Alexandrina Maria PROCA Adela SASU

TEORIA PROBABILITĂȚILOR ȘI STATISTICĂ MATEMATICĂ

Culegere de probleme

Editura Universității Transilvania din Brașov

2024

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa:	Str. Iuliu Maniu nr. 41A
	500091 Brașov
Tel.:	0268 476 050
Fax:	0268 476 051
E-mail:	editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81.

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Matematică și Informatică, Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov.

Descrierea CIP a Bibliotecii Naţionale a României
PROCA, ALEXANDRINA MARIA
Teoria probabilităţilor şi statistică matematică : culegere de probleme / Alexandrina Maria Proca, Adela Sasu. - Brașov : Editura Universității "Transilvania" din Brașov, 2024
Conține bibliografie
ISBN 978-606-19-1758-7

I. Sasu, Adela

51

CUPRINS

INTRODUCERE

Partea teoriei probabilităţilor care vizează problemele de numărare este evident legată de formarea unui mod de gândire logică, bazată pe deducţii, cu vizibilă legătură cu informatica. Nu puţine sunt situaţiile când elevii şi/sau studenţii nu reuşesc să deprindă modul de gândire, de raţionament, pe care să-l aplice în rezolvarea unor asemenea probleme. A rezolva probleme de numărare nu înseamnă strict a aplica niște formule pentru că nu aşa formăm algoritmi. Există evident un fundament matematic pe care îl vom aplica, însă, mai înainte, trebuie să-l împachetăm. Frumuseţea acestui capitol constă în faptul că, la final, după ce am dobândit anumite competenţe, eu, viitorul absolvent voi putea să-mi număr singur şansele de reuşită sau de insucces dintr-un experiment petrecut în viaţa mea. Este importantă regula conform căreia folosirea cuvântului „sau" într-un enunţ de zi cu zi trebuie, matematic vorbind, să ne ducă cu gândul la operaţia de reuniune de mulţimi/evenimente. Acelaşi lucru atunci când vorbim de „şi" care sugerează ideea de intersecţie de mulţimi/evenimente.

Pentru viitorii ingineri, nu este interesant aparatul matematic din spatele unei situaţii problemă, ci aplicarea acesteia în situaţii practice. Este important să ştiu să-mi calculez şansa de a nimeri un produs neconform (defect sau necorespunzător din punct de vedere al masei sau al ambalajului, sau etc) decât să ştiu exact formula pe care o folosesc. Nu trebuie însă să cădem nici în capcana necunoaşterii teoriei matematice pentru că atunci riscăm să descoperim roata în condiţiile în care ea există de mii de ani. Este o frontieră fragilă între teorie şi practică şi rolul profesorului de matematică este acela de a ambala frumos teoria pentru a ajunge să apreciem rolul matematicii de a ne uşura munca şi viaţa de zi cu zi. Este evident că tehnologia actuală, având la dispoziție aparatul matematic cunoscut, ne poate fi de un real folos. Pentru viitorii economiști, ar fi util să poată alcătui prognoze privind profitul pe anul viitor, cunoscând mărimea profitului pe ultimii 5 sau 10 ani. Cu cât datele pe care le avem la dispoziție sunt într-un volum mai mare, cu atât prognozele pe care le vom obține vor avea șanse mai mari să se realizeze. Lucrând însă cu volume mari de date, vom genera costuri suplimentare pentru obținerea prognozelor. Stabilirea volumului de date astfel încât să obținem cele mai sigure prognoze, a fost și va rămâne o provocare. Orice decizie trebuie luată în cunoștință de cauză, bazată pe niște argumente. Rolul economistului, al inginerului este acela de a modela datele conform unui model matematic cunoscut.

Actualmente, statistica apare în cam toate domeniile: sondaje, teoria deciziilor, biologie, analiza populațiilor, vânzări, meteorologie (analiza inundațiilor, a precipitațiilor $\rightarrow$ vezi aici teoria valorilor extreme), teoria stocurilor, curs valutar, economie, medicină. Însă, statistica reprezintă aplicarea teoriei probabilităților în practică. De aceea, lucrarea este împărțită în două mari părți: teoria probabilităților și statistică matematică.

Teoria probabilităților a apărut ca urmare a dorinței de a maximiza profitul în cadrul jocurilor de noroc. Astfel, situațiile problemă de pe masa de joc au ajuns spre a fi studiate de către savanți precum Pascal, Fermat, Huygens, Bernoulli, Laplace și alții. Dar, punerea teoriei pe baze riguroase îi aparține lui Kolmogorov.

