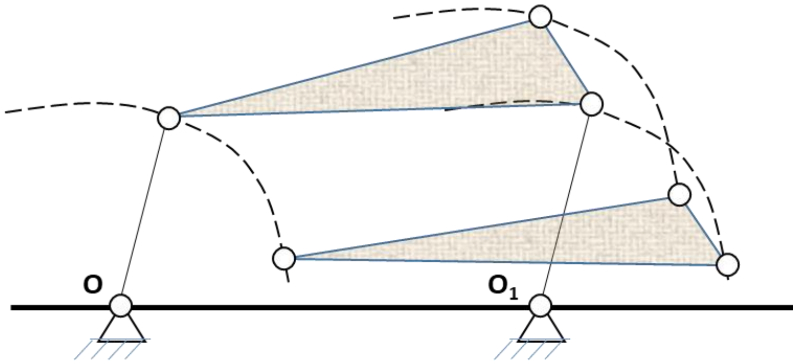
- Mișcarea pistonului (mecanism bielă-manivelă):



- Mișcarea bielelor de cuplare a două roți:



- Mișcarea pantografului:



Clasificarea mișcărilor de translație:

- După traiectoria pe care o descrie un punct al rigidului:
  - Translații rectilinii,
  - Translații curbilinii (în plan sau în spațiu).

  Mișcarea circulară este un caz particular de translație curbilinie.

- După numărul gradelor de libertate:
  - Translații cu 3, 2 sau 1 grad de libertate.

2.3.2 Mișcarea de rotație cu axă fixă

Definiție: Un rigid are o mișcare de rotație cu axă fixă dacă, în tot timpul mișcării, două puncte aparținând rigidului rămân fixe în spațiu.

Poziția rigidului la un moment dat este dată de $\theta = \theta(t)$.

$$\theta = \theta_0 + \omega t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}$$

Mișcarea are un singur grad de libertate.

Originile celor două sisteme de coordonate coincid ($O_1=O$), conform Fig. 2.8.

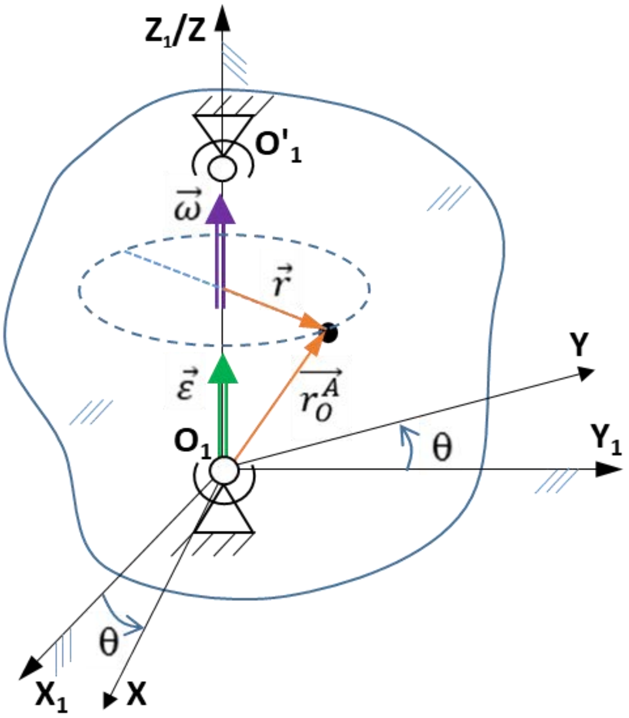


Fig. 2.8 Reprezentarea mișcării rigidului cu axă fixă

a) <u>Legile de mișcare</u>

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A} \qquad \overrightarrow{r_{O_1}^O} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_O^A}$$

$$\{R_1\} = \{R_0\} + [A] \cdot \{R\} \qquad \{R_0\} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \{R_1\} = [A] \cdot \{R\}$$

unde [A] reprezintă matricea cosinușilor directori.

Pentru o rotație plană în jurul axei OZ se poate scrie expresia matricei $[A]$ astfel:

$$[A] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Legile de mișcare ale punctului A aflat în mișcare de rotație cu axă fixă devin:

$$\begin{Bmatrix} x_{O_1}^A \\ y_{O_1}^A \\ z_{O_1}^A \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_O^A \\ y_O^A \\ z_O^A \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{O_1}^A = x_O^A \cos\theta - y_O^A \sin\theta \\ y_{O_1}^A = x_O^A \sin\theta + y_O^A \cos\theta \\ z_{O_1}^A = z_O^A \end{cases} .$$

Observație: Cota punctului A rămâne tot timpul mișcării aceeași ($z_{O_1}^A = z_O^A$)

b) Distribuția de viteze

$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}$$

$$\overrightarrow{v_0} = 0 \qquad (\overrightarrow{r_{O_1}^O} = 0)$$

$$\overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A} \qquad \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0^A & y_0^A & z_0^A \end{vmatrix} = -\omega y_0^A \vec{i} + \omega x_0^A \vec{j}$$

$$\begin{cases} v_{A_x} = -\omega y_0^A \\ v_{A_y} = +\omega x_0^A \\ v_{A_z} = 0 \end{cases} \qquad v_A = \sqrt{\omega^2 y_A^2 + \omega^2 x_A^2} = \omega \cdot r$$

Proprietăți ale distribuției de viteze: $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}$

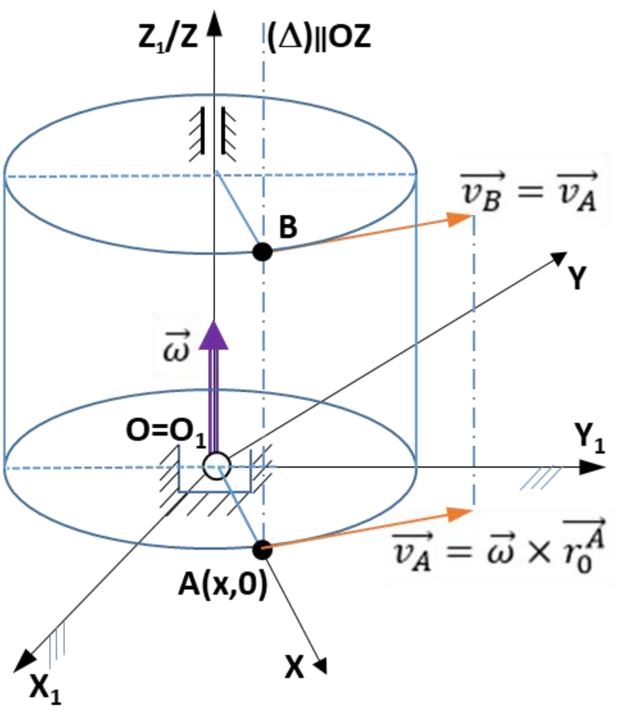
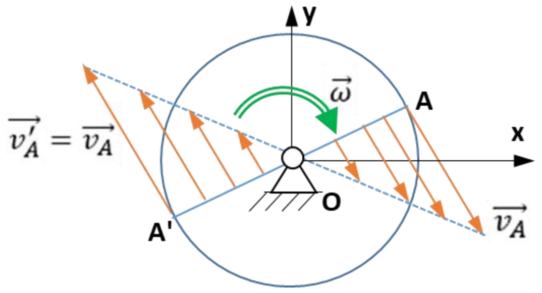


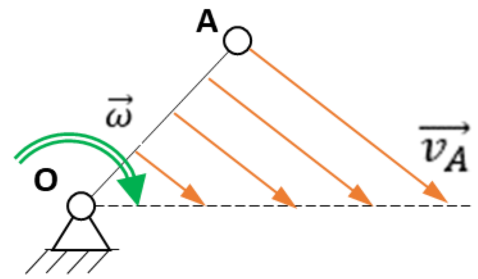
Fig. 2.9 Reprezentarea proprietăților distribuției de viteze în mișcarea cu axă fixă

1) Viteza punctului A ce aparține rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă este conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație (conform distribuției de viteze).
2) Punctele ce aparțin axei de rotație sunt puncte de viteză nulă.
3) Vitezele punctelor rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă variază liniar cu distanța de la punct la axa de rotație.

4) Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeași viteză (vezi pct. 5 din proprietățile distribuției de viteze în mișcarea oarecare a rigidului).

Observație: Mișcarea de rotație cu axă fixă a rigidului este caracterizată de vectorul ω:





$$\overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} \quad ; \quad v_A = |\overrightarrow{v_A}| = \omega \cdot r$$

c) <u>Distribuția de accelerații</u>

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A})$$

$$\overrightarrow{a_0} = 0 \qquad (\overrightarrow{v_0} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{r_{O_1}^O} = 0)$$

$$\overrightarrow{a_A} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A})$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_0^A & y_0^A & z_0^A \end{vmatrix} = -\varepsilon y_0^A \vec{\imath} + \varepsilon x_0^A \vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0^A & y_0^A & z_0^A \end{vmatrix} = -\omega y_0^A \vec{\imath} + \omega x_0^A \vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_0^A & \omega x_0^A & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x_0^A \vec{\imath} - \omega^2 y_0^A \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{a_A} = -(\varepsilon y_0^A + \omega^2 x_0^A) \cdot \vec{\imath} + (\varepsilon x_0^A - \omega^2 y_0^A) \cdot \vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} a_{A_x} = -\varepsilon y_0^A - \omega^2 x_0^A \\ a_{A_y} = +\varepsilon x_0^A - \omega^2 y_0^A \\ a_{A_z} = 0 \end{cases}$$

$$a_A = \sqrt{(\varepsilon y_0^A + \omega^2 x_0^A)^2 + (\varepsilon x_0^A - \omega^2 y_0^A)^2} = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)({x_0^A}^2 + {y_0^A}^2)} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Proprietăți ale distribuției de accelerații: $\overrightarrow{a_A} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA})$

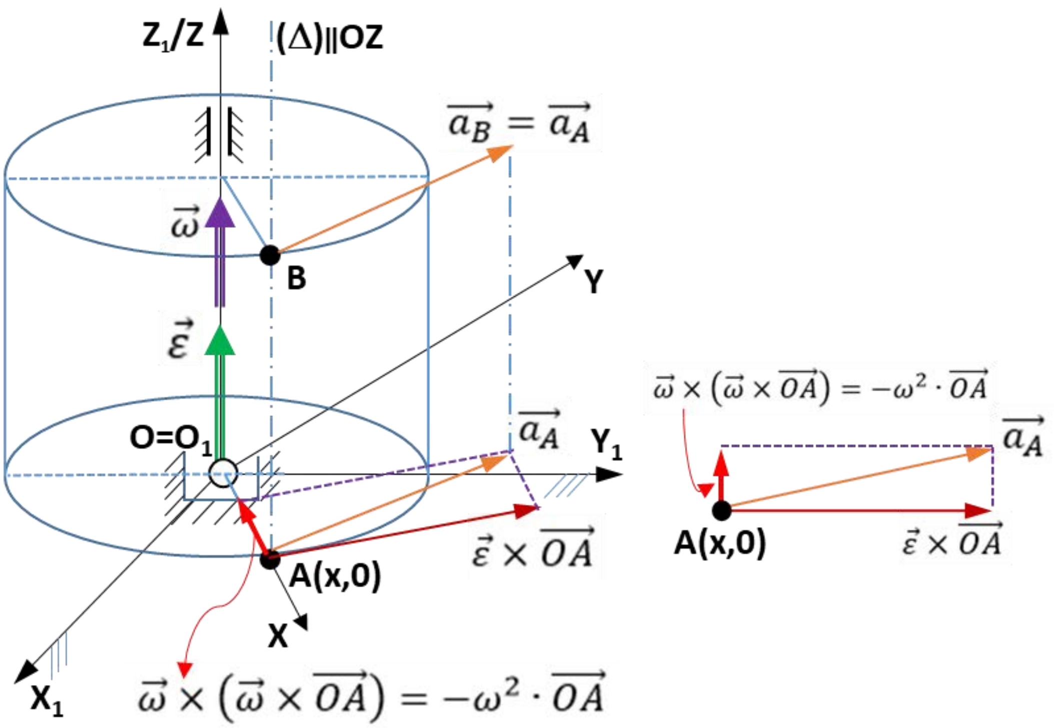


Fig. 2.10 Reprezentarea proprietăților distribuției de accelerații în mișcarea cu axă fixă

1) Accelerația punctului A ce aparține rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă este conținută într-un plan perpendicular pe axa de rotație.
2) Punctele ce aparțin axei de rotație sunt de accelerație nulă.
3) Accelerațiile punctelor rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă variază liniar cu distanța de la punct la axa de rotație.
4) Punctele situate pe o dreaptă paralelă cu axa de rotație au aceeași accelerație.

Observații:

- Accelerația unui punct ce aparține rigidului în mișcare de rotație cu axă fixă face cu raza (distanța de la punct la axă) un unghi constant:

$$\varphi = arctg\frac{|\overrightarrow{a^\tau}|}{|\overrightarrow{a^\nu}|} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \qquad , \qquad \varphi = const.$$

- Distribuția de accelerații în mișcarea de rotație cu axă fixă a rigidului este caracterizată de vectorii accelerație unghiulară $\vec{\varepsilon}$ și viteză unghiulară $\vec{\omega}$.

2.3.3 Mișcarea elicoidală (rototranslație)

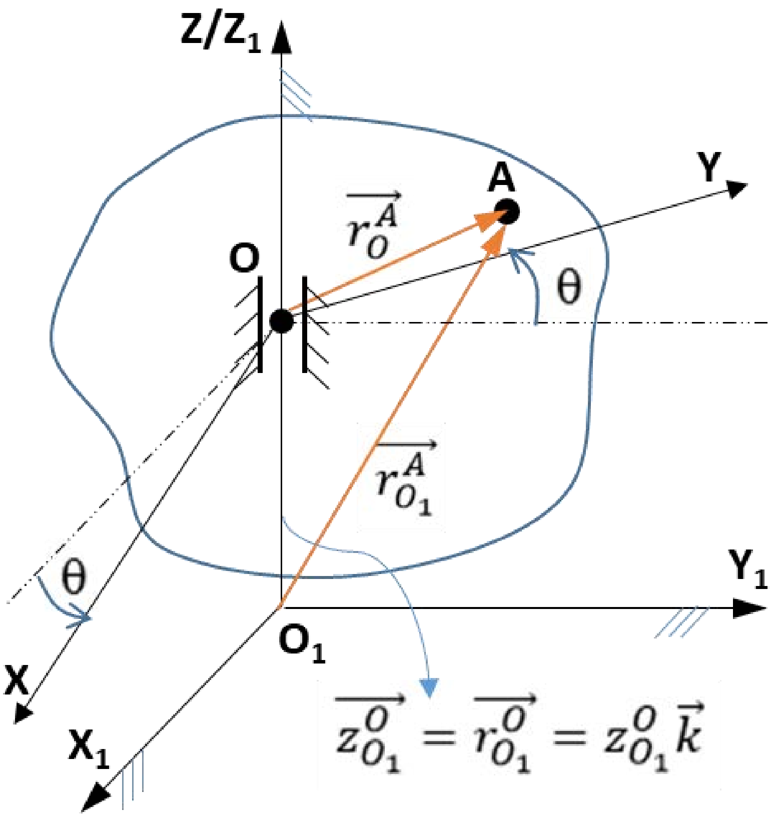
Definiție. Un rigid efectuează o mișcare elicoidală dacă, în tot timpul mișcării, o dreaptă ce aparține acestuia alunecă pe o altă dreaptă fixă (axă) cu viteza v, în timp ce rigidul se rotește cu viteza unghiulară ω în jurul axei respective.

Mișcarea elicoidală este compusă dintr-o mișcare de translație (alunecare) și o mișcare de rotație.

Mișcarea elicoidală are două grade de mobilitate.

Exemple: mișcarea unui șurub, mișcarea unui burghiu în timpul operației de găurire.

<u>Modelul de studiu:</u>

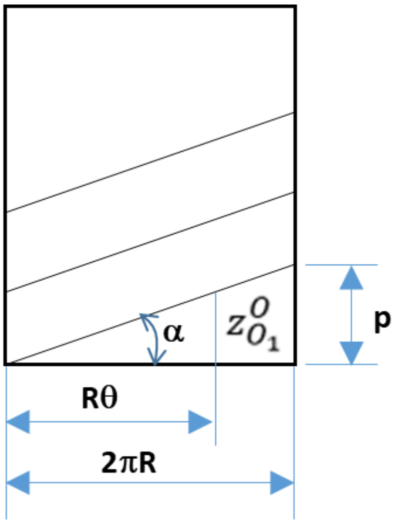


Parametri:

$$\begin{Bmatrix} z_{O_1}^O(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix}$$

Fig. 2.11 Reprezentarea mișcării elicoidale

Observație. Dacă între cei doi parametri, $z_{O_1}^O(t)$ și $\theta(t)$ există o relație de dependență atunci mișcarea devine cu un singur grad de mobilitate și se numește **mișcare tip șurub**.



$$z_{O_1}^O = R\theta \cdot tg(\alpha) = R\theta \frac{p}{2\pi R}$$

$$z_{O_1}^O = \frac{p}{2\pi}\theta \quad - \text{șurub cu 1 început}$$

$$z_{O_1}^O = 2\frac{p}{2\pi}\theta \quad - \text{șurub cu 2 începuturi}$$

...

$$z_{O_1}^O = n\frac{p}{2\pi}\theta \quad - \text{șurub cu n începuturi}$$

a) Legile de mișcare

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A}$$

$$\{R_1\} = \{R_0\} + [A] \cdot \{R\}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{O_1}^A \\ y_{O_1}^A \\ z_{O_1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{O_1}^O \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_O^A \\ y_O^A \\ z_O^A \end{Bmatrix}$$

Rezultă expresia legilor de mișcare ale punctului A aflat în mișcare elicoidală:

$$\begin{cases} x_{O_1}^A = x_O^A \cos\theta - y_O^A \sin\theta \\ y_{O_1}^A = x_O^A \sin\theta + y_O^A \cos\theta \\ z_{O_1}^A = z_{O_1}^O + z_O^A \end{cases}$$

b) Distribuția de viteze

Se consideră formula lui Euler: $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}$

Viteza originii reperului invariabil legat de rigid ($\overrightarrow{v_0}$) are o singură componentă, după axa *OZ*:

$$\overrightarrow{v_0} = \dot{z}_{O_1}^O \cdot \vec{k} \qquad \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{v_A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{z}_{O_1}^O \end{Bmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0^A & y_0^A & z_0^A \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega y_0^A \\ \omega x_0^A \\ \dot{z}_{O_1}^O \end{Bmatrix}$$

$$v_A = |\overrightarrow{v_A}| = \sqrt{(\omega y_0^A)^2 + (\omega x_0^A)^2 + (\dot{z}_{O_1}^O)^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + (\dot{z}_{O_1}^O)^2}$$

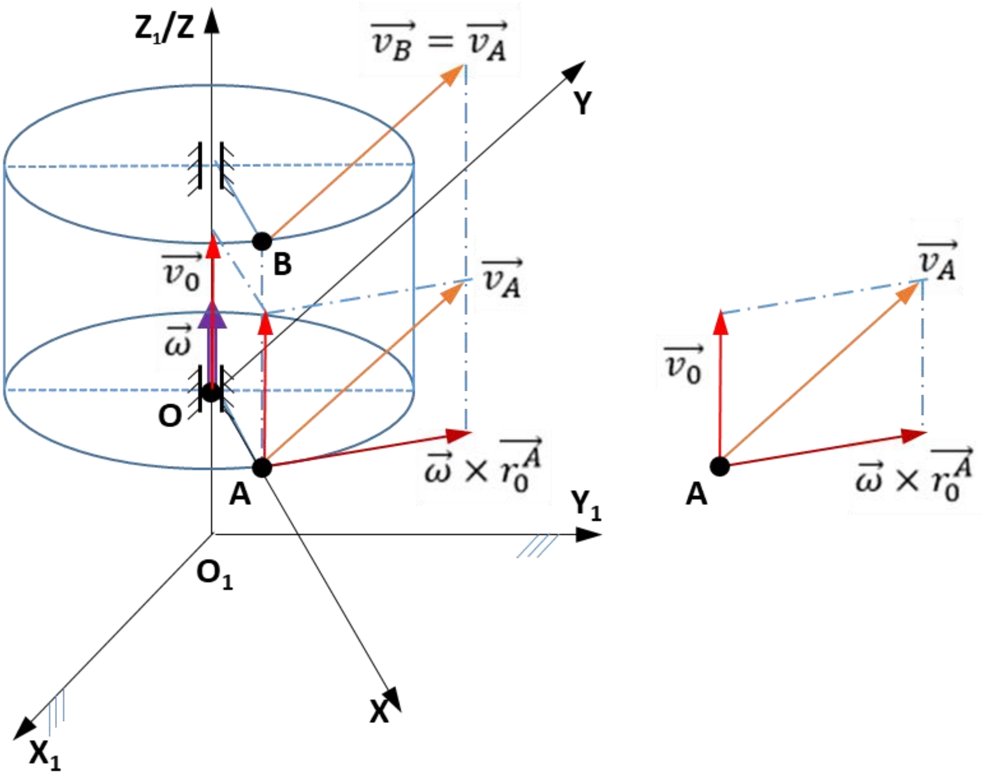


Fig. 2.12 Distribuția de viteze în mișcarea elicoidală

Distribuția de viteze în mișcarea elicoidală este aceeași, ca formă, cu distribuția de viteze în mișcarea generală a rigidului, cu precizarea că viteza v_0 și viteza unghiulară ω au, fiecare, o singură componentă.

