

Alexandrina Maria PROCA

Adela SASU

TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Culegere de probleme



Editura
Universității
Transilvania
din Brașov

2024

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa: Str. Iuliu Maniu nr. 41A
500091 Brașov
Tel.: 0268 476 050
Fax: 0268 476 051
E-mail: editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81.

Copyright © Autorii, 2024

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Matematică și Informatică,
Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României

PROCA, ALEXANDRINA MARIA

Teoria probabilităților și statistică matematică : culegere de probleme /

Alexandrina Maria Proca, Adela Sasu. - Brașov : Editura Universității

"Transilvania" din Brașov, 2024

Conține bibliografie

ISBN 978-606-19-1758-7

I. Sasu, Adela

51

CUPRINS

| | |
|--|-----------|
| Cuprins | 3 |
| INTRODUCERE | 7 |
| 1 Probleme de numărare | 9 |
| 1.1 Noțiuni introductive | 9 |
| 1.2 Principiul produsului | 9 |
| 1.3 Principiul includerii și al excluderii | 10 |
| 1.4 Probleme rezolvate | 10 |
| 1.5 Probleme propuse | 16 |
| 2 Evenimente. Probabilitate | 19 |
| 2.1 Evenimente | 19 |
| 2.2 Câmp de evenimente | 21 |
| 2.3 Câmp de probabilitate | 22 |
| 2.4 Evenimente independente. Evenimente dependente | 24 |
| 2.5 Probabilitate condiționată | 25 |
| 2.6 Regula de înmulțire a probabilităților | 26 |
| 2.7 Formula probabilității totale | 27 |
| 2.8 Formula lui Bayes | 27 |
| 2.9 Scheme probabilistice clasice | 27 |
| 2.9.1 Schema lui Poisson | 27 |
| 2.9.2 Schema lui Bernoulli (binomială, a bilei întoarse cu două stări) | 28 |
| 2.9.3 Schema multinomială | 28 |
| 2.9.4 Schema bilei neîntoarse cu mai multe stări (hipergeometrică) | 28 |
| 2.9.5 Schema lui Pascal (geometrică) | 29 |
| 2.10 Probleme rezolvate | 29 |
| 2.11 Probleme propuse | 51 |
| 3 Variabile aleatoare | 57 |
| 3.1 Variabile aleatoare unidimensionale | 57 |
| 3.1.1 Funcția de repartiție | 58 |
| 3.1.2 Densitatea de probabilitate | 58 |
| 3.1.3 Caracteristici numerice ale funcției de repartiție | 59 |
| 3.2 Variabile aleatoare bidimensionale | 60 |
| 3.3 Operații cu variabile aleatoare | 63 |
| 3.4 Probleme rezolvate | 65 |
| 3.5 Probleme propuse | 77 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 4 | Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare | 85 |
| 4.1 | Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare unidimensionale | 85 |
| 4.2 | Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare bidimensionale | 88 |
| 4.3 | Covarianță. Coeficient de corelație. Curbe și drepte de regresie | 89 |
| 4.4 | Probleme rezolvate | 90 |
| 4.5 | Probleme propuse | 102 |
| 5 | Funcția caracteristică | 123 |
| 5.1 | Considerații teoretice | 123 |