Interpretarea „în medie” îi aparține statisticii. Pornind de la analiza elementelor individuale ale unei colectivități, observate din punct de vedere a uneia sau mai multor caracteristici, statistica, reușește prin metode specifice, care au în spate un întreg aparat matematic să obțină prognoze asupra aspectelor care ne interesează. Există însă niște abateri de la medie, în plus sau în minus. Ideal este ca ele să fie cât mai mici. Exprimarea „în medie” nu trebuie scoasă din context. Să nu uităm faimoasa frază a lui Bernard Shaw: *„Dacă un om își ține capul într-o sobă încinsă iar picioarele într-un vas cu gheață, corpul său are o temperatură medie ideală.”*

Lucrarea poate fi utilă elevilor și profesorilor din ciclul liceal (a se vedea capitolul de probleme de numărare) și viitorilor ingineri respectiv economiști.

Fiecare capitol are un sumar teoretic urmat de probleme rezolvate și în final de probleme propuse.

Mulțumim pe această cale întregului colectiv al Departamentului de Matematică și Informatică al Facultății de Matematică și Informatică din Universitatea Transilvania din Brașov, domnilor prof. dr. Cristina Cismașiu, conf. dr. Eugen Păltânea și nu în ultimul rând d-lui prof. dr. Gabriel V. Orman care au contribuit la formarea noastră didactică dar și de cercetare din domeniul teoriei probabilităților și statisticii matematice.

CAPITOLUL 1

PROBLEME DE NUMĂRARE

1.1 Noţiuni introductive

Fie A o mulţime finită. Numărul elementelor lui A se numeşte **cardinalul lui A** şi se notează Card A. Dacă A este vidă, atunci ea nu are nici un element şi deci Card $A = 0$.

Pentru A şi B mulţimi finite avem următoarele proprietăţi:

1. Card $(A \cup B) =$ Card $A +$ Card $B -$ Card $(A \cap B)$;
2. Card $(A \cup B) =$ Card $(A \setminus B) +$ Card $(B \setminus A) +$ Card $(A \cap B)$
3. Card $(A \times B) =$ Card $A \cdot$ Card B

Propoziţia 1.1.1

Fie A şi B finite, nevide. Atunci numărul funcţiilor $f : A \to B$ este egal cu m^n, unde $m =$ Card B şi $n =$ Card A.

Propoziţia 1.1.2

Dacă A este finită cu Card $A = n, n \in \mathbb{N}$, atunci mulţimea submulţimilor lui A, notată cu $\mathcal{P}(A)$ are 2^n submulţimi.

1.2 Principiul produsului

Fie $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mulţimi finite cu $k_1, k_2, \ldots, k_n$ elemente, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$.

a) Atunci $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ este mulţime finită, iar

$$\text{Card } (A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \text{Card } A_1 \cdot \text{Card } A_2 \cdot \ldots \cdot \text{Card } A_n.$$

b) Dacă ne interesează în câte moduri putem forma elemente de forma $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ prin alegeri independente una de cealaltă, cele n elemente pot fi alese în $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$ moduri.

1.3 Principiul includerii şi al excluderii

Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sunt mulţimi finite, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, atunci

$$\text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card }(A_i) - \sum_{i<j} \text{Card }(A_i \cap A_j) +$$
$$+ \sum_{i<j<k} \text{Card }(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots + (-1)^{n-1}\text{Card }\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Am reamintit că numărul funcţiilor definite pe o mulţime finită A cu n elemente cu valori într-o mulţime finită B cu m elemente este m^n.

Dacă $f : A \to B$, Card $A = n$; Card $B = m$, $0 < n < m$, atunci numărul funcţiilor injective este A_n^k.

Dacă $m = n$, numărul funcţiilor bijective $f : A \to B$ este $n!$.

Dacă A şi B sunt mulţimi finite nevide de numere reale cu Card $A = n$; Card $B = m$, $0 < n < m$, atunci numărul funcţiilor strict crescătoare $f : A \to B$ este C_n^m. Acelaşi lucru şi pentru numărul funcţiilor strict descrescătoare.

Reamintim că numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente este C_n^k, unde $0 \leq k \leq n$ fiind numere naturale, iar dacă submulţimile sunt ordonate, atunci numărul submulţimilor cu k elemente ale unei mulţimi cu n elemente este A_n^k, $0 \leq n \leq k$.

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$
$$P_k = k!$$

1.4 Probleme rezolvate

1. Fie $f : A \to B$, Card $A = 6$ şi numărul funcţiilor care respectă această proprietate este 64. Aflaţi Card B, pentru A şi B finite.

Rezolvare:
Deoarece numărul funcţiilor $f : A \to B$, Card $A = m$, Card $B = n$ este n^m avem că $n^6 = 64 = 2^6$. Rezultă că $n = 2$, adică Card $B = 2$.

2. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{a, b, c, d\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(a) = 0$.

Rezolvare:
Având în vedere că $f(a)$ este fixat în 0, celelalte 3 valori din domeniu pot lua oricare din valorile din codomeniu, deci vom avea 4^3 funcţii.

3. Determinaţi numărul funcţiilor $f : \{a, b, c, d\} \to \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(a) = f(b)$.