c) Distribuția de accelerație

Se consideră formula lui Euler-Rivals:

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A})$$

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA})$$

Accelerația originii reperului invariabil legat de rigid are o singură componentă, la fel ca și viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε:

$$\overrightarrow{a_0} = \ddot{z}_{O_1}^{O} \cdot \vec{k} \qquad \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} \qquad \vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_0^A & y_0^A & z_0^A \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon y_0^A \\ \varepsilon x_0^A \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0^A & y_0^A & z_0^A \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega y_0^A \\ \omega x_0^A \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_0^A & \omega x_0^A & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -\omega^2 x_0^A \\ -\omega^2 y_0^A \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{a_A} = \begin{Bmatrix} -\varepsilon y_0^A - \omega^2 x_0^A \\ \varepsilon x_0^A - \omega^2 y_0^A \\ \ddot{z}_{O_1}^O \end{Bmatrix}$$

$$a_A = \sqrt{(-\varepsilon y_0^A - \omega^2 x_0^A)^2 + (\varepsilon x_0^A - \omega^2 y_0^A)^2 + (\ddot{z}_{O_1}^O)^2} = \sqrt{r^2(\varepsilon^2 + \omega^4) + (\ddot{z}_{O_1}^O)^2}$$

Accelerația a_A este dată de diagonala paralelipipedului construit cu componentele: $\overrightarrow{a_0}, \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_0^A}, \omega^2 \overrightarrow{AO}$

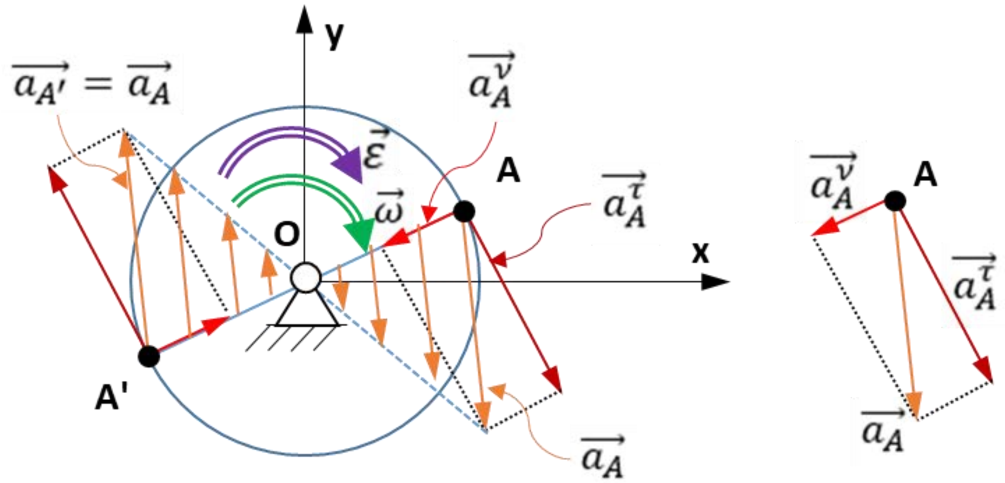


Fig. 2.13 Distribuția de accelerații în mișcarea elicoidală – vedere din planul xOy

2.3.4 Mișcarea plan-paralelă

Definiție: Un rigid efectuează o mișcare plan-paralelă dacă, pe tot timpul mișcării, un plan solidar cu rigidul rămane paralel cu un plan fix, numit plan director.

Exemple:

- Biela, în mecanismul bielă-manivelă,
- Roata care se rostogolește astfel încât planul acesteia rămâne tot timpul paralel cu un plan fix,
- Satelitul, în mecanismul planetar-diferențial.

Modelul de studiu (Fig. 2.14):

- se consideră conturul rezultat prin secționarea rigidului cu un plan (π), paralel cu planul considerat fix (π_1);
- în baza definiției proiecției, conturul se va proiecta pe planul fix în adevărată mărime;
- rezultă că modelul de studiu se obține prin reducerea rigidului la un contur (cel menționat mai sus), iar acest contur se proiectează pe planul fix;
- de planul fix se atașează reperul fix $O_1X_1Y_1Z_1$;
- de contur se atașează reperul mobil $OXYZ$.

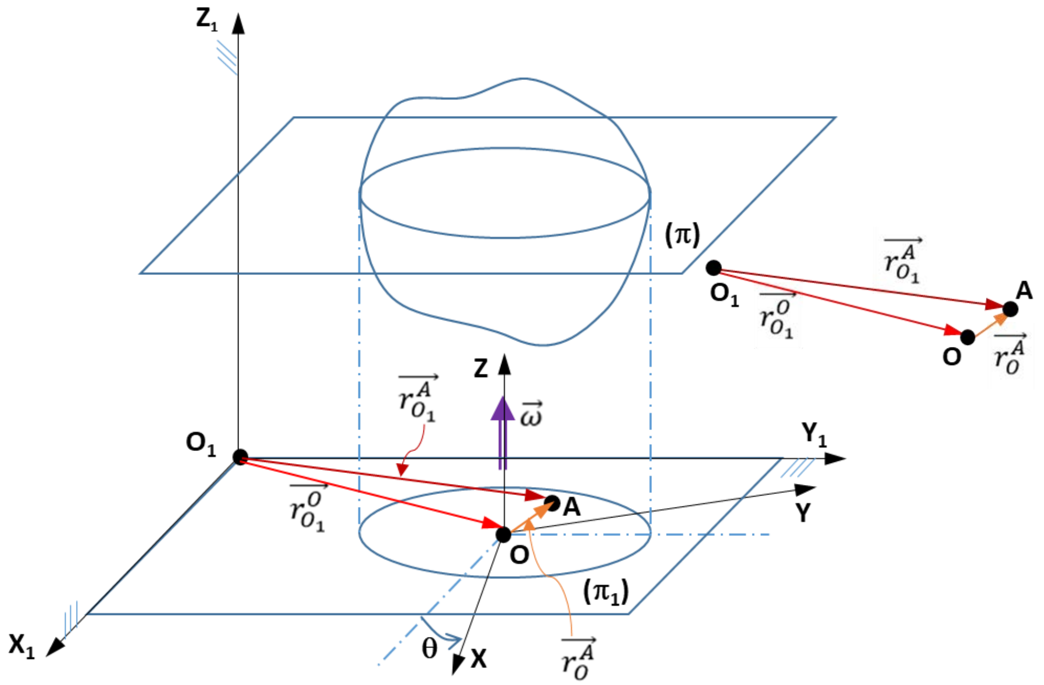


Fig. 2.14 Modelul de studiu al mișcării plan-paralele

Mișcarea se caracterizează prin trei parametri:

$$\begin{cases} x_{O_1}^{O}(t) \\ y_{O_1}^{O}(t) \\ \theta(t) \end{cases}$$

Mișcarea plan-paralelă are trei grade de libertate.

Mișcarea plan-paralelă este compusă din două translații și o rotație.

Observație: în general, în aplicațiile curente din tehnică, această mișcare se reduce la două grade de libertate: o translație și o rotație.

a) Legile de mișcare

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A}$$

$$\begin{Bmatrix} x_{O_1}^A \\ y_{O_1}^A \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{O_1}^O \\ y_{O_1}^O \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_O^A \\ y_O^A \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_{O_1}^A = x_{O_1}^O + x_O^A \cos\theta - y_O^A \sin\theta \\ y_{O_1}^A = y_{O_1}^O + x_O^A \sin\theta + y_O^A \cos\theta \end{cases}$$

b) Distribuția de viteze

$$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A}$$

Viteza originii O a reperului mobil are două componente: $\overrightarrow{v_0} \quad \begin{Bmatrix} v_0^x \\ v_0^y \end{Bmatrix}$

Vectorul viteză unghiulară ω are o componentă: $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k}$

Rezultă:

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_0^A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0^A & y_0^A & 0 \end{vmatrix} = -\omega y_0^A \cdot \vec{\imath} + \omega x_0^A \cdot \vec{\jmath}$$

$$\begin{Bmatrix} v_A^x \\ v_A^y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v_0^x \\ v_0^y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\omega y_0^A \\ \omega x_0^A \end{Bmatrix} \qquad \begin{cases} v_A^x = v_0^x - \omega y_0^A \\ v_A^y = v_0^y + \omega x_0^A \end{cases}$$

$$v_A = |\overrightarrow{v_A}| = \sqrt{(v_A^x)^2 + (v_A^y)^2}$$

Deoarece modelul de studiu s-a redus la un contur conținut în planul director, distribuția de viteze se studiază pe un model reprezentat în planul determinat de axele OX și OY.

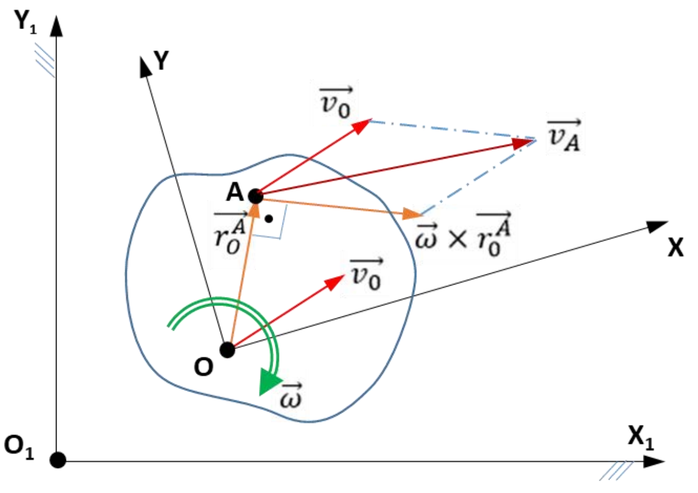


Fig. 2.15 Distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă

Observație. Distribuția de viteze în mișcarea plan-paralelă este aceeași, ca formă, cu distribuția de viteze în mișcarea generală a rigidului, cu mențiunea că vectorul ω are o singură componentă, iar viteza originii reperului mobil are două componente.

<u>Centrul instantaneu de rotație. Axoide, centroide. Proprietăți ale distribuției de viteze în mișcarea plan-paralelă, în raport cu centrul instantaneu de rotație.</u>

Definiție. Centrul instantaneu de rotație (CIR) reprezintă punctul de viteză nulă în mișcarea plan-paralelă.

Se presupune că există un astfel de punct **I**, a cărei viteză la un anumit moment dat este nulă.

În acest caz, torsorul cinematic va fi de forma: $\begin{Bmatrix} \vec{\omega} \neq 0 \\ \vec{v_I} = 0 \end{Bmatrix}$

Se consideră torsorul cinematic în raport cu O – originea reperului mobil invariabil legat de rigid: $\begin{Bmatrix} \vec{\omega} \\ \vec{v_O} \end{Bmatrix}$

În baza formulei lui Euler se poate scrie:

$\vec{v_I} = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_0^I}$, unde $\vec{r_0^I}$ este necunoscută

$0 = \vec{v_0} + \vec{\omega} \times \vec{r_0^I} \quad | \, \vec{\omega} \times$

$0 = \vec{\omega} \times \vec{v_0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_0^I})$

$0 = \vec{\omega} \times \vec{v_0} + (\vec{\omega} \cdot \vec{r_0^I}) \cdot \vec{\omega} - \omega^2 \vec{r_0^I},$ unde al doilea termen este nul.

Soluția ecuației de mai sus este:

$$\boxed{\vec{r_0^I} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{v_0}}{\omega^2}}$$

$\vec{r_0^I}$ este determinat în mod unic, deci punctul de viteză nulă există și se numește **<u>centru instantaneu de rotație (CIR)</u>.**

$$\vec{r_0^I} \quad \begin{Bmatrix} x_0^I \\ y_0^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{\omega^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ v_0^x & v_0^y & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\omega^2}\left(-\omega v_0^y \vec{i} + \omega v_0^x \vec{j}\right) = \begin{Bmatrix} \dfrac{-v_0^y}{\omega} \\ \dfrac{v_0^x}{\omega} \end{Bmatrix}$$

Din expresia coordonatelor vectorului de poziție al CIR rezultă că acesta este dependent de timp:

$$\left.\begin{aligned}\omega &= \omega(t)\\ v_0 &= v_0(t)\end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{r_0^I} = \overrightarrow{r_0^I}(t)$$

Rezultă că viteza punctului ***I*** este nulă <u>la un moment dat</u>.

Definiție. Dreapta perpendiculară pe planul fix (planul director) în CIR se numește <u>**axă instantanee de rotație (AIR).**</u>

Dacă ***I*** se consideră un punct curent de pe AIR, atunci expresia centrului instantaneu de rotație reprezintă ecuația AIR (similar în statică există axa centrală):

$$\overrightarrow{r_0^I}(t) = \frac{\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_0}}{\omega^2}$$

Deoarece ***I*** este mobil într-un interval de timp, AIR descrie suprafețe riglate numite <u>axoide.</u>

Definiție.

Locul geometric al AIR față de reperul fix se numește <u>axoidă fixă</u>.

Locul geometric al AIR față de reperul mobil se numește <u>axoidă mobilă</u>.

$$\overrightarrow{r_{O_1}^I} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^I} \quad ; \quad \overrightarrow{r_{O_1}^I} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \frac{\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_0}}{\omega^2}$$

Dacă se intersectează axoidele cu un plan paralel cu planul director, rezultă două curbe, numite <u>centroide</u>.

În planul director, centroidele se proiectează în adevărată mărime, așa cum se prezintă în Fig. 2.16.

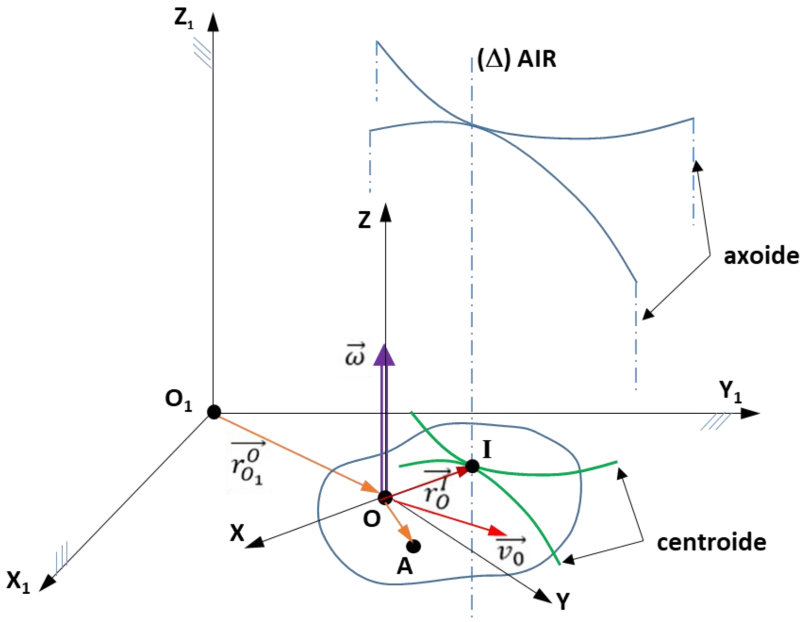


Fig. 2.16 Reprezentarea centroidelor și axoidelor în mișcarea plan-paralelă

Definiție. Locul geometric al CIR în raport cu reperele fix și mobil poartă numele de centroide:

- în raport cu reperul fix, se numește centroidă fixă,
- în raport cu reperul mobil, se numește centroidă mobilă.

Modelul de studiu se poate simplifica, fiind considerată doar reprezentarea în plan:

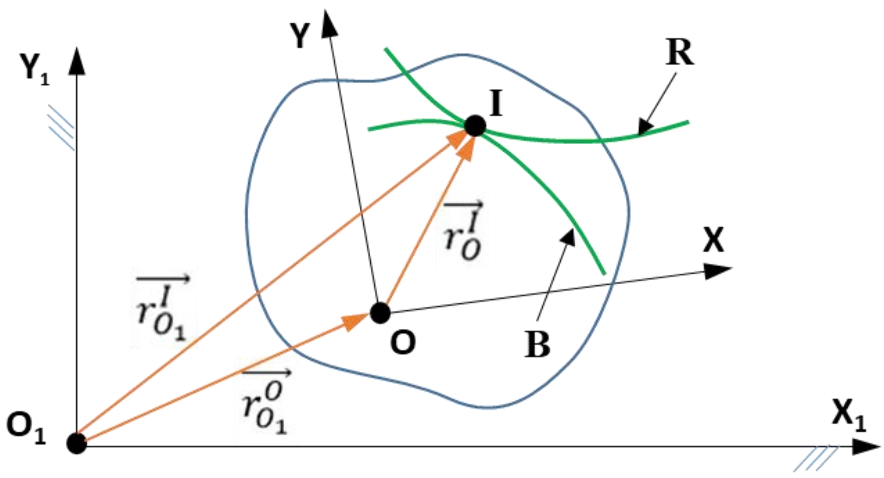


Fig. 2.17 Reprezentarea centroidelor în plan

Centroida fixă se mai numește bază (B) $\overrightarrow{r_{O_1}^I} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \dfrac{\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_0}}{\omega^2}$

Centroida mobilă se mai numește rostogolitoare (R) $\overrightarrow{r_O^I} = \dfrac{\vec{\omega} \times \overrightarrow{v_0}}{\omega^2}$

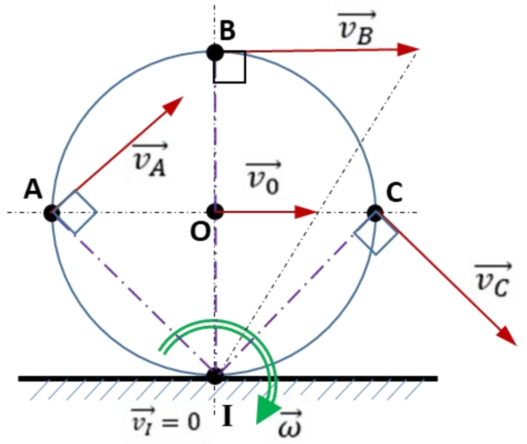
Proprietățile distribuției de viteze în raport cu CIR

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_I} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{v_I} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_I^A} \\ \overrightarrow{v_I} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_A} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_I^A}} \quad (*)$$

În mișcarea plan-paralelă, distribuția de viteze, în raport cu CIR, pentru punctele ce aparțin rigidului se studiază ca și cum rigidul efectuează, față de acest punct, o mișcare de rotație cu axă fixă.

Prin urmare, mișcarea plan-paralelă, care este o mișcare compusă, în raport cu ***I*** (CIR) se reduce la o mișcare de rotație în jurul axei instantanee de rotație (adică o mișcare simplă).