| 5.2 | Probleme rezolvate | 125 |
| 5.3 | Probleme propuse | 129 |
| 6 | Repartiții probabilistice clasice | 133 |
| 6.1 | Repartiții unidimensionale discrete | 133 |
| 6.1.1 | Repartiția binomială | 133 |
| 6.1.2 | Repartiția Poisson | 135 |
| 6.1.3 | Repartiția hipergeometrică | 137 |
| 6.1.4 | Repartiția Pascal sau binomială cu exponent negativ | 137 |
| 6.1.5 | Repartiția uniformă discretă | 138 |
| 6.2 | Repartiții unidimensionale continue | 138 |
| 6.2.1 | Repartiția normală (Gauss) | 138 |
| 6.2.2 | Repartiția uniformă continuă | 141 |
| 6.2.3 | Repartiția Gamma | 142 |
| 6.2.4 | Repartiția Beta | 143 |
| 6.2.5 | Repartiția exponențială | 143 |
| 6.2.6 | Repartiția Hi-Pătrat | 144 |
| 6.2.7 | Repartiția Student | 145 |
| 6.2.8 | Repartiția Fisher-Snedecor | 146 |
| 6.2.9 | Repartiția normală bidimensională | 147 |
| 6.3 | Probleme rezolvate | 148 |
| 6.4 | Probleme propuse | 159 |
| 7 | Elemente de teoria selecției | 161 |
| 7.1 | Considerații teoretice | 161 |
| 7.1.1 | Selecția. Repartiția empirică | 161 |
| 7.1.2 | Valori tipice (empirice) de selecție | 164 |
| 7.1.3 | Selecția dintr-o populație cu caracteristica X supusă legii normale | 166 |
| 7.2 | Probleme rezolvate | 168 |
| 7.3 | Probleme propuse | 174 |
| 8 | Elemente de teoria estimației | 179 |
| 8.1 | Considerații teoretice | 179 |
| 8.1.1 | Estimații. Tipuri de estimații | 179 |
| 8.1.2 | Metode de determinare a estimațiilor pentru repartițiile statistice | 182 |
| 8.1.2.1 | Metoda momentelor | 182 |
| 8.1.2.2 | Metoda verosimilității maxime | 183 |
| 8.1.2.3 | Metoda intervalelor de încredere | 185 |
| 8.2 | Probleme rezolvate | 190 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 8.3 | Probleme propuse | 199 |
| 9 | Verificarea ipotezelor statistice | 205 |
| 9.1 | Considerații teoretice | 205 |
| 9.1.1 | Ipoteze statistice. Regiune critică. Erori | 205 |
| 9.1.2 | Ipoteze asupra mediilor | 207 |
| 9.1.2.1 | Testul Z privind media populației m când σ este cunoscut | 207 |
| 9.1.2.2 | Testul Z privind diferența mediilor a două populații normale | 209 |
| 9.1.2.3 | Testul T privind media populației | 210 |
| 9.1.2.4 | Testul T privind diferența mediilor a două populații normale | 211 |
| 9.1.3 | Ipoteze asupra dispersiilor | 212 |
| 9.1.3.1 | Testul χ^2 asupra dispersiilor | 212 |
| 9.1.3.2 | Testul F asupra dispersiilor | 213 |
| 9.1.4 | Teste de concordanță | 214 |
| 9.1.4.1 | Testul χ^2 | 215 |
| 9.1.4.2 | Testul de concordanță Kolmogorov | 215 |
| 9.2 | Probleme rezolvate | 216 |
| 9.3 | Probleme propuse | 230 |
| | ANEXE | 243 |
| 1 | Anexa 1 | 245 |
| 2 | Anexa 2 | 249 |
| 3 | Anexa 3 | 251 |
| 4 | Anexa 4 | 255 |
| 5 | Anexa 5 | 257 |
| 6 | Anexa 6 | 263 |
| 7 | Anexa 7 | 265 |
| | Bibliografie | 269 |