Exemplu: roata care se rostogolește fară alunecare, Fig. 2.18.



$$\overrightarrow{v_I} = 0 \quad \Rightarrow \quad I = CIR$$

$$\overrightarrow{v_0} = \overrightarrow{v_I} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{IO}$$

$$\overrightarrow{v_0} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{IO}$$

Fig. 2.18 CIR în cazul roții care se rostogolește fără alunecare

În baza relației (*), reprezentarea vitezei într-un punct oarecare A aparținând rigidului este următoarea:

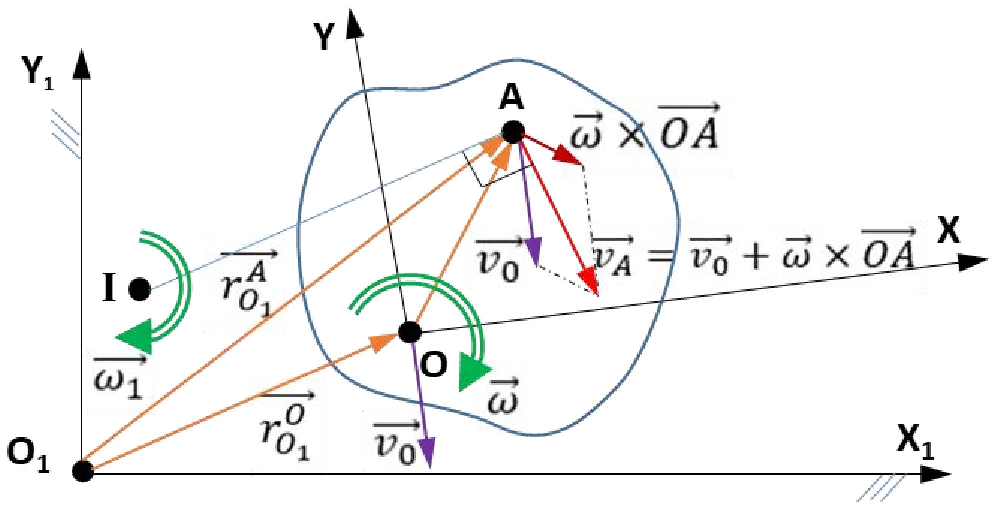


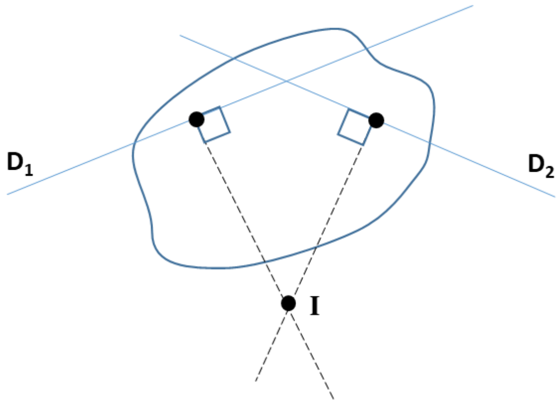
Fig. 2.19 Reprezentarea vitezei unui punct A aparținând rigidului, față de CIR

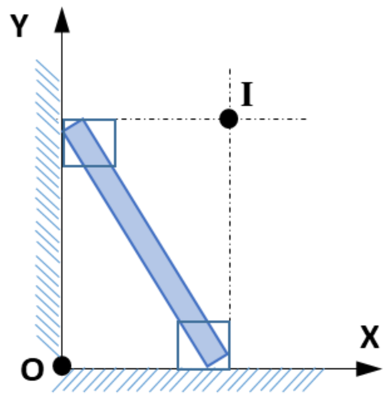
$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}$, unde $(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}) \perp \overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{IA}$, cu $\overrightarrow{v_A} \perp \overrightarrow{IA}$

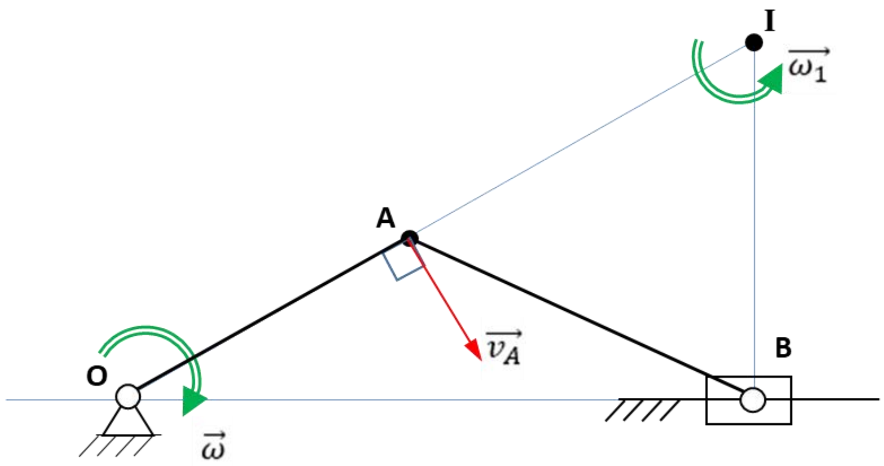
Tot în baza formulei (*) se pot enunța următoarele **proprietăți**:

1) Dacă se cunosc direcțiile vitezelor a două puncte aparținând rigidului în mișcare plan-paralelă, se poate determina CIR.





2) Dacă se cunosc mărimea vitezei unui punct ce aparține rigidului în mișcare plan-paralelă și CIR, se poate determina viteza altui punct aparținând rigidului.



$$\omega = \frac{v_A}{OA}$$

$$\omega_1 = \frac{v_A}{IA}$$

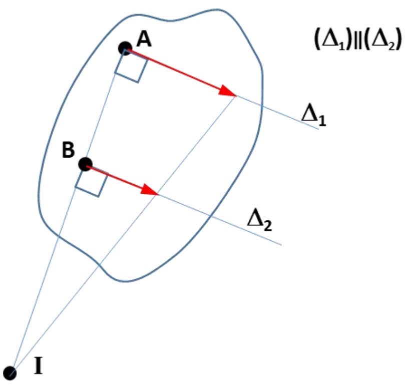
$$v_A = \omega_1 \cdot IA$$

$$v_B = \omega_1 \cdot IB = \frac{v_A}{IA} \cdot IB$$

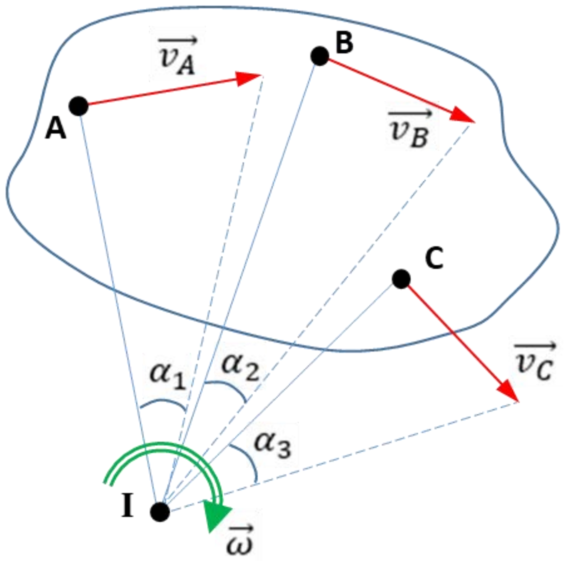
$$v_B = v_A \cdot \frac{IB}{IA}$$

$\frac{IB}{IA}$ se numește **raportul de transmisie** a mișcării între punctele A și B.

3) Dacă direcțiile vitezelor a două puncte ce aparțin rigidului în mișcare plan-paralelă sunt paralele, pentru determinarea CIR trebuie să se cunoască și mărimile acestor viteze.



4) Din CIR (polul vitezelor), vitezele punctelor ce aparțin rigidului în mișcare plan-paralelă se văd sub același unghi.



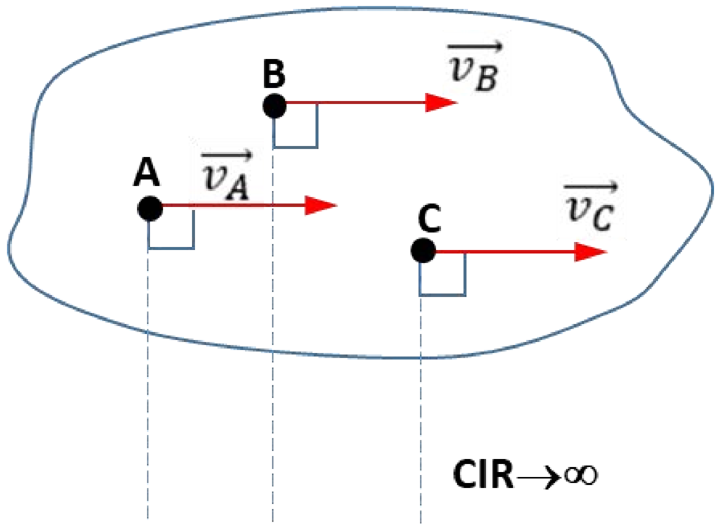
$$v_A = \omega \cdot IA$$

$$v_B = \omega \cdot IB$$

$$v_C = \omega \cdot IC$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_A}{IA} &= \omega = tg(\alpha_1) \\ \frac{v_B}{IB} &= \omega = tg(\alpha_2) \\ \frac{v_C}{IC} &= \omega = tg(\alpha_3) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

5) Dacă vitezele punctelor unui rigid sunt paralele și au aceeași mărime, CIR este la infinit iar rigidul execută o mișcare de translație.



$$|\vec{v_A}| = |\vec{v_B}| = |\vec{v_C}|$$

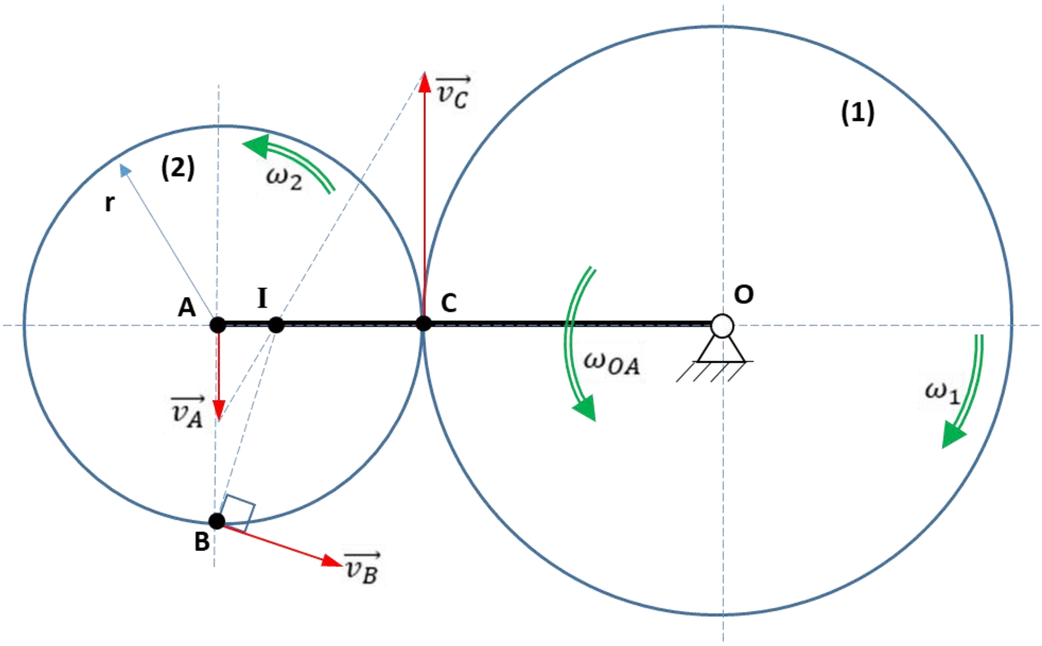
Aplicație 2.1:

Fie bara OA articulată la capete în punctul O – de roata (1), care se rostogolește în jurul centrului său O cu ω_1 = 2 rad/s și în punctul A – de roata (2) de rază r = 0.2 m.

Bara OA, de lungime l = 0.5 m, execută o mișcare de rotație cu viteza unghiulară

ω_{OA} = 1 rad/s.

Se cere să se determine viteza punctului B de pe roata (2).



Bara OA are mișcare de rotație în jurul unui ax perpendicular pe planul său în punctul O, deci toate punctele sale vor avea viteze perpendiculare pe OA, cu mărimi proporționale cu distanțele lor la punctul O; sensul vitezelor respective este dat de sensul vitezei unghiulare ω_{OA}.

Viteza punctului A va avea direcția și sensul din figură:

$$v_A = \omega_{OA} \cdot OA = 1 \cdot 0.5 = 0.5\, m/s$$

Roata (2) are mișcare plan-paralelă; pentru determinarea CIR se constată că viteza punctului C aparținând roții (2) este aceeași cu viteza punctului C aparținând roții (1), deoarece cele două roți se rostogolesc una pe cealaltă.

Roata (1) are o mișcare de rotație cu ω_1 în jurul unei axe perpendiculare pe planul său în punctul O, deci viteza punctului C este perpendiculară pe OC și are sensul dat de ω_1:

$$v_C = \omega_1 \cdot OC = 2(0.5 - 0.2) = 0.6\, m/s$$

Cunoscând vitezele v_A și v_C ale celor două puncte, se poate determina CIR:

- Se unesc punctele A și C
- Se unesc vârfurile vitezelor v_A și v_C.
- La intersecția celor două drepte se află CIR (Punctul I).

Poziția lui *I* se determină din asemănarea triunghiurilor:

$$\frac{AI}{IC} = \frac{v_A}{v_C}$$

$$\frac{AI}{AC - AI} = \frac{v_A}{v_C} \quad \Leftrightarrow \quad AI \cdot v_C = AC \cdot v_A - AI \cdot v_A$$

$$AI = \frac{AC \cdot v_A}{v_A + v_C} = \frac{0.2 \cdot 0.5}{0.5 + 0.6} = \frac{0.1}{1.1} = 0.09$$

Cunoscând poziția lui I, se poate determina viteza unghiulară instantanee a roții (2):

$$\omega_2 = \frac{v_A}{AI} = \frac{0.5}{0.09} = 5.5\, rad/s$$

Viteza punctului B are direcția perpendiculară pe dreapta IB, sensul fiind dat de sensul lui ω_2, iar mărimea:

$$v_B = \omega_2 \cdot IB = \frac{v_A}{AI} \cdot \sqrt{AI^2 + r^2}$$

c) <u>Distribuția de accelerații în mișcarea plan-paralelă</u>

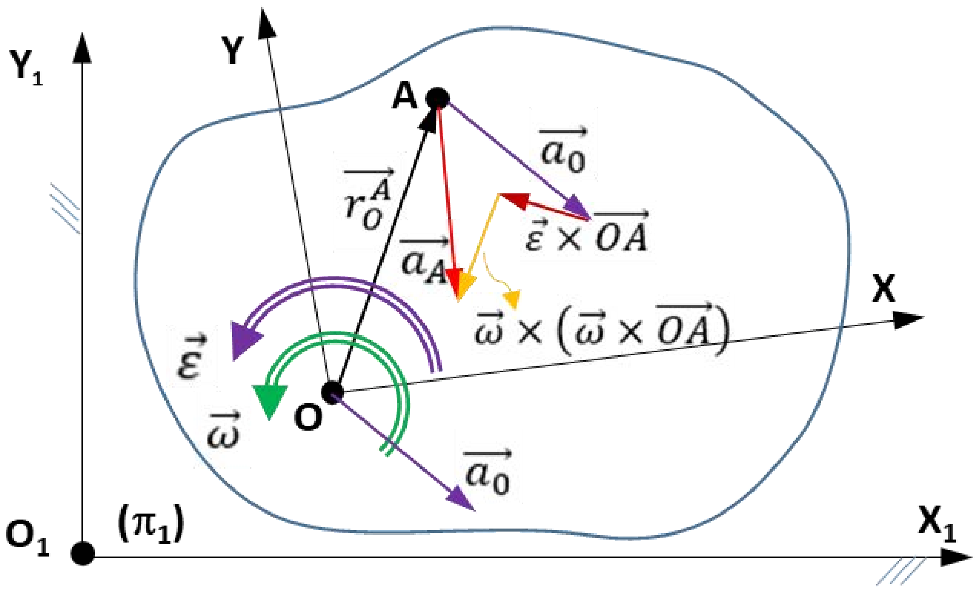


Fig. 2.20 Distribuția de accelerații în mișcarea plan-paralelă

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA})$$

$$(\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA}) \perp \overrightarrow{OA} \quad , \quad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}) \parallel \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ x_0^A & y_0^A & 0 \end{vmatrix} = -\varepsilon y_0^A \cdot \vec{\imath} + \varepsilon x_0^A \cdot \vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x_0^A & y_0^A & 0 \end{vmatrix} = -\omega y_0^A \cdot \vec{\imath} + \omega x_0^A \cdot \vec{\jmath}$$

$$\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{OA}\right) = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -\omega y_0^A & \omega x_0^A & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 x_0^A \cdot \vec{\imath} - \omega^2 y_0^A \cdot \vec{\jmath}$$

$$\begin{cases} a_A^x = a_O^x - \varepsilon y_0^A - \omega^2 x_0^A \\ a_A^y = a_O^y + \varepsilon x_0^A - \omega^2 y_0^A \end{cases}$$

$$a_A = \sqrt{(a_A^x)^2 + (a_A^y)^2}$$

Se pune problema unui punct de accelerație nulă; se presupune că un astfel de punct este $J(x_0^J, y_0^J)$

$$a_J = 0 \quad \Longrightarrow \quad a_J^x = 0 \quad ; \quad a_J^y = 0$$

$$\begin{cases} 0 = a_O^x - \varepsilon y_0^J - \omega^2 x_0^J \\ 0 = a_O^y + \varepsilon x_0^J - \omega^2 y_0^J \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0^J = \cdots \\ y_0^J = \cdots \end{cases}$$

Soluția fiind unică, rezultă ca ***J*** este un punct de accelerație nulă, aparținând rigidului în mișcare plan-paralelă.

Punctul ***J*** se mai numește polul accelerațiilor.

Deoarece coordonatele lui $J(x_0^J, y_0^J)$ sunt funcții de timp, ***J*** este considerat **centrul instantaneu al accelerațiilor (CIA)**.

Axa perpendiculară pe planul director în CIA se numește axa instantanee a accelerațiilor (AIA).

Observație. CIR al vitezelor și al accelerațiilor, în general, nu coincid, după cum nu coincid nici axele instantanee. Aceste elemente coincid în cazul mișcării de rotație cu axă fixă a rigidului. Atunci axele nu sunt instantanee, ci stabile.

Justificarea existenței polului accelerațiilor ***J*** sub formă vectorială:

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_J} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{JA}\right) \qquad \left|\begin{array}{l} \cdot\, \omega^2 \\ \vec{\varepsilon} \times \end{array}\right. \qquad , \quad \overrightarrow{a_J} = 0$$

$$\begin{cases} \omega^2 \cdot \overrightarrow{a_A} = (\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA}) \cdot \omega^2 + \left(-\omega^2 \cdot \overrightarrow{JA}\right) \cdot \omega^2 \\ \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A} = \vec{\varepsilon} \times (\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA}) + \vec{\varepsilon} \times \left(-\omega^2 \cdot \overrightarrow{JA}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\varepsilon} \times \left(\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA}\right) = \left(\vec{\varepsilon} \cdot \overrightarrow{JA}\right) \cdot \vec{\varepsilon} = -\varepsilon^2 \cdot \overrightarrow{JA}$$

$$\begin{cases} \omega^2 \cdot \overrightarrow{a_A} - \left(\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA}\right) \cdot \omega^2 + \omega^4 \cdot \overrightarrow{JA} = 0 \\ \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A} + \varepsilon^2 \cdot \overrightarrow{JA} + \vec{\varepsilon} \times \left(\omega^2 \cdot \overrightarrow{JA}\right) = 0 \end{cases} \quad |+$$

$$\omega^2 \cdot \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A} + \overrightarrow{JA} \cdot (\varepsilon^2 + \omega^4) = 0$$

$$\overrightarrow{JA} = -\frac{\omega^2 \cdot \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A}}{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AJ} = \frac{\omega^2 \cdot \overrightarrow{a_A} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{a_A}}{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

Soluție unică, deci polul accelerațiilor *J* există.

Accelerația unui punct A aparținând rigidului va fi:

$$a_A = JA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Distribuția de accelerații în raport cu polul *J* se studiază ca și în mișcarea rigidului cu axă fixă:

$$\overrightarrow{a_A} = \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{JA}\right)$$

Reprezentarea grafică a distribuției de accelerații se face ținând cont de distribuția de accelerații în mișcarea rigidului cu axă fixă.

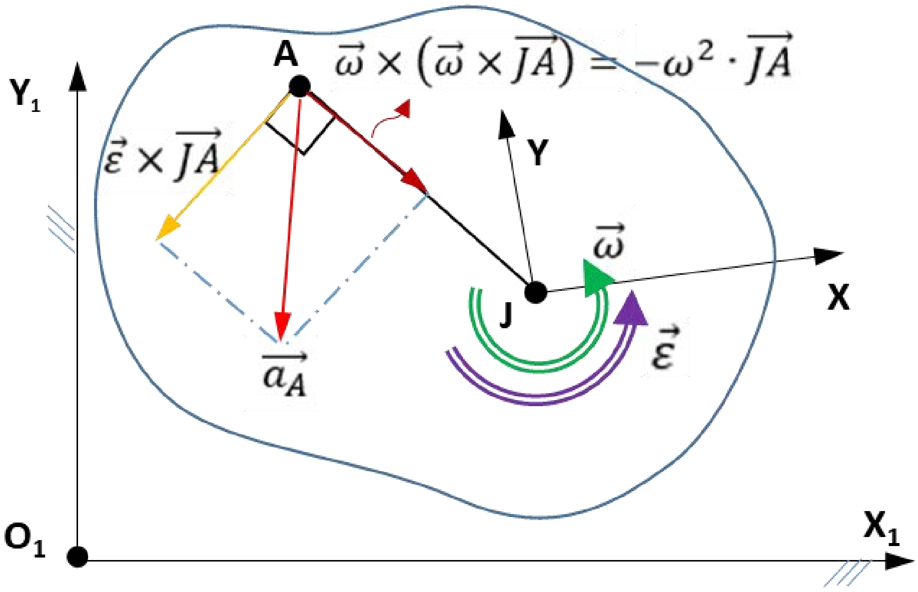


Fig. 2.21 Reprezentarea distribuției de accelerații în mișcarea plan-paralelă, în raport cu CIA

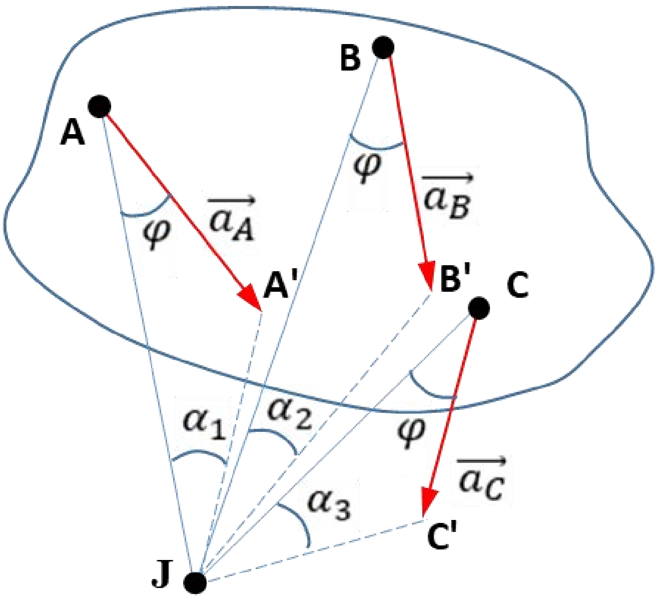
Proprietăți ale distribuției de accelerații în mișcarea plan-paralelă

1) Unghiul format de direcția accelerației unui punct cu raza ce unește punctul cu polul accelerațiilor J este constant:

$$tg(\varphi) = \frac{|\vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{JA}|}{|\omega^2 \cdot \overrightarrow{JA}|} = \frac{a_A^\tau}{a_A^\nu} = \frac{\varepsilon \cdot JA}{\omega^2 \cdot JA} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad \text{invariant (constant)}$$

Punctul A este ales arbitrar.

2) Prin polul accelerațiilor, accelerațiile punctelor unui rigid în mișcare plan-paralelă se văd sub același unghi.



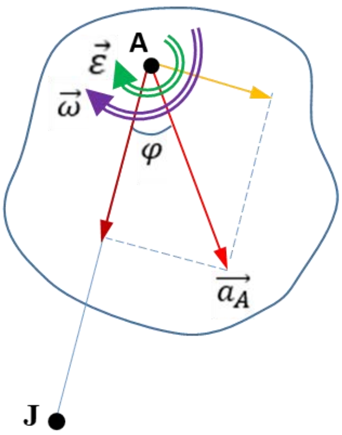
$$a_A = AA' = JA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$a_B = BB' = JB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$a_C = CC' = JC \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{AA'}{BB'} = \dfrac{JA}{JB} & ,\varphi \\ \dfrac{BB'}{CC'} = \dfrac{JB}{JC} & ,\varphi \\ \dfrac{CC'}{AA'} = \dfrac{JC}{JA} & ,\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

3) Dacă se cunosc accelerația unui punct ce aparține rigidului în mișcare plan-paralelă, viteza unghiulară ω și accelerația unghiulară ε, se poate determina polul accelerațiilor J.



$$\overrightarrow{a_A} \quad , \quad \vec{\varepsilon} \quad , \quad \vec{\omega}$$

$$tg(\varphi) = \frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

$$JA = \frac{a_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}$$

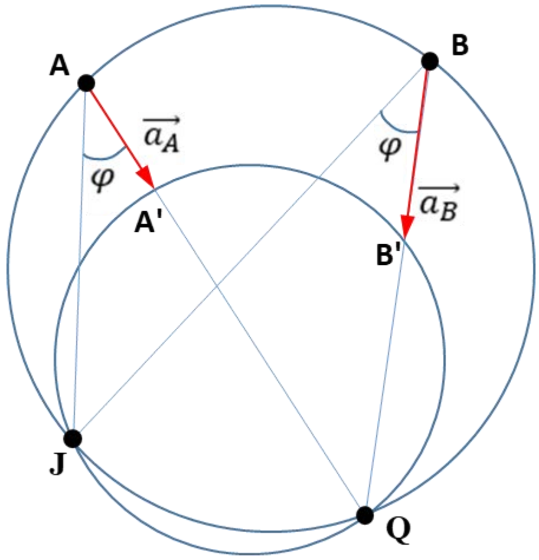
Aceasta proprietate stă la baza "metodei polului accelerațiilor", utilizată pentru determinarea accelerațiilor.

4) Dacă se cunosc accelerațiile a două puncte ce aparțin rigidului în mișcare plan-paralelă, se poate determina polul accelerațiilor (vezi figura alăturată).

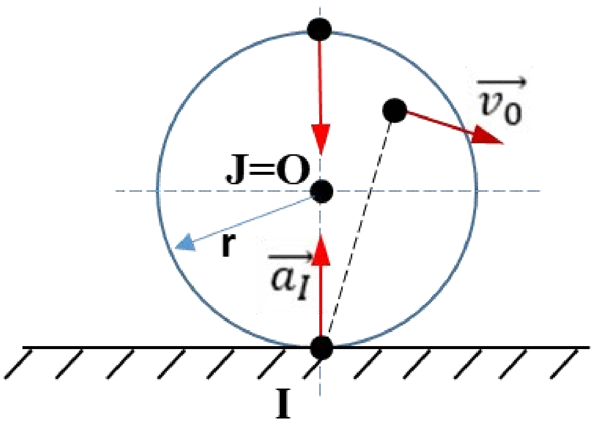
$$a_A = AA'$$

$$a_B = BB'$$

- Se prelungesc suporturile accelerațiilor până se intersectează în Q.
- Prin punctele A, B, Q se trasează un cerc, la fel prin punctele A', B', Q'.
- La intersecția celor două cercuri se află polul accelerațiilor *J*.



<u>Exemplu</u>



$$v_O = ct. \quad v_I = 0$$

$$a_O = 0 \quad a_I \neq 0$$

$$\omega = \frac{v_O}{r} = ct.$$

$$\varepsilon = 0$$

$$a_I = JI \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4} = r \cdot \omega^2$$

2.4 Mișcarea relativă

2.4.1 Mișcarea relativă a punctului material

Fie modelul de studiu pentru mișcarea punctului material A, prezentat în figura de mai jos. Se notează cu (T_1) – reperul fix $O_1X_1Y_1Z_1$, iar cu (T_2) – reperul mobil OXYZ.

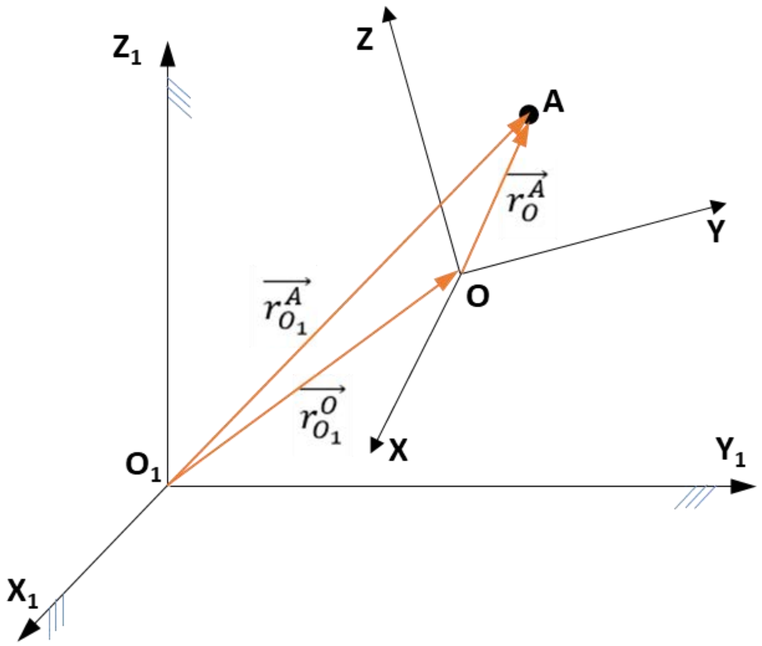


Fig. 2.22 Modelul de studiu în mișcarea relativă a punctului material

Se definește:

Mișcarea punctului material în raport cu reperul fix, precizată prin vectorul de poziție $\overrightarrow{r_{O_1}^A}$ reprezintă **<u>mișcarea absolută</u>** a punctului material.

Mișcarea punctului material în raport cu reperul mobil, precizată prin vectorul de poziție $\overrightarrow{r_O^A}$ reprezintă **<u>mișcarea relativă</u>** a punctului material.

Mișcarea reperului mobil față de reperul fix reprezintă **<u>mișcarea de transport</u>** a punctului material (mișcarea punctului material care este indisolubil legat de reperul mobil, față de reperul fix).

Din definițiile de mai sus se observă că mișcarea absolută rezultă din suprapunerea a două mișcări: mișcarea relativă și mișcarea de transport.

Poziția punctului material față de reperul fix se poate scrie:

$$\overrightarrow{r_{O_1}^A} = \overrightarrow{r_{O_1}^O} + \overrightarrow{r_O^A} \tag{2.14}$$

Relația (2.14) reprezintă **legea de mișcare a punctului material A în raport cu reperul fix prin intermediul reperului mobil**.

Viteza absolută a punctului material

Pentru obținerea vitezei se derivează legea de mișcare, ținând cont de regulile de derivare ale unui vector precizat prin proiecțiile sale față de un reper mobil:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \vec{u}$$

$$\dot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \dot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \frac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}$$

$$\overrightarrow{r_O^A} = \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{v_a^A} = \overrightarrow{v^O} + \overrightarrow{v_r^A} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} \quad | \quad \overrightarrow{v^O} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{v_t^A}$$

Dacă se consideră punctul A legat rigid de reperul fix, atunci viteza sa va fi viteza de transport.

$\overrightarrow{v_a^A} = \overrightarrow{v_t^A} + \overrightarrow{v_r^A}$, unde

$\overrightarrow{v_a^A} - viteza\ absolut$ă

$\overrightarrow{v_t^A} - viteza\ de\ transport$

$\overrightarrow{v_r^A} - viteza\ relativ$ă

$$\left|\overrightarrow{v_a^A}\right| = v_a^A = \sqrt{(v_t^A)^2 + (v_r^A)^2 + 2 \cdot v_t^A \cdot v_r^A \cdot \cos(v_t^A, v_r^A)}$$

Viteza absolută a punctului material se obține din compunerea vectorială a vitezei sale relative cu viteza de transport.

Accelerația absolută a punctului material

Accelerația absolută se obține prin derivarea succesivă (de două ori) a legii de mișcare a punctului material.

$$\dot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \dot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \frac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}$$

$$\ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t}\right) + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}\right)$$

$$= \ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t^2} + \vec{\omega} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{r_O^A} + \vec{\omega} \times \left(\frac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}\right)$$

$$\ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \frac{\partial^2 \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t^2} + \ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{r_O^A} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}\right) + 2\vec{\omega} \times \frac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t}$$

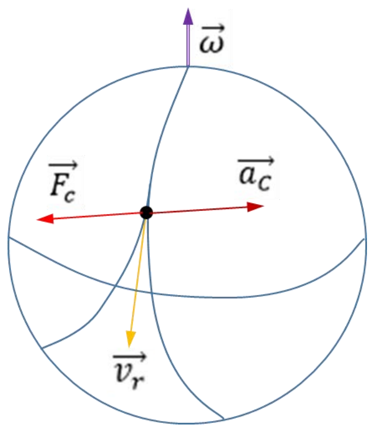
$$\text{Punctul material } A \begin{cases} \ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^A}} = \overrightarrow{a_a^A} & - \textit{accelerația absolută} \\ \dfrac{\partial^2 \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t^2} = \overrightarrow{a_r^A} & - \textit{accelerația relativă} \\ \ddot{\overrightarrow{r_{O_1}^O}} + \dot{\vec{\omega}} \times \overrightarrow{r_O^A} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}\right) = & \\ = \overrightarrow{a_O} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_O^A} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A}\right) = \dot{\overrightarrow{v_t^A}} = \overrightarrow{a_t^A} & - \textit{acc. de transport} \\ 2\vec{\omega} \times \dfrac{\partial \overrightarrow{r_O^A}}{\partial t} = 2\overrightarrow{\omega_t} \times \overrightarrow{v_r^A} = \overrightarrow{a_C^A} & - \textit{accelerația Coriolis} \end{cases}$$

În general se poate scrie relația: $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_c}$, reprezentând **legea compunerii accelerațiilor în mișcarea relativă.**

Observații:

1) Accelerația Coriolis (accelerația complementară) este un termen de cuplaj între mișcarea de transport și mișcarea relativă. Ea exprimă influența suprapusă a mișcării de rotație a sistemului de referință mobil și a mișcării relative asupra accelerației absolute.
2) Accelerația Coriolis apare în cazul în care reperul mobil efectuează o mișcare de rotație.

Exemplu: Pământul efectuează rotația diurnă în jurul axei sale.



Se pune problema dacă există situații în care accelerația Coriolis este nulă:

$\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega_t} \times \overrightarrow{v_r} = 0$

Răspunsul este afirmativ, în următoarele situații:

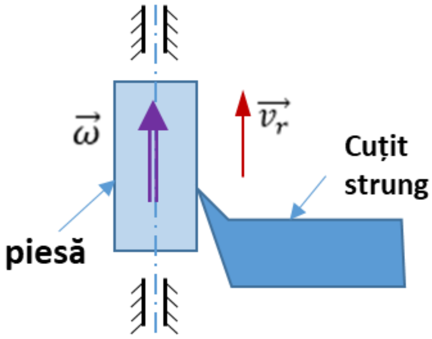
a) $\vec{\omega} = 0$ Reperul mobil execută o translație, caz în care $\overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_O}$;

b) $\overrightarrow{v_r} = 0$ Punctul A aparține unui rigid în mișcare generală

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_O} + \vec{\varepsilon} \times \overrightarrow{r_O^A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_O^A})\,;$$

c) $\vec{\omega} \parallel \overrightarrow{v_r}$ $\Rightarrow$ $\overrightarrow{a_c} = 0$.

Exemplu:



Aplicație 2.2:

Se consideră o placă în formă de semidisc prevăzut cu un canal periferic în care se introduce o bilă. Sistemul este antrenat de un mecanism patrulater (conform figurii de mai jos).

Se dă:

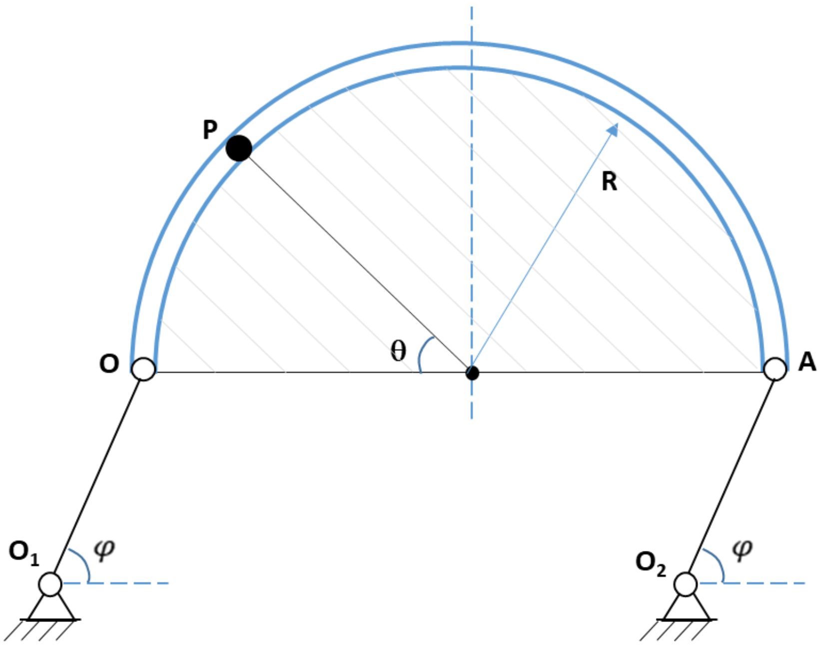
R = 0.18m

$O_1O = O_2A = 0.2$m

Bila, asimilată cu punctul material P, execută o mișcare circulară în canalul de rază R, cu legea de mișcare:

$OP = 0.06\,\pi\, t^2$

$\varphi = (\pi/6)\, t^2$ [rad]



Se cere:

a) să se studieze mișcarea punctului material P;
b) să se determine viteza punctului material P la momentul t = 1s;
c) să se determine accelerația punctului material P.

Soluție:

a) **Studiul mișcării punctului P:**

Punctului material P are o **mișcarea relativă** față de placa de rază R; aceasta este o mișcare circulară.

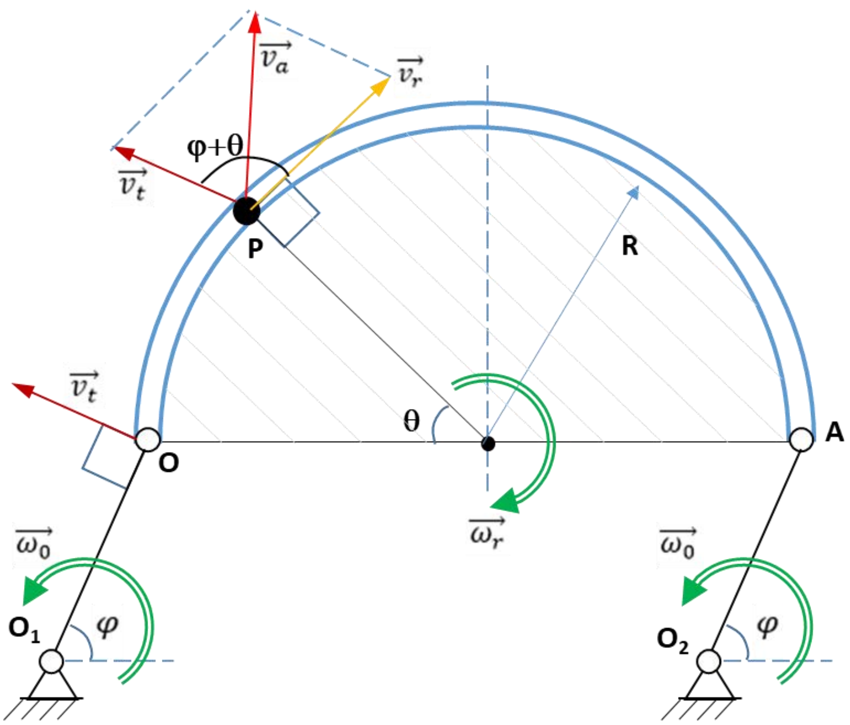
Parametrul mișcării este:

$$\theta = \frac{OP}{R} = \frac{0.06\pi t^2}{0.18} = \frac{\pi}{3} t^2 \ \ [rad]$$

Mișcarea plăcii de rază R, antrenată de mecanismul patrulater, reprezintă **mișcarea de transport**; este o mișcare de translație deoarece $O_1O = O_2A$ iar dreapta OA rămâne paralelă cu ea însăși pe tot timpul mișcării.