INTRODUCERE

Partea teoriei probabilităților care vizează problemele de numărare este evident legată de formarea unui mod de gândire logică, bazată pe deducții, cu vizibilă legătură cu informatica. Nu puține sunt situațiile când elevii și/sau studenții nu reușesc să deprindă modul de gândire, de raționament, pe care să-l aplice în rezolvarea unor asemenea probleme. A rezolva probleme de numărare nu înseamnă strict a aplica niște formule pentru că nu așa formăm algoritmi. Există evident un fundament matematic pe care îl vom aplica, însă, mai înainte, trebuie să-l împachetăm. Frumusețea acestui capitol constă în faptul că, la final, după ce am dobândit anumite competențe, eu, viitorul absolvent voi putea să-mi număr singur șansele de reușită sau de insucces dintr-un experiment petrecut în viața mea. Este importantă regula conform căreia folosirea cuvântului „sau” într-un enunț de zi cu zi trebuie, matematic vorbind, să ne ducă cu gândul la operația de reuniune de mulțimi/evenimente. Același lucru atunci când vorbim de „și” care sugerează ideea de intersecție de mulțimi/evenimente.

Pentru viitorii ingineri, nu este interesant aparatul matematic din spatele unei situații problemă, ci aplicarea acesteia în situații practice. Este important să știu să-mi calculez șansa de a nimeri un produs neconform (defect sau necorespunzător din punct de vedere al masei sau al ambalajului, sau etc) decât să știu exact formula pe care o folosesc. Nu trebuie însă să cădem nici în capcana necunoașterii teoriei matematice pentru că atunci riscăm să descoperim roata în condițiile în care ea există de mii de ani. Este o frontieră fragilă între teorie și practică și rolul profesorului de matematică este acela de a ambala frumos teoria pentru a ajunge să apreciem rolul matematicii de a ne ușura munca și viața de zi cu zi. Este evident că tehnologia actuală, având la dispoziție aparatul matematic cunoscut, ne poate fi de un real folos. Pentru viitorii economiști, ar fi util să poată alcătui prognoze privind profitul pe anul viitor, cunoscând mărimea profitului pe ultimii 5 sau 10 ani. Cu cât datele pe care le avem la dispoziție sunt într-un volum mai mare, cu atât prognozele pe care le vom obține vor avea șanse mai mari să se realizeze. Lucrând însă cu volume mari de date, vom genera costuri suplimentare pentru obținerea prognozelor. Stabilirea volumului de date astfel încât să obținem cele mai sigure prognoze, a fost și va rămâne o provocare. Orice decizie trebuie luată în cunoștință de cauză, bazată pe niște argumente. Rolul economistului, al inginerului este acela de a modela datele conform unui model matematic cunoscut.

Actualmente, statistica apare în cam toate domeniile: sondaje, teoria deciziilor, biologie, analiza populațiilor, vânzări, meteorologie (analiza inundațiilor, a precipitațiilor → vezi aici teoria valorilor extreme), teoria stocurilor, curs valutar, economie, medicină. Însă, statistica reprezintă aplicarea teoriei probabilităților în practică. De aceea, lucrarea este împărțită în două mari părți: teoria probabilităților și statistică matematică.

Teoria probabilităților a apărut ca urmare a dorinței de a maximiza profitul în cadrul

jocurilor de noroc. Astfel, situațiile problemă de pe masa de joc au ajuns spre a fi studiate de către savanți precum Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, Laplace și alții. Dar, punerea teoriei pe baze riguroase îi aparține lui Kolmogorov.

Interpretarea „în medie” îi aparține statisticii. Pornind de la analiza elementelor individuale ale unei colectivități, observate din punct de vedere a uneia sau mai multor caracteristici, statistica, reușește prin metode specifice, care au în spate un întreg aparat matematic să obțină prognoze asupra aspectelor care ne interesează. Există însă niște abateri de la medie, în plus sau în minus. Ideal este ca ele să fie cât mai mici. Exprimarea „în medie” nu trebuie scoasă din context. Să nu uităm faimoasa frază a lui Bernard Shaw: *„Dacă un om își ține capul într-o sobă încinsă iar picioarele într-un vas cu gheață, corpul său are o temperatură medie ideală.”*

Lucrarea poate fi utilă elevilor și profesorilor din ciclul liceal (a se vedea capitolul de probleme de numărare) și viitorilor ingineri respectiv economiști.

Fiecare capitol are un sumar teoretic urmat de probleme rezolvate și în final de probleme propuse.

Mulțumim pe această cale întregului colectiv al Departamentului de Matematică și Informatică al Facultății de Matematică și Informatică din Universitatea Transilvania din Brașov, domnilor prof. dr. Cristina Cismașiu, conf. dr. Eugen Păltânea și nu în ultimul rând d-lui prof. dr. Gabriel V. Orman care au contribuit la formarea noastră didactică dar și de cercetare din domeniul teoriei probabilităților și statisticii matematice.