Mișcarea punctului P în raport cu sistemul de referință fix (de exemplu cel cu originea în articulația O_1) reprezintă **mișcarea absolută**.

b) Determinarea vitezei punctului material P



$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_t}$$

$$v_r = \omega_r \cdot R = \dot{\theta} \cdot R = \frac{2\pi}{3} t \cdot 0.18 = 0.12\pi t$$

v_t rezultă din mișcarea de translație a plăcii; toate punctele de pe placă au aceeași viteză.

$$\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_P} = \overrightarrow{v_O}$$

$$v_t = v_P = v_O = \omega_O \cdot O_1O = \dot{\varphi} \cdot O_1O = \frac{\pi}{3} \cdot t \cdot 0.2 = 0.066\pi t$$

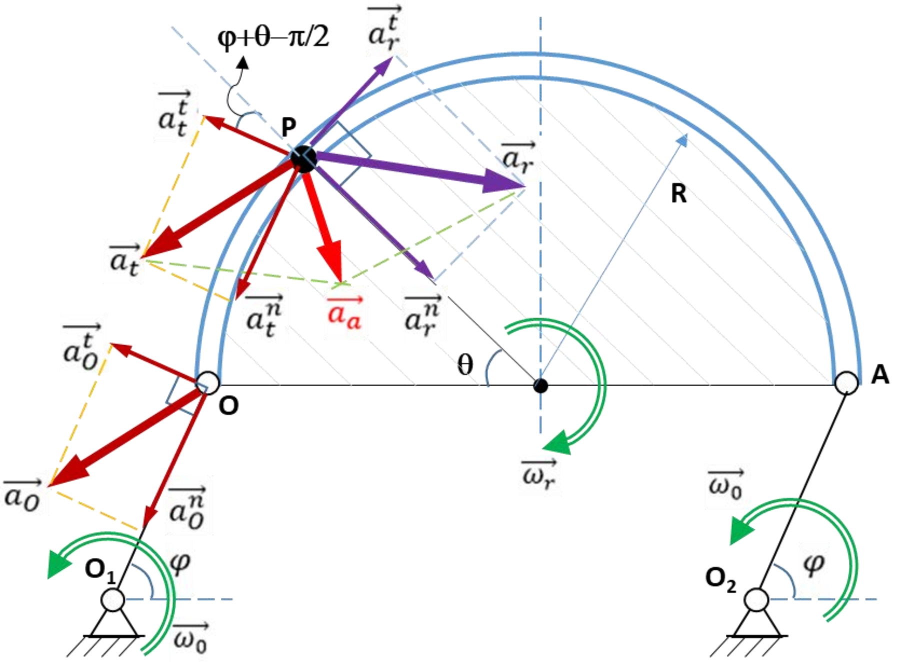
Prin compunerea vitezei relative $\overrightarrow{v_r}$ cu viteza de transport $\overrightarrow{v_t}$ rezultă viteza $\overrightarrow{v_a}$.

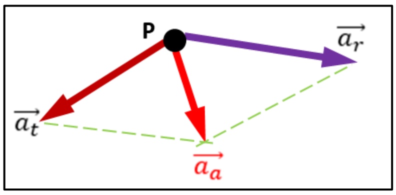
$v_r(t = 1s) = 0.12\pi \ \ m/s$ $\qquad$ $v_t(t = 1s) = 0.066\pi \ \ m/s$

$\theta(t = 1s) = \dfrac{\pi}{3}\, rad$ $\qquad$ $\varphi(t = 1s) = \dfrac{\pi}{6}\, rad$

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_t^2 + 2v_r v_t \cdot \cos(\varphi + \theta)} = \cdots$$

c) Determinarea accelerației punctului material P





$$a_r = \sqrt{(a_r^n)^2 + (a_r^t)^2}$$

Mișcarea de transport este o mișcare de translație:

$$\overrightarrow{a_t} = \overrightarrow{a_P} = \overrightarrow{a_O}$$

Punctul O are o mișcare de rotație în jurul lui O_1 (reperul fix):

$$\overrightarrow{a_O} = \overrightarrow{a_O^n} + \overrightarrow{a_O^t}$$

$$a_O^n = \omega_O^2 \cdot O_1O = \dot{\varphi}^2 \cdot O_1O = a_t^n$$

$$a_O^t = \dot{\omega}_O \cdot O_1O = \ddot{\varphi} \cdot O_1O = a_t^t$$

$$a_O = a_t = \sqrt{(a_t^n)^2 + (a_t^t)^2}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_t}}$$

$$a_a = \sqrt{(a_r)^2 + (a_t)^2 + 2a_r a_t \cdot \cos(a_r, a_t)}$$

3. Dinamica

3.1 Elemente introductive

Dinamica studiază mișcarea corpurilor (un corp redus la un punct material, un singur corp, mai multe corpuri sau sisteme de corpuri) **ținând cont de masele acestora și de forțele ce acționează asupra lor**.

În studiul dinamicii se întâlnesc trei tipuri de probleme:

- **Problemă directă**: se cunosc forțele ce acționează asupra corpurilor, caracteristicile geometrice, caracteristicile mecanice și starea mecanică (forma și dimensiunile, modul de repartizare a masei, poziția inițială, viteza inițială) și trebuie să se determine mișcarea (poziția, viteza și accelerația la un moment dat).
- **Problemă inversă**: se cunosc mișcarea, caracteristicile mecanice și cele geometrice și trebuie să se determine forțele și momentele ce acționează asupra corpurilor.
- **Problemă mixtă**: se cunosc o parte din forțe, anumiți parametri cinematici, caracteristici geometrice și mecanice și trebuie să se determine forțele și parametrii care nu se cunosc.

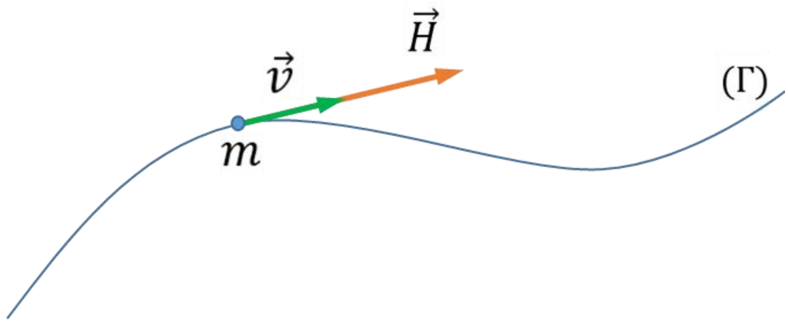
Problemele de dinamică se rezolvă prin însușirea noțiunilor fundamentale prezentate în continuare.

3.2 Noțiuni fundamentale în dinamică

3.2.1 Impulsul

Definiție: Impulsul $\vec{H}$ al unui punct material de masă m care se mișcă cu viteza $\vec{v}$ este dat de relația:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}$$



Vectorul impuls are aceeași direcție și același sens cu vectorul viteză.

Fig. 3.1 Impulsul unui punct material

Componentele vectorului impuls $\vec{H}$ față de un sistem de referință ortogonal sunt:

$$\begin{cases} H_x = m \cdot v_x \\ H_y = m \cdot v_y \\ H_z = m \cdot v_z \end{cases} ; \qquad \text{în scriere matriceală: } \{H\} = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = m \cdot \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{Bmatrix}$$

Pentru un sistem de puncte materiale, impulsul sistemului se definește ca suma impulsurilor tuturor punctelor care alcătuiesc sistemul:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} \vec{H}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i$$

Relația se mai poate scrie astfel:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{r}_i = \frac{d}{dt}(M \cdot \vec{r}_c) = M \cdot \frac{d\vec{r}_c}{dt} = M \cdot \vec{v}_c$$

$$\boxed{\vec{H} = M \cdot \vec{v}_c}$$

unde:

M este masa sistemului de puncte materiale;

$\vec{r}_c$ este vectorul de poziție al centrului de masă al sistemului;

$\vec{v}_c$ este viteza centrului de masă al sistemului.

Impulsul unui sistem de puncte materiale este egal cu impulsul unui punct material de masă M egală cu masa sistemului și concentrată în centrul său de masă.

3.2.2 Momentul cinetic

Definiție: Momentul cinetic al unui punct material de masă m și viteză $\vec{v}$ în raport cu un punct O este egal cu momentul impulsului.

$$\vec{K}_O = \vec{r} \times \vec{H} = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$$

Din definiție rezultă că momentul cinetic este o mărime vectorială care se definește în raport cu un punct al spațiului (este un vector legat).

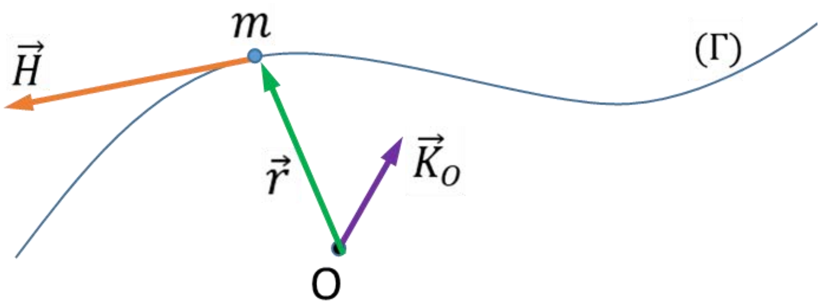


Fig. 3.2 Momentul cinetic al punctului material

Componentele vectorului moment cinetic sunt determinate după cum urmează:

$$\overrightarrow{K_O} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix}$$
$$= \left(ymv_z - zmv_y\right) \cdot \vec{\imath} + (zmv_x - xmv_z) \cdot \vec{\jmath} + \left(xmv_y - ymv_x\right) \cdot \vec{k}$$

$$\{K_O\} = \begin{Bmatrix} K_{Ox} \\ K_{Oy} \\ K_{Oz} \end{Bmatrix} = m \cdot \begin{Bmatrix} yv_z - zv_y \\ zv_x - xv_z \\ xv_y - yv_x \end{Bmatrix}$$

$$\{K_O\} = [r] \cdot [H] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} mv_x \\ mv_y \\ mv_z \end{Bmatrix}$$

Pentru un sistem de puncte materiale, momentul cinetic al sistemului se definește ca suma momentelor cinetice ale particulelor care alcătuiesc sistemul.

$$\vec{K}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{K}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times \vec{H}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i$$

3.2.3 Lucrul mecanic

a) Lucrul mecanic elementar

Fie un punct material obligat să se deplaseze pe o curbă (Γ), asupra căruia acționează o forță $\vec{F}$. Se consideră $d\vec{r}$ deplasarea elementară a punctului material.

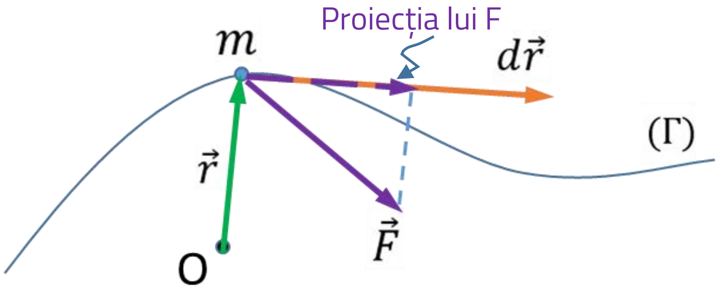


Fig. 3.3 Lucrul mecanic elementar

Definiție: Lucrul mecanic elementar al forței $\vec{F}$ efectuat pentru deplasarea corpului cu $d\vec{r}$ reprezintă capacitatea forței $\vec{F}$ de a produce mișcare și este definit ca produsul scalar:

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$dL = F \cdot dr \cdot \cos(\vec{F}, d\vec{r})$$

Pe baza definiției produsului scalar rezultă următoarea definiție:

Definiție: Lucrul mecanic elementar este egal cu produsul dintre mărimea deplasării elementare dr și proiecția forței $\vec{F}$ pe direcția deplasării

sau

produsul dintre mărimea forței F și proiecția deplasării $d\vec{r}$ pe direcția forței.

Lucrul mecanic poate fi:

- pozitiv (motor), când forța pune în mișcare o mașină sau un mecanism;
- negativ (rezistent), când forța contribuie la oprirea mașinii sau a mecanismului;
- nul, dacă forța este perpendiculară pe direcția mișcării.

Observații:

- Dacă asupra punctului material acționează mai multe forțe $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ provocând o deplasare $d\vec{r}$, atunci suma lucrurilor mecanice ale fiecărei forțe este egală cu lucrul mecanic al rezultantei.

$$dL = \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + .. + \vec{F}_n\right) \cdot d\vec{r} = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} + .. + \vec{F}_n \cdot d\vec{r} = dL_1 + dL_2 + .. + dL_n$$

- Dacă deplasarea $d\vec{r}$ este suma vectorială a mai multor deplasări $d\vec{r_1}, \dots d\vec{r_n}$, atunci lucrul mecanic corespunzător deplasării $d\vec{r}$ este egal cu suma lucrurilor mecanice elementare corespunzătoare deplasărilor $d\vec{r_i}$.

$$dL = \vec{F}\cdot(d\vec{r}_1 + d\vec{r}_2 + .. + d\vec{r}_n) = \vec{F}\cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}\cdot d\vec{r}_2 + .. + \vec{F}\cdot d\vec{r}_n = dL_1 + dL_2 + .. + dL_n$$

- Cunoscând relația $d\vec{r} = \vec{v}\cdot dt$, lucrul mecanic elementar mai poate fi scris și astfel:

$$dL = \vec{F}\cdot\vec{v}\cdot dt$$

- Considerând componentele vectorilor $\vec{F}$ și $d\vec{r}$:

$$d\vec{r} = dx\cdot\vec{i} + dy\cdot\vec{j} + dz\cdot\vec{k}$$
$$\vec{F} = X\cdot\vec{i} + Y\cdot\vec{j} + Z\cdot\vec{k}$$

rezultă expresia analitică a lucrului mecanic:

$$dL = X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz, \text{ sau } dL = (X\cdot\dot{x} + Y\cdot\dot{y} + Z\cdot\dot{z})\cdot dt.$$

b) Lucrul mecanic total (finit)

Fie un punct material ce se deplasează pe o curba (Γ) din spațiu sub acțiunea forței $\vec{F}$.

Definiție: Lucrul mecanic total L_{AB} efectuat pentru a deplasa corpul (asimilat punctului material) din poziția A în poziția B reprezintă suma lucrurilor mecanice elementare efectuate pe parcursul deplasării.

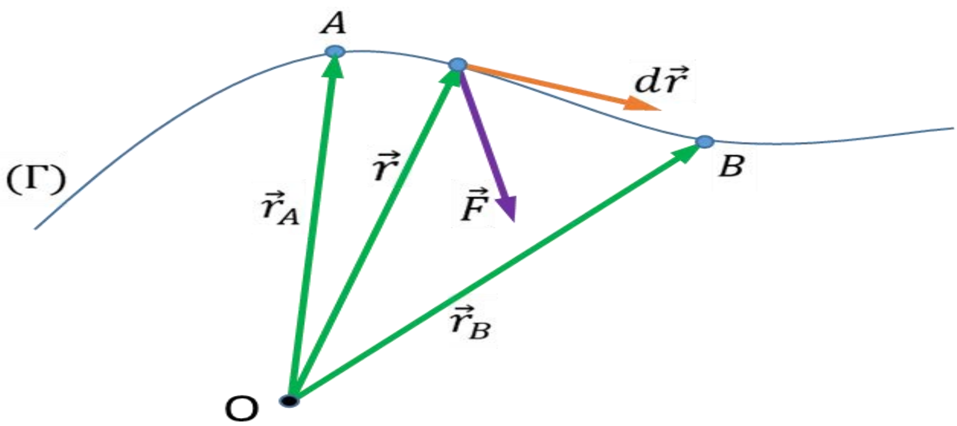


Fig. 3.4 Lucrul mecanic total

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B (X\cdot dx + Y\cdot dy + Z\cdot dz)$$

Lucrul mecanic total este determinat ca integrală curbilinie, calculată pe traiectoria pe care se deplasează punctul material.

Lucrul mecanic total va depinde atât de forța $\vec{F}$, cât și de arcul de curbă AB, respectiv de modul în care aceast arc de curbă este parcurs.

Dacă se cunosc dependențele de timp ale coordonatelor punctului material în timpul deplasării, forța va deveni o funcție de timp, iar integrala curbilinie se va reduce la o integrală simplă, de variabilă *t*.

Observație: Dacă forța depinde numai de poziția punctului material, atunci lucrul mecanic va depinde numai de traiectorie, fără însă a fi influențat de modul în care aceasta este parcursă.

c) Diagrama lucrului mecanic

Dacă se consideră o mașină/ echipament care dezvoltă forța $\vec{F}$, iar deplasarea elementului activ al mașinii este x, se poate reprezenta variația $F = F(x)$.

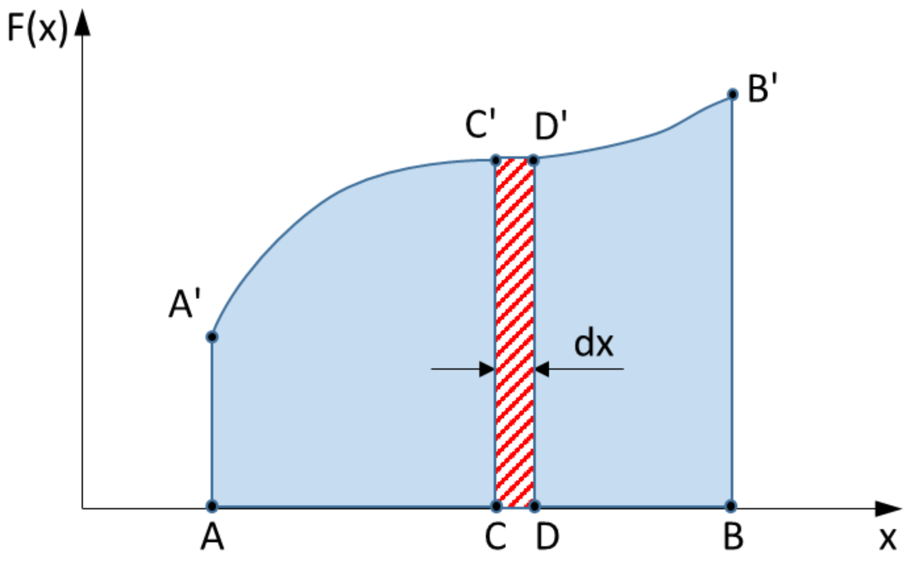


Fig. 3.5 Reprezentarea lucrului mecanic total

Lucrul mecanic elementar, la o deplasare dx este:

$$dL = F \cdot dx$$

Lucrul mecanic total, la o deplasare între două puncte A și B va fi:

$$L_{AB} = \int_A^B F(x)\, dx$$

Lucrul mecanic este egal cu aria suprafeței de sub curba A'B' (aria suprafeței AA'B'B).

3.2.4 Energia mecanică

a) Energia cinetică (de mișcare)

Definiție: Energia cinetică a unui punct material de masă m și viteză v este:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Energia cinetică este o **mărime scalară de stare** – se definește la un moment de timp t.

Pentru un sistem de puncte materiale, energia cinetică a sistemului se definește ca energia cinetică a tuturor punctelor materiale care îl formează:

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + .. + E_{cn} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

b) Energia potențială (de poziție)

Fie o forță derivată dintr-o funcție de forță *U(x,y,z)*. Lucrul mecanic necesar pentru a deplasa punctul material din poziția $A_O(x_O,y_O,Z_O)$ în poziția *A(x,y,z)* este:

$$L_{A_OA} = U(x,y,z) - U(x_O,y_O,z_O)$$

Definiție: Energia potențială este energia punctului material dependentă numai de poziția sa. Ea reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru aducerea punctului material dintr-o poziție oarecare într-o poziție de energie potențială nulă:

$$E_p = \int_A^{A_O} dL = \int_A^{A_O} dU = U_{A_O} - U_A = U(x_O,y_O,z_O) - U(x,y,z) = -L_{A_OA}$$

Energia potențială reprezintă lucrul mecanic efectuat pentru aducerea punctului material din A_O în A, luat cu semn schimbat.

Dacă se alege $U(x_O,y_O,z_O) = 0$, rezultă că $E_p = -U(x,y,z) = -U$.

Pentru un sistem de puncte materiale, energia potențială a sistemului este egală cu suma energiilor potențiale ale componentelor sistemului.

c) Energia mecanică

Definiție: Energia mecanică este suma dintre energia cinetică și energia potențială a unui punct material sau sistem de puncte materiale.

$$E_m = E_c + E_p$$

3.2.5 Puterea mecanică

Definiție: Puterea este lucrul mecanic produs în unitatea de timp:

$P = \frac{dL}{dt}$ $\qquad$ $[1\,W] = \frac{[1\,J]}{[1s]}$ $\qquad$ W – Watt
J - Joule
s – secundă

Dacă forța și/ sau momentul care produce lucrul mecanic sunt constante, atunci:

$$P = \frac{L}{t}$$

$$dL = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$P = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

cu componentele:

$$P = F \cdot v \cdot \cos(\vec{F}, \vec{v}) = X \cdot v_x + Y \cdot v_y + Z \cdot v_z$$

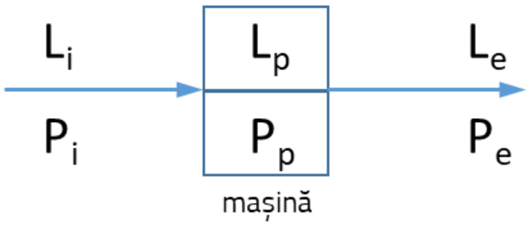
Dacă lucrul mecanic este dat de un cuplu:

$$dL = \vec{M} \cdot d\vec{\theta}$$

$$P = \vec{M} \cdot \frac{d\vec{\theta}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$$

3.2.6 Randamentul mecanic

Definiție: Randamentul este mărimea prin care se apreciază eficacitatea unei mașini (motor, instalație etc.).



L_i / P_i – Lucrul mecanic / Puterea de intrare

L_e / P_e – Lucrul mecanic / Puterea de ieșire

L_p / P_p – Lucrul mecanic / Puterea pierdută

Randamentul este dat de relația:

$$\eta = \frac{L_e}{L_i} = \frac{P_e}{P_i} < 1$$

$$\eta = 1 - \frac{L_p}{L_i} = 1 - \varphi$$

$$\eta = 1 - \frac{P_p}{P_i} = 1 - \varphi$$

unde:

$$L_e = L_i - L_p$$

$$P_e = P_i - P_p$$

φ este coeficientul pierderilor.

Comentariu: din totalul lucrului mecanic produs de o mașină, numit **lucrul mecanic motor** sau **consumat** L_c (identic cu L_i), doar o parte, **lucrul mecanic util** L_u, va fi folosit pentru obținerea efectului propus (același cu L_e). O altă parte, **lucrul mecanic rezistent** L_r (același cu L_p) se va utiliza pentru învingerea diferitor rezistențe și frecări.

$$L_c = L_u - L_r$$

În acest context, randamentul mecanic al unei mașini este raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic consumat:

$$\eta = 1 - \frac{L_r}{L_c} < 1$$

3.3 Teoreme fundamentale în dinamică

3.3.1 Teorema de variație a energiei cinetice

Pentru un punct material

Fie un punct material care se deplasează din punctul A în punctul B, iar $\vec{F}$ – rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material.

Se poate scrie:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad \backslash \cdot d\vec{r}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$m \cdot d\vec{v} \cdot \vec{v} = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$d\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \Leftrightarrow$$

$$dE_c = dL \quad (3.1)$$

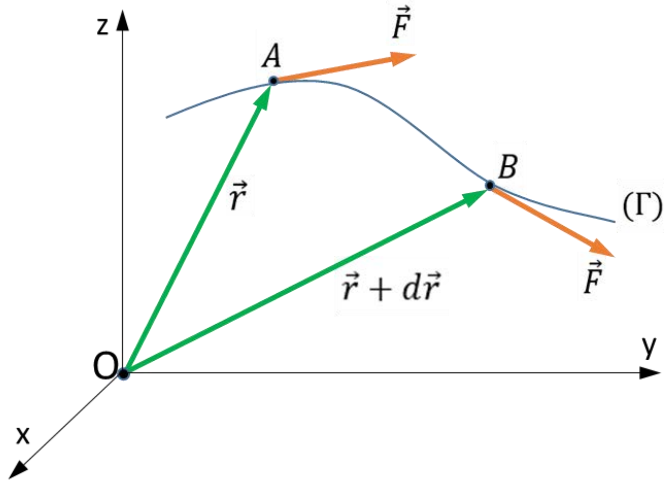


Fig. 3.6 Variația energiei cinetice a punctului material

Relația (3.1) exprimă, din punct de vedere matematic, **teorema de variație a energiei cinetice a punctului material, sub formă diferențială**.

Enunț: Variația energiei cinetice a unui punct material într-un interval de timp elementar *dt* este egală cu lucrul mecanic elementar al rezultantei forțelor ce acționează asupra punctului material în același interval de timp elementar ca și cum punctul material ar fi liber.

Dacă deplasarea punctului material are loc pe un interval finit AB într-un timp finit Δt, prin integrarea relației (3.1) se obține:

$$\int_A^B dE_c = \int_A^B dL \quad \Rightarrow \quad E_B - E_A = L_{BA} = L_{AB} \quad (3.2)$$

Relația (3.2) exprimă **variația energiei cinetice sub formă finită**.

Enunț: Variația energiei cinetice a punctului material într-un interval de timp Δt finit este egală cu lucrul mecanic efectuat de rezultanta forțelor în același interval de timp finit și corespunzător deplasării finite.

Pentru un sistem de puncte materiale

Fie un sistem de puncte materiale (**1**, **2**, **3**, **4**) asupra cărora acționează forțe externe ($\vec{F}_1,\ \vec{F}_2,\ \vec{F}_3,\ \vec{F}_4$) și forțe interne ($\vec{F}_{12} \div \vec{F}_{43}$).

Se poate scrie:

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14}$$
$$m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{F}_{24}$$
$$m_3 \cdot \vec{a}_3 = \vec{F}_3 + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{34}$$
$$m_4 \cdot \vec{a}_4 = \vec{F}_4 + \vec{F}_{41} + \vec{F}_{42} + \vec{F}_{43}$$
$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$$

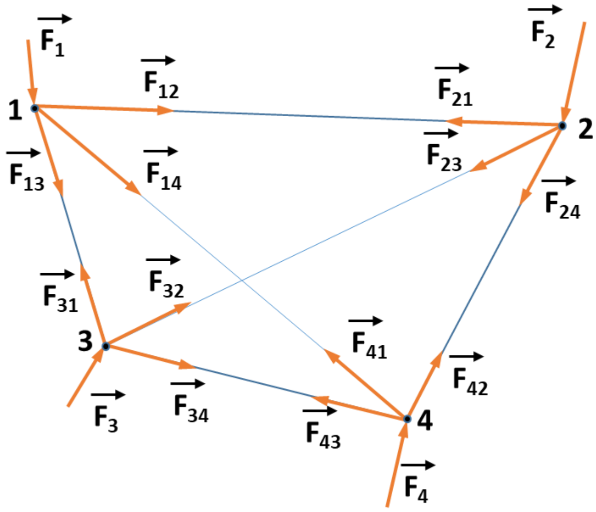


Fig. 3.7 Variația energiei cinetice pentru un sistem de puncte materiale

$$\sum m_i \cdot \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i + \sum \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij}$$

$$\sum m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \sum \vec{F}_i + \sum \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \mid \cdot\, d\vec{r}_i$$

$$\sum m_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot d\vec{v}_i = \sum \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i + \sum \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i$$

$$d \sum \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = dL^{ext} + dL^{int}$$

$$\boxed{dE_c = dL^{ext} + dL^{int}} \qquad (3.3)$$

Relația (3.3) reprezintă teorema de variație a energiei cinetice sub formă diferențială, pentru un sistem **deformabil** de puncte materiale.

Dacă sistemul este **nedeformabil (rigid)**,

$dL^{int} = 0$, prin urmare rezultă $\boxed{dE_c = dL^{ext}} \qquad (3.4)$

Relația (3.4) reprezintă **teorema de variație a energiei cinetice sub formă diferențială, pentru un rigid**.

Din relațiile (3.3) și (3.4), dacă deplasarea are loc pe un interval finit AB, rezultă **teorema de variație a energiei cinetice sub formă finită**:

pentru sistemul deformabil:

$$E_B - E_A = L_{AB}^{ext} + L_{AB}^{int}$$

pentru sistemul rigid:

$$E_B - E_A = L_{AB}^{ext}$$

3.3.2 Teorema impulsului

- **Pentru un punct material:**

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

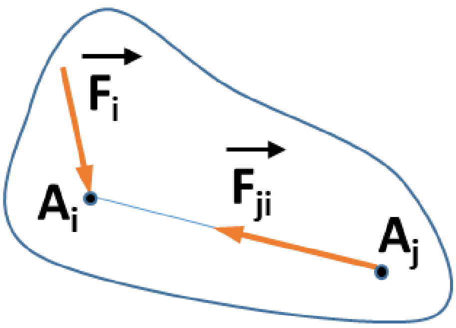
$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d\vec{H}}{dt} = \vec{F} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{H}} = \vec{F}} \qquad (3.5)$$

Relația (3.5) reprezintă teorema impulsului.

Enunț: Derivata impulsului în raport cu timpul este egală, în fiecare moment, cu rezultanta forțelor ce acționează asupra punctului material.

Observație: Rezultanta forțelor are în vedere atât forțele externe cât și forțele de legătură.

- **Pentru un sistem de puncte materiale:**



F_i – forță externă (dată/ activă)

F_{ji} – forță internă (de legătură)

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

$$m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

$$\frac{d}{dt}(m_i\vec{v}_i) = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{H}_i = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{H}}_i = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \sum \dot{\vec{H}}_i = \sum \vec{F}_i + \sum \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} \\ \sum \dot{\vec{H}}_i = \dot{\vec{H}} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{H}} = \sum \vec{F}_i + \sum \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}}$$

Dacă sistemul de puncte materiale este nedeformabil (rigid), se pot scrie relațiile:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \Rightarrow \quad \sum\sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} = 0$$

$$\boxed{\dot{\vec{H}} = \sum \vec{F}_i = \vec{R}} \qquad (3.6)$$

Enunț: Derivata în raport cu timpul a impulsului total al unui sistem de puncte materiale în fiecare moment este egală cu rezultanta forțelor externe și a forțelor de legătură.

Observație 1: Impulsul total al unui sistem de puncte materiale este:

$$\vec{H} = m \cdot \vec{v}_c \quad , \quad \dot{\vec{H}} = m \cdot \vec{a}_c$$

unde $\vec{v}_c$ și $\vec{a}_c$ reprezintă viteza, respectiv accelerația centrului de masă,

iar **teorema de mișcare a centrului de masă** se poate scrie:

$$m \cdot \vec{a}_c = \sum \vec{F}_i = \vec{R}$$

Enunț: Mișcarea centrului de masă al unui sistem de puncte materiale este ca și cum în el este concentrată întreaga masă a sistemului și asupra lui acționează rezultanta forțelor externe și a forțelor de legătură.

Observație 2: Dacă rezultanta forțelor externe (date/ active) și a forțelor de legătură este nulă, atunci impulsul se conservă.

$$\sum \vec{F}_i = \vec{R} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{H}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{H}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{H} = \vec{C}$$

3.3.3 Teorema momentului cinetic

- **Pentru un punct material**:

$$m \cdot \vec{a} = \vec{F}$$

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \quad | \ \vec{r} \times$$

$$\vec{r} \times m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m \cdot \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\vec{K}_O = \vec{M}_O$$

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O} \qquad (3.7)$$

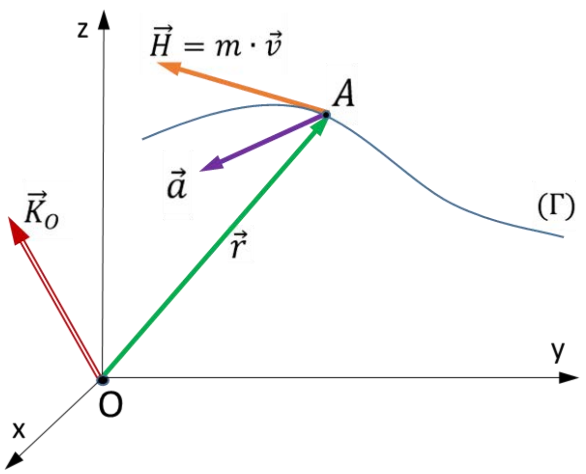


Fig. 3.8 Variația momentului cinetic pentru un punct material

unde:

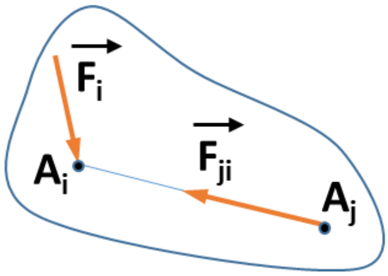
$\vec{K}_O$ - momentul cinetic în raport cu polul O

$\vec{M}_O$ - momentul rezultant al forțelor în raport cu polul O

Relația (3.7) reprezintă **teorema momentului cinetic.**

Enunț: Derivata momentului cinetic al unui punct material în raport cu timpul, moment cinetic calculat față de polul O, este egală cu momentul rezultant al forțelor ce acționează asupra punctului material, față de același pol O.

- **Pentru un sistem de puncte materiale**:



F_i – forță externă (dată/ activă)

F_{ji} – forță internă (de legătură)

$$m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} \qquad \backslash \vec{r}_i \times$$

$$\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

$$\vec{r}_i \times m_i \cdot \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

Ținând cont de faptul că $\vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i = \vec{K}_{Oi}$, rezultă

$$\dot{\vec{K}}_{Oi} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji}$$

$$\sum \dot{\vec{K}}_{Oi} = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i) + \sum \left(\vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji} \right)$$

Se notează:

Derivata momentului cinetic al sistemului de puncte materiale: $\dot{\vec{K}}_O = \sum \dot{\vec{K}}_{Oi}$

Momentul forțelor externe (date/ active) față de polul O: $\vec{M}_O^{ext} = \sum (\vec{r}_i \times \vec{F}_i)$

Momentul forțelor interne (de legătură) față de polul O: $\vec{M}_O^{int} = \sum (\vec{r}_i \times \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ji})$

$$\boxed{\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O^{ext} + \vec{M}_O^{int}} \qquad (3.8)$$

Relația (3.8) reprezintă **teorema momentului cinetic pentru un sistem deformabil**.

Enunț: Derivata momentului cinetic în raport cu timpul, moment cinetic calculat față de polul O, este egală cu momentul rezultant al forțelor externe (date) și al forțelor interne (de legătură) ce acționează asupra sistemului de puncte materiale, momente calculate față de același pol O.

Considerând sistemul nedeformabil (rigid):

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_O^{int} = 0$$

$$\sum \dot{\vec{K}}_{Oi} = \sum \left(\vec{r}_i \times \vec{F}_i\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O} \qquad (3.9)$$

Relația (3.9) reprezintă **teorema momentului cinetic pentru un sistem nedeformabil (rigid)**.

Comentariu: Teorema impulsului, reunită cu teorema momentului cinetic, definesc **teorema torsorului impulsului**.

Se consideră torsorul impulsului:

$$T_{(\vec{H}_i)} = \begin{Bmatrix} \vec{H} = \sum \vec{H}_i \\ \vec{K}_O = \sum \vec{r}_i \times \vec{H}_i \end{Bmatrix}$$

Teorema torsorului impulsului se exprimă: $\begin{Bmatrix} \dot{\vec{H}} = \vec{R} \\ \dot{\vec{K}}_O = \vec{M}_O \end{Bmatrix}$

Considerând torsorul sistemului de forțe (din Statică): $T_{(\vec{F}_i)} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}$

se poate scrie:

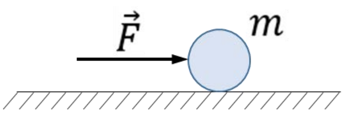
$$\frac{d}{dt}\left[T_{(\vec{H}_i)}\right] = T_{(\vec{F}_i)} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}$$

Enunț: Derivata torsorului impulsului în raport cu timpul, torsor determinat față de polul O, este egal cu torsorul sistemului de forțe ce acționează asupra sistemului material, torsor determinat față de același pol O.

3.3.4 Principiul lui D'Alembert. Metoda cinetostatică

- **Forța de inerție**

Fie un punct material de masă *m* asupra căruia acționează un alt corp cu forța $\vec{F}$.



Principiul al II-lea al lui Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

Conform principiului acțiunii și reacțiunii, punctul material răspunde cu o forță egală și de sens opus $(-m \cdot \vec{a})$, care reprezintă forța de inerție $\vec{F}_i$.

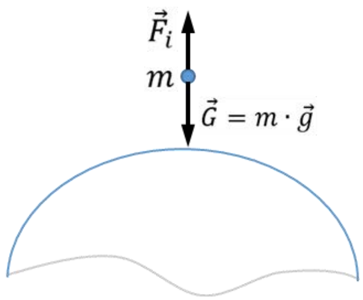
$$\vec{F} + (-m \cdot \vec{a}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{F} + \vec{F}_i = 0$$

Corpul care acționează asupra punctului material cu forța $\vec{F}$ se numește **agent activ (accelerant).**

Punctul material asupra căruia acționează forța $\vec{F}$ se numește **agent pasiv (accelerat).**

Forța de inerție acționează asupra agentului accelerant!

Demonstrație:



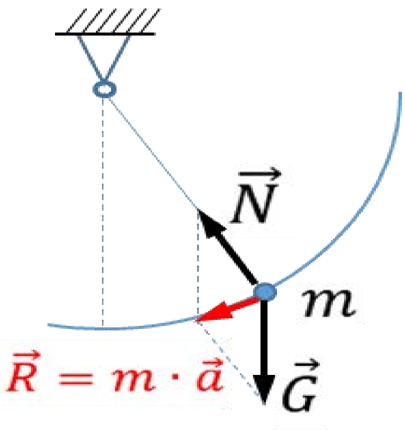
$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$
$$\vec{F}_i = -m \cdot \vec{g}$$

Dacă forța $\vec{F}_i$ ar acționa asupra corpului de masă *m*, ar trebui ca acesta să se afle în repaos sau în mișcare rectilinie și uniformă. În realitate, respectivul corp este în mișcare accelerată.

Rezultă că forța $\vec{F}_i$ acționează asupra agentului accelerant (în acest caz – Pamântul).

În rezolvarea problemelor de dinamică, $\vec{F}_i$ **se introduce fictiv asupra agentului accelerat**.

Exemplu:



$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{G}$$

Dacă asupra corpului de masă *m* ar fi acționat $\vec{F}_i$, acesta ar fi efectuat o mișcare rectilinie și uniformă.

Se cunoaște însă că mișcarea sa este circulară.

Rezultă că $\vec{F}_i$ acționează asupra agentului accelerant (Pământul) prin intermediul firului.

Definiție: **Forța de inerție** este o consecință a proprietăților inerte ale materiei și apare ori de câte ori un corp este accelerat sau decelerat. Ea reprezintă reacțiunea corpului accelerat asupra agentului accelerant.