CAPITOLUL 1

PROBLEME DE NUMĂRARE

1.1 Noțiuni introductive

Fie A o mulțime finită. Numărul elementelor lui A se numește **cardinalul lui A** și se notează $\text{Card } A$. Dacă A este vidă, atunci ea nu are nici un element și deci $\text{Card } A = 0$.

Pentru A și B mulțimi finite avem următoarele proprietăți:

1. $\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card } (A \cap B)$;
2. $\text{Card } (A \cup B) = \text{Card } (A \setminus B) + \text{Card } (B \setminus A) + \text{Card } (A \cap B)$
3. $\text{Card } (A \times B) = \text{Card } A \cdot \text{Card } B$

Propoziția 1.1.1

Fie A și B finite, nevide. Atunci numărul funcțiilor $f : A \rightarrow B$ este egal cu m^n , unde $m = \text{Card } B$ și $n = \text{Card } A$.

Propoziția 1.1.2

Dacă A este finită cu $\text{Card } A = n, n \in \mathbb{N}$, atunci mulțimea submulțimilor lui A , notată cu $\mathcal{P}(A)$ are 2^n submulțimi.

1.2 Principiul produsului

Fie A_1, A_2, \dots, A_n mulțimi finite cu k_1, k_2, \dots, k_n elemente, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Atunci $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ este mulțime finită, iar

$$\text{Card } (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \text{Card } A_1 \cdot \text{Card } A_2 \cdot \dots \cdot \text{Card } A_n.$$

b) Dacă ne interesează în câte moduri putem forma elemente de forma $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ prin alegeri independente una de cealaltă, cele n elemente pot fi alese în $k_1 \cdot k_2 \cdot \dots \cdot k_n$ moduri.

1.3 Principiul includerii și al excluderii

Dacă A_1, A_2, \dots, A_n sunt mulțimi finite, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci

$$\begin{aligned} \text{Card} \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) &= \sum_{i=1}^n \text{Card} (A_i) - \sum_{i<j} \text{Card} (A_i \cap A_j) + \\ &+ \sum_{i<j<k} \text{Card} (A_i \cap A_j \cap A_k) - \dots + (-1)^{n-1} \text{Card} \left(\bigcap_{i=1}^n A_i \right) \end{aligned}$$

Am reamintit că numărul funcțiilor definite pe o mulțime finită A cu n elemente cu valori într-o mulțime finită B cu m elemente este m^n .

Dacă $f : A \rightarrow B$, $\text{Card} A = n$; $\text{Card} B = m$, $0 < n < m$, atunci numărul funcțiilor injective este A_n^k .

Dacă $m = n$, numărul funcțiilor bijective $f : A \rightarrow B$ este $n!$.

Dacă A și B sunt mulțimi finite nevide de numere reale cu $\text{Card} A = n$; $\text{Card} B = m$, $0 < n < m$, atunci numărul funcțiilor strict crescătoare $f : A \rightarrow B$ este C_n^m . Același lucru și pentru numărul funcțiilor strict descrescătoare.

Reamintim că numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente este C_n^k , unde $0 \leq k \leq n$ fiind numere naturale, iar dacă submulțimile sunt ordonate, atunci numărul submulțimilor cu k elemente ale unei mulțimi cu n elemente este A_n^k , $0 \leq n \leq k$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$P_k = k!$$

1.4 Probleme rezolvate

1. Fie $f : A \rightarrow B$, $\text{Card} A = 6$ și numărul funcțiilor care respectă această proprietate este 64. Aflați $\text{Card} B$, pentru A și B finite.

Rezolvare:

Deoarece numărul funcțiilor $f : A \rightarrow B$, $\text{Card} A = m$, $\text{Card} B = n$ este n^m avem că $n^6 = 64 = 2^6$. Rezultă că $n = 2$, adică $\text{Card} B = 2$.

2. Determinați numărul funcțiilor $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(a) = 0$.

Rezolvare:

Având în vedere că $f(a)$ este fixat în 0, celelalte 3 valori din domeniu pot lua oricare din valorile din codomeniu, deci vom avea 4^3 funcții.

3. Determinați numărul funcțiilor $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(a) = f(b)$.