Torsorul forțelor de inerție

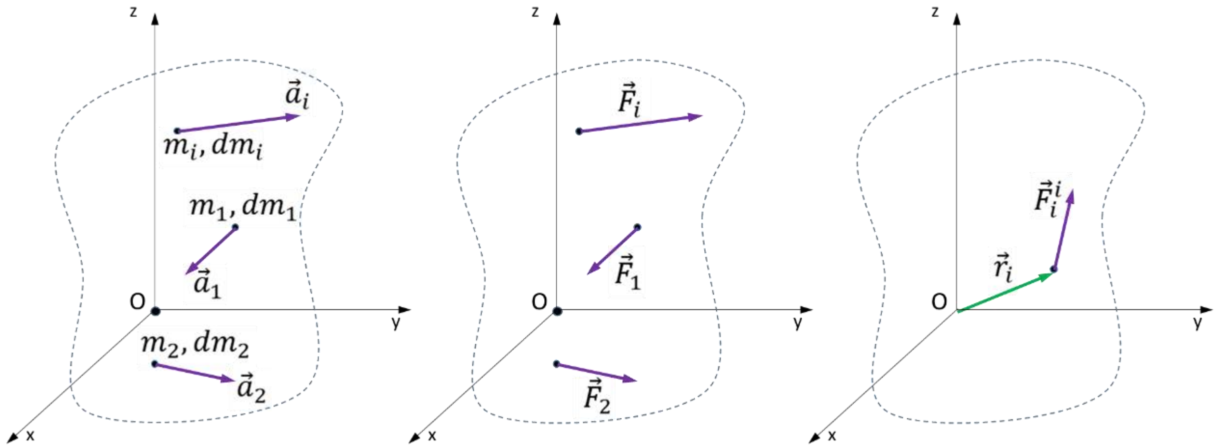


Fig. 3.9 Torsorul forțelor de inerție

Se definește sistemul forțelor de inerție $\{\vec{F}_i^i\}$, Fig. 3.9.

Torsorul forțelor de inerție se poate scrie:

$$\mathcal{T}_{O\left(\vec{F}_i^i\right)} = \begin{cases} \vec{R}^i = \sum_i \vec{F}_i^i = \sum_i (-m_i \cdot \vec{a}_i) = -\sum_i m_i \cdot \vec{a}_i = -\frac{d}{dt}\sum_i m_i \cdot \vec{v}_i = -\frac{d}{dt} m \cdot \vec{v}_C = -m \cdot \vec{a}_C \\ \vec{M}_O^i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i = -\sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_i = -\frac{d}{dt}\left(\sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{v}_i\right) = -\frac{d}{dt}\sum_i \vec{K}_{Oi} = -\frac{d}{dt}\vec{K}_O \end{cases}$$

$$\mathcal{T}_{O\left(\vec{F}_i^i\right)} = \begin{cases} \vec{R}^i = -\frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}_C) = -\frac{d}{dt}\vec{H} = -\dot{\vec{H}} \\ \vec{M}_O^i = -\frac{d}{dt}\vec{K}_O = -\dot{\vec{K}}_O \end{cases}$$

1) Rezultanta forțelor de inerție reprezintă derivata impulsului, luată cu semnul „minus”.
2) Momentul rezultant al forțelor de inerție reprezintă derivata momentului cinetic, luată cu semnul „minus”, moment cinetic calculat în raport cu același pol față de care se efectuează reducerea sistemului de forțe de inerție.
3) Toate problemele studiate în cazul torsorului unui sistem de forțe oarecare (vezi cursul de „Mecanică I. Statică”), respectiv:
   - cazul de reducere,
   - axa centrală,
   - reducerea sistemului de forțe particulare,

sunt valabile și în cazul sistemului de forțe de inerție.

Din 1) si 2) rezultă că torsorul forțelor de inerție se determină cunoscând torsorul impulsurilor (care se derivează și se consideră cu semnul „minus”):

$$T_{(\vec{H}_i)}; \qquad -\frac{d}{dt}T_{(\vec{H}_i)} = T_{O\left(\vec{F}_i^i\right)} = \begin{cases} \vec{R}^i = -m \cdot \vec{a}_C \\ \vec{M}_O^i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^i = -\sum_i \vec{r}_i \times m_i \cdot \vec{a}_i \end{cases}$$

Metoda cinetostatică

Fie un punct material liber, acționat de un sistem de forțe cu rezultanta $\vec{R} = m \cdot \vec{a}$.

Se poate scrie:

$$\vec{R} + (-m \cdot \vec{a}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \vec{R} + \vec{F}^i = 0 \tag{3.10}$$

Dacă punctul material este supus la legături, relația de mai sus devine:

$$\vec{R} + \vec{R}_l + \vec{R}_i = 0 \tag{3.11}$$

unde: $\vec{R}_l$ este rezultanta forțelor de legătură și $\vec{R}_i$ este rezultanta forțelor de inerție.

În tot timpul mișcării punctului material, rezultanta forțelor date (active), a forțelor de legătură și a forțelor de inerție se găsesc în **echilibru dinamic fictiv** (rezultanta forțelor de inerție este introdusă fictiv asupra punctului material).

Pentru un rigid se consideră:

$T_{O(\vec{F}_i)} = \begin{Bmatrix} \vec{R} \\ \vec{M}_O \end{Bmatrix}$ - torsorul forțelor date

$T_{O\left(\vec{F}_i^l\right)} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_l \\ \vec{M}_O^l \end{Bmatrix}$ - torsorul forțelor de legătură

$T_{O\left(\vec{F}_i^i\right)} = \begin{Bmatrix} \vec{R}_i \\ \vec{M}_O^i \end{Bmatrix}$ - torsorul forțelor de inerție

Echilibrul este realizat dacă:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{R}_l + \vec{R}_i = 0 \\ \vec{M}_O + \vec{M}_O^l + \vec{M}_O^i = 0 \end{cases} \tag{3.12}$$

Relația (3.12) exprimă **principiul lui D’Alembert** și reprezintă echilibrul dinamic fictiv pentru un rigid.

Enunț: În tot timpul mișcării unui rigid, torsorul forțelor date (active), torsorul forțelor de legătură și torsorul forțelor de inerție se găsesc în echilibru dinamic fictiv, torsorul forțelor de inerție fiind introdus fictiv asupra rigidului.

Proiectând relația (3.12) pe axele sistemului de coordonate, se obțin condițiile de echilibru dinamic fictiv pe cele trei axe:

$$\begin{cases} X + X_l + X_i = 0 \\ Y + Y_l + Y_i = 0 \\ Z + Z_l + Z_i = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} M_{Ox} + M_{Ox}^l + M_{Ox}^i = 0 \\ M_{Oy} + M_{Oy}^l + M_{Oy}^i = 0 \\ M_{Oz} + M_{Oz}^l + M_{Oz}^i = 0 \end{cases} \tag{3.13}$$

Relațiile (3.12) și (3.13) stau la baza metodei cinetostatice.

Metoda cinetostatică rezolvă următoarele probleme:

- determinarea legii de mișcare,
- determinarea reacțiunilor,
- studiul repaosului relativ.

Metoda cinetostatică reduce o problemă de dinamică la o problemă de cinematică (este necesară determinarea vitezelor și accelerațiilor) și la o problemă de statică (este necesară scrierea ecuațiilor de echilibru dinamic fictiv).

Etapele de aplicare a metodei cinetostatice sunt următoarele:

1) se efectuează analiza cinematică;
2) se separă corpurile, introducându-se asupra fiecăruia dintre ele torsorul forțelor date, al forțelor de legătură și al forțelor de inerție;
3) se scriu condițiile de echilibru, separat, pentru fiecare corp;
4) se rezolvă sistemul de ecuații determinat la punctul 3.

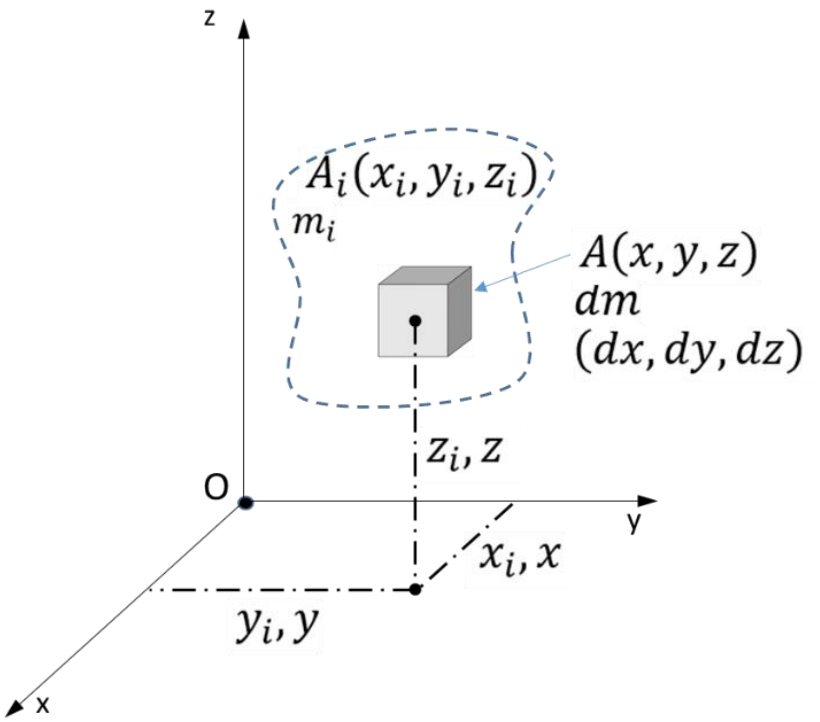
Observație:

a) Pentru simplificarea sistemului de ecuații, se determină accelerația corpurilor cu ajutorul teoremei energiei cinetice; accelerațiile astfel obținute se introduc în sistemul rezultat din scrierea ecuațiilor de echilibru și se obțin reacțiunile.
b) Există două tipuri de reacțiuni:
    - statice, care nu depind de mișcare (accelerație);
    - dinamice, care depind de mișcare.

3.4 Momente de inerție

3.4.1 Momente de inerție mecanice, centrifugale, geometrice. Proprietăți.

- **Modelul de studiu**



dx,dy,dz – laturile paralelipipedului infinitezimal

Fig. 3.10 Modelul de studiu pentru momentele de inerție

Definiție: Suma produselor dintre masa unui punct material și pătratul distanței la o axă / un plan / un pol definesc respectiv momentele de inerție mecanice axiale / planare / polare.

Suma produselor dintre masa unui punct material și distanțele la două plane perpendiculare între ele definesc **momentele de inerție centrifugale**.

În general, noțiunea de moment de inerție se definește ca: $J = i^2 \cdot m$, unde i este rază de inerție sau rază de girație.

Definiție: Raza de girație reprezintă distanța de la un punct în care se consideră concentrată toată masa corpului sau a sistemului de corpuri, în raport cu un reper ce poate fi o axă, un plan, un pol.

$$i = \sqrt{\frac{J}{m}}$$

Momente de inerție	Sistem discret de puncte materiale	Sistem continuu și omogen
axiale	$J_x = \sum (y_i^2 + z_i^2) \cdot m_i$ $J_y = \sum (x_i^2 + z_i^2) \cdot m_i$ $J_z = \sum (x_i^2 + y_i^2) \cdot m_i$	$J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$ $J_y = \int (x^2 + z^2)\, dm$ $J_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$
planare	$J_{xoy} = \sum z_i^2 \cdot m_i$ $J_{yoz} = \sum x_i^2 \cdot m_i$ $J_{xoz} = \sum y_i^2 \cdot m_i$	$J_{xoy} = \int z^2\, dm$ $J_{yoz} = \int x^2\, dm$ $J_{xoz} = \int y^2\, dm$
polar	$J_o = \sum (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \cdot m_i$	$J_o = \int (x^2 + y^2 + z^2)\, dm$
centrifugale	$J_{xy} = \sum x_i\, y_i \cdot m_i$ $J_{yz} = \sum y_i\, z_i \cdot m_i$ $J_{xz} = \sum x_i\, z \cdot m_i$	$J_{xy} = \int xy\, dm$ $J_{yz} = \int yz\, dm$ $J_{xz} = \int xz\, dm$

Dacă în relațiile momentelor de inerție de mai sus se explicitează masa ca fiind:

$m_i = \rho \cdot V_i \quad ; \quad dm = \rho \cdot dV$

$m_i = \rho \cdot A_i \quad ; \quad dm = \rho \cdot dA$

$m_i = \rho \cdot L_i \quad ; \quad dm = \rho \cdot dL$

unde ρ este densitatea corpului/ corpurilor, respectiv densitatea de volum, de arie, de lungime, densitate care se poate scoate înaintea operatorului de însumare (Σ) sau de integrare ($\int$), expresiile rămase sub acești operatori definesc **<u>momentele de inerție geometrice</u>**.

Proprietăți:

1. Momentele de inerție axiale / planare / polare sunt mărimi scalare pozitive, niciodată negative și cu totul excepțional nule (în cazul în care sistemul material este concentrat după o axă / într-un plan / după un pol).
2. Momentele de inerție centrifugale sunt mărimi scalare ce pot avea mărimi pozitive, negative sau nule.
3. Momentul de inerție axial se poate defini ca suma momentelor de inerție în raport cu două plane ce se intersectează după axa respectivă:
$$J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = \int y^2\, dm + \int z^2\, dm = J_{xoz} + J_{xoy}$$
4. Momentul de inerție polar se definește ca suma momentelor de inerție planare în raport cu 3 plane ce se intersectează în polul respectiv.
5. Momentul de inerție polar se definește ca suma dintre momentul de inerție în raport cu un plan și momentul de inerție în raport cu o axă perpendiculară pe plan în polul respectiv:
$$J_o = \int x^2\, dm + \int (y^2 + z^2)\, dm = J_{yoz} + J_x$$
6. Momentul de inerție polar se poate defini ca semisuma momentelor de inerție axiale:
$$J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm$$
$$J_y = \int (x^2 + z^2)\, dm \qquad => \quad J_o = \frac{J_x + J_y + J_z}{2}$$
$$J_z = \int (x^2 + y^2)\, dm$$

În baza proprietăților 3÷6 se observă că între cele 7 momente de inerție (axiale / planare/ polar) există 4 relații de dependență. În consecință, pentru determinarea momentelor de inerție axiale/ planare/ polar este suficient să se determine sau să se cunoască 3 momente de inerție. Acestea, împreună cu relațiile de dependență, determină celelalte 4 momente de inerție.

3.4.2 Variația momentelor de inerție la translația axelor. Formula lui Steiner.

Fie un rigid pentru care se cunosc momentele statice și momentele de inerție în raport cu reperul Oxyz.

Ne propunem să determinăm momentul de inerție în raport cu axele unui reper translatat ($O_1x_1y_1z_1$) față de reperul inițial (Fig. 3.11).

$$A\begin{cases} x+a \\ y+b \\ z+c \end{cases} \qquad O\begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$$

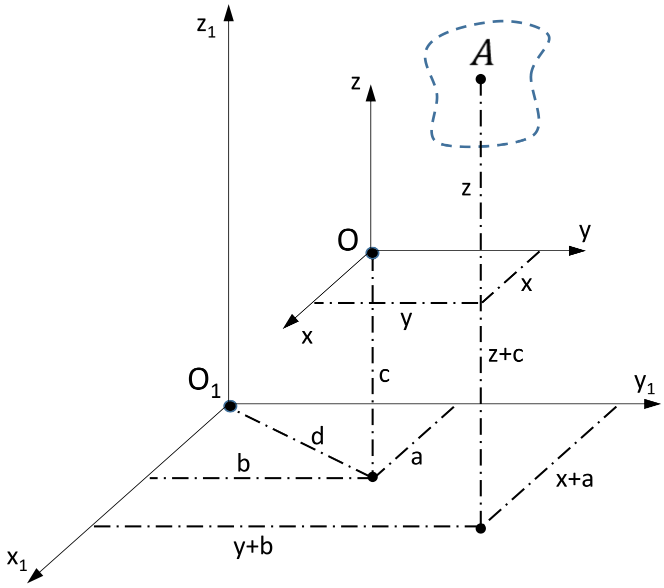


Fig. 3.11

$$J_{z_1} = \int (x_1^2 + y_1^2)dm = \int (x+a)^2 dm + \int (y+b)^2 dm$$

$$= \int (x^2 + a^2 + 2xa)dm + \int (y^2 + b^2 + 2yb)dm =$$

$$= \int (x^2 + y^2)dm + \int (a^2 + b^2)dm + 2a\int xdm + 2b\int ydm =$$

$$\boxed{J_{z_1} = J_z + d^2 \cdot M + 2aS_{yoz} + 2bS_{zoz}} \qquad (3.14)$$

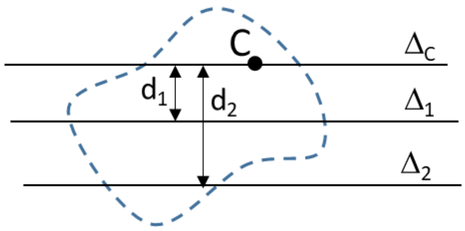
Legea de variație a momentului de inerție la translația axelor este dată de formula lui Steiner relația (3.14).

Dacă reperul își are originea în centrul de masă (axa Oz trece prin centrul de masă) atunci $S_{yoz} = S_{zoz} = 0$. Rezultă Formula lui Steiner condensată (utilizată, de regulă, în aplicații):

$$\boxed{J_{z_1} = J_z + d^2 \cdot M} \qquad (3.15)$$

Fie o dreaptă Δ_C ce trece prin centrul de masă al unui rigid și axele Δ_1 si Δ_2 la distanțele d_1, respectiv d_2. În baza formulei (3.15) se poate scrie:

$$J_{\Delta_1} = J_{\Delta_C} + d_1^2 \cdot M$$
$$J_{\Delta_2} = J_{\Delta_C} + d_2^2 \cdot M$$
$$J_{\Delta_2} - J_{\Delta_1} = J_{\Delta_C} - J_{\Delta_C} + (d_2^2 - d_1^2) \cdot M$$



Formula lui Steiner generalizată:

$$J_{\Delta_2} - J_{\Delta_1} = (d_2^2 - d_1^2) \cdot M \qquad (3.16)$$

Concluzii:

În baza formulelor (3.15) și (3.16) rezultă:

1) Dacă sunt date momentele de inerție în raport cu axele paralele, momentul de inerție minim va fi în raport cu axa ce trece prin centrul de masă.
2) Dacă este dat momentul de inerție în raport cu axa ce trece prin centrul de masă, atunci locul geometric al axelor față de care momentul de inerție are aceeași valoare este un cilindru având axa de rotație dreapta ce trece prin centrul de masă.
3) Cu ajutorul formulelor lui Steiner se poate determina momentul de inerție al corpurilor cu forme complexe, după cum urmează:
   - se împarte corpul în corpuri simple, al căror moment de inerție se cunoaște din literatura de specialitate,
   - se calculează momentul de inerție pentru fiecare corp simplu utilizând formula lui Steiner: $J_{\Delta_i} = J_{\Delta_C} + d_i^2 \cdot M$, unde i = numărul corpurilor simple,
   - se însumează (însumare algebrică): $J_\Delta = \sum J_{\Delta_i}$.
4) Formula lui Steiner este valabilă și în cazul momentelor de inerție geometrice, cu deosebirea că în locul masei se va considera volumul, aria sau lungimea (după cum corpul are respectiv trei, două sau o dimensiune).
5) Formula lui Steiner se aplică și momentelor de inerție centrifugale. De exemplu: $J_{x_i y_i} = J_{xy} + ab \cdot M$.

3.4.3 Variația momentelor de inerție la rotația axelor

Fie reperul Oxyz și dreapta Δ, cu versorul $\vec{e}$: $\vec{e} = cos\,\alpha \cdot \vec{\imath} + cos\,\beta \cdot \vec{\jmath} + cos\,\gamma \cdot \vec{k}$

Pentru simplificarea scrierii se adoptă notațiile:

$$\cos\alpha = \alpha$$
$$\cos\beta = \beta$$
$$cos\,\gamma = \gamma$$

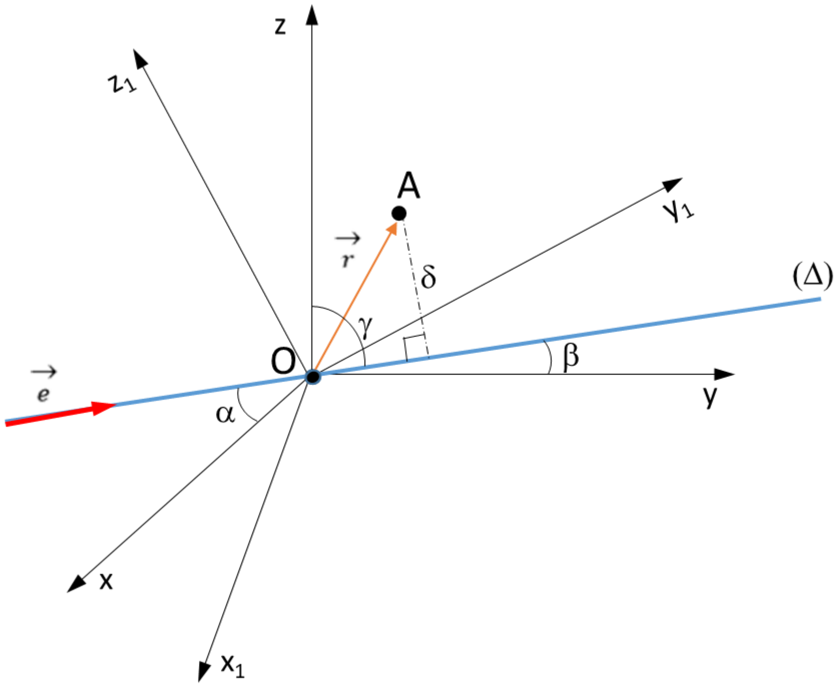


Fig. 3.12

Rezultă: $\vec{e} = \alpha \cdot \vec{\imath} + \beta \cdot \vec{\jmath} + \gamma \cdot \vec{k}$

Punctul A, cu vectorul de poziție $\vec{r}$ având expresia $\vec{r} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k}$ se află la distanța δ de dreapta Δ, cu $\delta = \mathrm{r}\sin(\vec{r}, \vec{e})$.

Din definiția momentului de inerție axial rezultă:

$$J_\Delta = \int \delta^2\, dm$$

$$\delta = |\vec{r} \times \vec{e}| = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} y\gamma - z\beta \\ z\alpha - x\gamma \\ x\beta - y\alpha \end{Bmatrix}$$

$$J_\Delta = \int (y\gamma - z\beta)^2\, dm + \int (z\alpha - x\gamma)^2\, dm + \int (x\beta - y\alpha)^2\, dm =$$

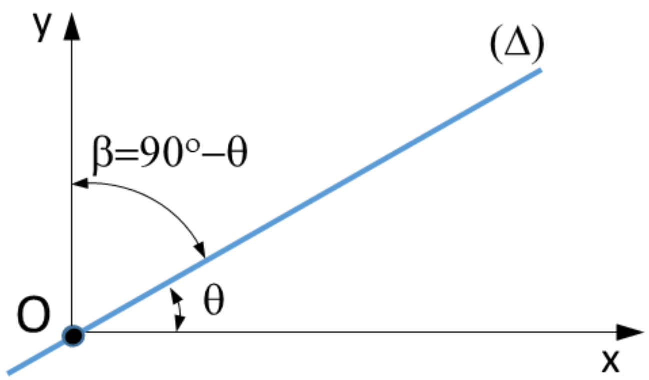
$$= \int (y^2\gamma^2 + z^2\beta^2 - 2yz\gamma\beta) dm + \int (z^2\alpha^2 + x^2\gamma^2 - 2zx\alpha\gamma) dm$$
$$+ \int (x^2\beta^2 + y^2\alpha^2 - 2xy\beta\alpha) dm$$

$$J_\Delta = \alpha^2 \cdot J_x + \beta^2 \cdot J_y + \gamma^2 \cdot J_z - 2\alpha\beta \cdot J_{yz} - 2\beta\gamma \cdot J_{xy} - 2\alpha\gamma \cdot J_{xz} \tag{3.17}$$

Comentarii:

1) Relația (3.17) exprimă legea de variație a momentului de inerție la rotația axelor, deoarece dreapta Δ a fost aleasă arbitrar și poate fi suprapusă cu oricare dintre axele reperului $Ox_1y_1z_1$ obținut prin rotirea reperului Oxyz.

2) Se consideră o dreaptă Δ conținută în planul Oxy:



$\gamma = 0$

$\alpha = cos(\alpha) = cos(\theta)$

$\beta = cos(\beta) = sin(\theta)$

Relația (3.17) devine:

$$J_\Delta = J_x \cdot cos^2\theta + J_y \cdot sin^2\theta - 2J_{xy} \cdot sin\,\theta \cdot cos\,\theta$$

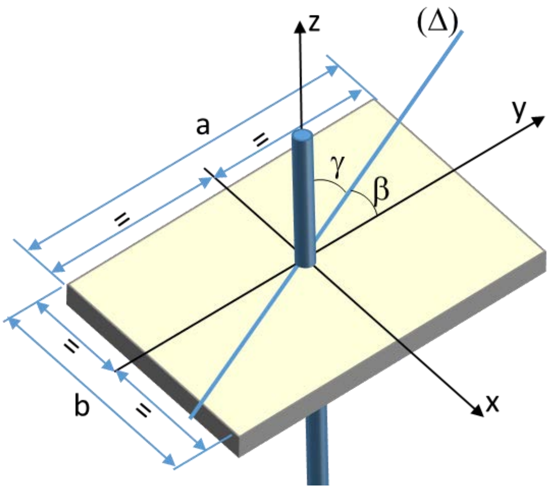
$$J_\Delta = J_x \cdot cos^2\theta + J_y \cdot sin^2\theta - J_{xy} \cdot sin\,2\theta$$

- Dacă se consideră θ =0, adică sistemul material este concentrat după axa Ox, rezultă $J_\Delta = J_x$.
- Dacă $\theta = \pi/2$, adică sistemul material este concentrat după axa Oy, rezultă $J_\Delta = J_y$.
- În baza acestor rezultate se poate afirma că **momentele de inerție definesc modul de repartiție al masei unui sistem material.**

Aplicație.

O placă dreptunghiulară cu masa M = 3kg, cu grosime constantă (grosime mică în raport cu celelalte dimensiuni) este sudată la 45° pe un ax vertical care se rotește cu viteza unghiulară ω=20π rad/s. Laturile plăcii au dimensiunile a = 0.4m și b = 0.2m, Fig. 3.13.

Să se determine energia cinetică.



$$E_c = J_\Delta \cdot \frac{\omega^2}{2}$$

J_Δ – momentul de inerție al plăcii în raport cu axa de rotație

$$\alpha = cos90° = 0$$

$$\beta = cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\gamma = cos45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Fig. 3.13

$$J_\Delta = \alpha^2 \cdot J_x + \beta^2 \cdot J_y + \gamma^2 \cdot J_z - 2\alpha\beta \cdot J_{xy} - 2\beta\gamma \cdot J_{yz} - 2\gamma\alpha \cdot J_{zx}$$

$$dm = \rho \cdot dA = \tfrac{M}{A} dA = \tfrac{M}{a \cdot b} dxdy \quad ; \quad J_{xoy} = 0$$

$$J_x = \int (y^2 + z^2)\, dm = \int y^2\, dm + \int z^2\, dm = J_{xoz} + J_{xoy} = \frac{M}{ab} \int y^2\, dxdy$$

$$= \frac{M}{ab}\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy\right] = \frac{M}{ab} \cdot \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{a^3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{a^3}{8} \cdot \frac{1}{3}\right) = \frac{Ma^2}{12}$$

$$J_y = \int (x^2 + z^2)\, dm = \int x^2\, dm + \int z^2\, dm = J_{yoz} + J_{xoy} = \frac{M}{ab} \int x^2\, dxdy$$

$$= \frac{M}{ab}\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy\right] = \frac{M}{ab} \cdot \left(\frac{b^3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{b^3}{8} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right) = \frac{Mb^2}{12}$$

$$J_z = \int (x^2 + y^2)\, dm = \int x^2\, dm + \int y^2\, dm = J_{yoz} + J_{xoz} = \frac{M}{ab} \int (x^2 + y^2)\, dxdy$$

$$= \frac{M}{ab}\left[\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dy + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \cdot \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} y^2 dy\right] = \frac{M(a^2 + b^2)}{12}$$

$$J_\Delta = \frac{2}{4} \cdot \frac{Mb^2}{12} + \frac{2}{4} \cdot \frac{M(a^2 + b^2)}{12} = \frac{M(a^2 + 2b^2)}{24}$$

$$E_c = \frac{M(a^2 + 2b^2)}{24} \cdot \frac{\omega^2}{2} = 59.22 \text{ J}$$

3.5 Dinamica rigidului în mișcarea de rotație cu axă fixă

Se consideră un solid rigid în mișcare de rotație cu axă fixă (O_1O_2 = l), asupra căruia acționează un sistem de forțe reprezentat de $\{F_i\}$ care, în raport cu polul $O=O_1$ se reduce la torsorul $T_o\left\{\begin{matrix}\vec{R}\\ \overrightarrow{M_o}\end{matrix}\right\}$, Fig. 3.14.

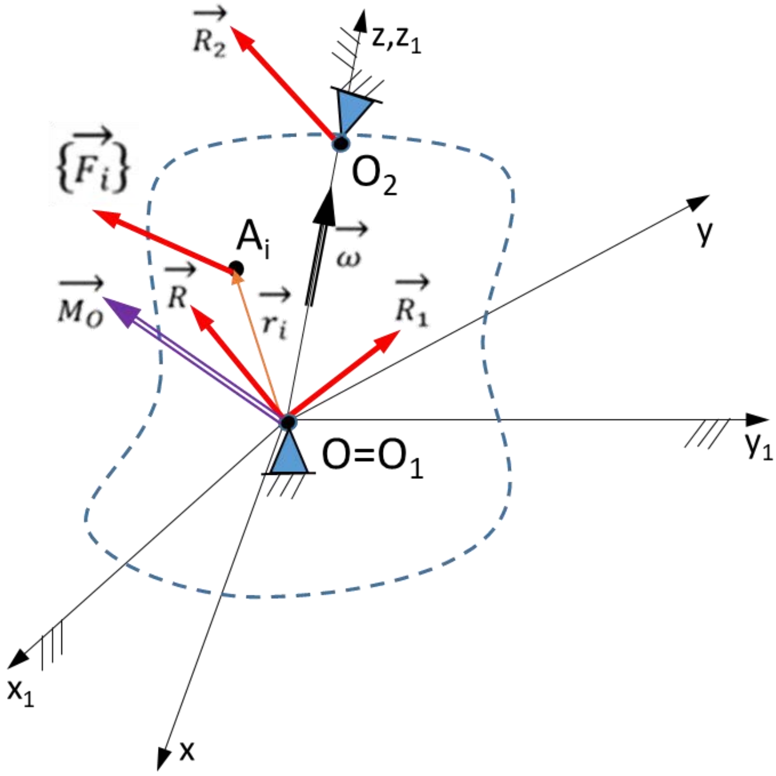


Fig. 3.14

În legăturile mecanice din polii O_1 și O_2 rezultă torsorul forțelor de legătură:

$$T_o^{(l)} = \left\{\begin{matrix}\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_2}\\ \vec{M}^{(l)}_{o_{(\overrightarrow{R_1})}} + \vec{M}^{(l)}_{o_{(\overrightarrow{R_2})}}\end{matrix}\right\}$$

Se pune problema determinării reacțiunilor R_1 și R_2 și legea de mișcare a rigidului.

Rezolvarea problemei implică metoda cinetostatică: în tot timpul mișcării unui rigid, torsorul forțelor date și a forțelor de legătură sunt echilibrate de torsorul forțelor de inerție.

$$T_o^i = \begin{cases} \overrightarrow{R^i} = -\dfrac{d\vec{H}}{dt} = -m\overrightarrow{a_c} & , \quad \{\overrightarrow{a_c}\} = \begin{Bmatrix} -\omega^2 x_c - \varepsilon y_c \\ -\omega^2 y_c + \varepsilon x_c \\ 0 \end{Bmatrix} \\ \overrightarrow{M_o^i} = -\dfrac{d\overrightarrow{K_o}}{dt} & , \quad \overrightarrow{K_o} = [J_o]\{\vec{\omega}\} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{R^i} = -m\begin{Bmatrix} -\omega^2 x_c - \varepsilon y_c \\ -\omega^2 y_c + \varepsilon x_c \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m\omega^2 x_c + m\varepsilon y_c \\ m\omega^2 y_c - m\varepsilon x_c \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{R^i}\right| = m\sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(x_C^2 + y_C^2)}$$

$$\left\{\overrightarrow{M_o^i}\right\} = -\left\{\frac{\partial\overrightarrow{K_o}}{\partial t}\right\} - \left[\vec{\omega} \times \overrightarrow{K_o}\right] = -\left\{\frac{\partial\overrightarrow{K_o}}{\partial t}\right\} - \left[\widehat{\vec{\omega}}\right] \cdot \left\{\overrightarrow{K_o}\right\}$$

$$\left\{\overrightarrow{K_o}\right\} = \begin{bmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -J_{xz}\omega \\ -J_{yz}\omega \\ +J_z\omega \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\frac{\partial\overrightarrow{K_o}}{\partial t}\right\} = \begin{Bmatrix} -J_{xz}\varepsilon \\ -J_{yz}\varepsilon \\ +J_z\varepsilon \end{Bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \times \overrightarrow{K_o} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ -J_{xz}\omega & -J_{yz}\omega & +J_z\omega \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{yz}\omega^2 \\ -J_{xz}\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left[\widehat{\vec{\omega}}\right] \cdot \left\{\overrightarrow{K_o}\right\} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -J_{xz}\omega \\ -J_{yz}\omega \\ J_z\omega \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{yz}\omega^2 \\ -J_{xz}\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\overrightarrow{M_o^i}\right\} = \begin{Bmatrix} J_{xz}\varepsilon \\ J_{yz}\varepsilon \\ -J_z\varepsilon \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -J_{yz}\omega^2 \\ J_{xz}\omega^2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 \\ J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 \\ -J_z\varepsilon \end{Bmatrix} \qquad \left|\overrightarrow{M_o^i}\right| = \sqrt{(\varepsilon^2 + \omega^4)(J_{xz}^2 + J_{yz}^2)}$$

Metoda cinetostatică:

Relațiile de echilibru fictiv:

$$\begin{cases} \vec{R} + \vec{R^l} + \vec{R^i} = 0 \\ \overrightarrow{M_o} + \overrightarrow{M_o^l} + \overrightarrow{M_o^i} = 0 \end{cases} \tag{3.18}$$

$$\left\{\overrightarrow{M_o^l}\right\} = \vec{M}^{(l)}_{o_{(\overrightarrow{R_1})}} + \vec{M}^{(l)}_{o_{(\overrightarrow{R_2})}} = \overrightarrow{OO_2} \times \overrightarrow{R_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & l \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -l \cdot Y_2 \\ l \cdot X_2 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \text{unde } \vec{M}^{(l)}_{o_{(\overrightarrow{R_1})}} = 0$$

$$\overrightarrow{M_o^l} = -l \cdot Y_2\, \vec{i} + \; l \cdot X_2\, \vec{j} + 0\, \vec{k}$$

$$\{\vec{R}\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\overrightarrow{R_1}\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\overrightarrow{R_2}\} = \begin{Bmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{Bmatrix}$$

Proiectând relația 3.18 pe cele trei direcții ale axelor de coordonate rezultă:

$$\begin{cases} X + X_1 + X_2 + m\omega^2 x_c + m\varepsilon y_c = 0 \\ Y + Y_1 + Y_2 + m\omega^2 y_c - m\varepsilon x_c = 0 \\ Z + Z_1 + Z_2 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = 0 \\ M_{Ox} - l\, Y_2 + J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0 \\ M_{Oy} + l\, X_2 + J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0 \\ M_{Oz} + \quad 0 \quad + \quad 0 - J_z\varepsilon \quad = 0 \end{cases} \qquad \text{cu necunoscutele: } \begin{cases} X_1, Y_1, Z_1 \\ X_2, Y_2, Z_2 \\ \varepsilon \end{cases} \tag{3.19}$$

Problema are 6 ecuații cu 7 necunoscute, deci este un sistem nedeterminat. Aceasta implică modificarea modelului de studiu prin înlocuirea articulației sferice din O_2 cu o articulație cilindrică plană, situată în planul xOy, Fig. 3.15.

În consecință, relația 3.19 devine:

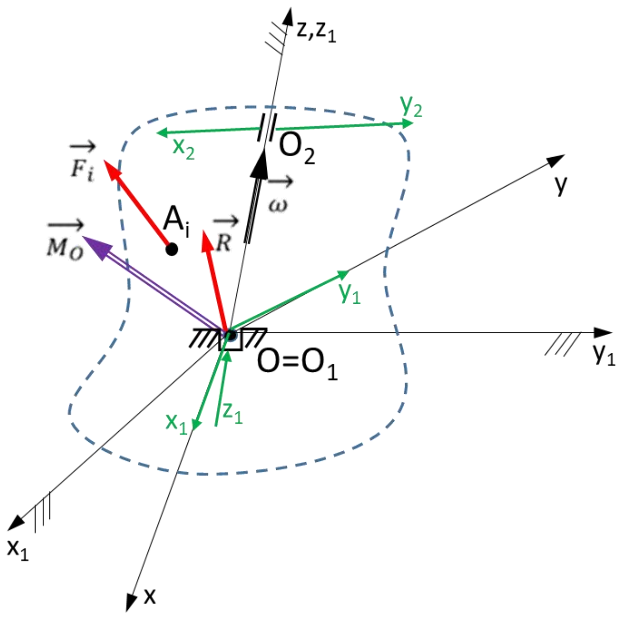


Fig. 3.15

$$\begin{cases} X + X_1 + X_2 + m\omega^2 x_c + m\varepsilon y_c = 0 \\ Y + Y_1 + Y_2 + m\omega^2 y_c - m\varepsilon x_c = 0 \\ Z + Z_1 + 0 + \quad 0 \quad + \quad 0 \quad = 0 \\ M_{Ox} - l\,Y_2 + J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0 \\ M_{Oy} + l\,X_2 + J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0 \\ M_{Oz} + \quad 0 \quad + \quad 0 - J_z\varepsilon \quad = 0 \end{cases} \quad \text{cu necunoscutele:} \begin{cases} X_1, Y_1, Z_1 \\ X_2, Y_2 \\ \varepsilon \end{cases} \tag{3.20}$$

Problema devine astfel determinată (sistem de 6 ecuații cu 6 necunoscute).

Dacă rigidul este în repaos (ω=0, ε=0), atunci sistemul de ecuații din (3.20) devine:

$$\begin{cases} X + X_1 + X_2 = 0 \\ Y + Y_1 + Y_2 = 0 \\ Z + Z_1 = 0 \\ M_{Ox} - l\,Y_2 = 0 \\ M_{Oy} + l\,X_2 = 0 \\ M_{Oz} = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

iar problema de dinamică se transformă într-o problemă de statică.

Comentarii:

1) Cu ajutorul relațiilor (3.20) și (3.21) se determină reacțiunile dinamice, respectiv cele statice.
2) Se observă ca reacțiunile dinamice sunt mai mari decât reacțiunile statice.
3) Determinarea legii de mișcare a rigidului se poate face utilizând ecuația:

$$\varepsilon = \frac{M_{Oz}}{J_z} \quad ; \quad \omega = \int \varepsilon\, dt + C_1 \quad ; \quad \theta = \int \omega\, dt + C_2$$

4) În tehnică se pune problema ca reacțiunile dinamice să fie egale cu reacțiunile statice. Deci, termenii care conțin ω și ε trebuie să fie nuli. Rezultă că se îndeplinește condiția necesară și suficientă atunci când: $\begin{cases} x_C = y_C = 0 \\ J_{xz} = J_{yz} = 0 \end{cases}$ (3.22)

   Se constată că punând condiția ca ε = 0, adică rotația să fie uniformă, aceasta nu conduce la reducerea reacțiunilor astfel încât acestea să fie egale cu cele statice; este necesar ca și ω = 0, dar atunci nu se mai poate numi mișcare de rotație a rigidului. Prin urmare, condiția necesară și suficientă este dată de relația (3.22).
5) $x_C = y_C = 0$: centrul de masă al rigidului se găsește pe axa de rotație (corpul este echilibrat static).
6) $J_{xz} = J_{yz} = 0$: una din axele reperului principal să fie axa de rotație (corpul este echilibrat dinamic).

Problemă propusă:

Să se determine reacțiunile dinamice în cazul cilindrului de rază r, masă m și înălțime h, care se rotește în jurul axei (Δ) cu viteză constantă.