Adriana CAȚARON

NUMERE COMPLEXE

Culegere de probleme și teste pentru elevii de liceu

Ediția a III-a

Editura Universității Transilvania din Brașov

2025

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa:	Str. Iuliu Maniu nr. 41A
	500091 Brașov
Tel.:	0268 476 050
Fax:	0268 476 051
E-mail:	editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81

ISBN **978-606-19-1783-9** (ebook)

Referent științific: Lector dr. Adelina MANEA

februarie 2025

Prefaţă

Această culegere de probleme se adresează tuturor elevilor de liceu, dar mai ales celor din clasa a X-a, având o importanţă deosebită în pregătirea şi perfecţionarea cunoştinţelor în domeniul numerelor complexe prin rezolvarea de probleme, ca o etapă necesară în realizarea performanţelor şcolare.

Fiecare paragraf începe cu o scurtă parte teoretică în care este sintetizată materia, după care se prezintă o serie de exerciţii rezolvate care permit elevilor să urmărească rezolvările detaliate, astfel încât aceștia pot verifica atât corectitudinea rezultatului obţinut, cât şi pașii parcurși pentru obţinerea rezultatului final.

Prin tratarea numerelor complexe sub formă algebrică şi trigonometrică şi, mai ales, prin folosirea notării exponenţiale, se completează abordarea din manualele de liceu.

Lucrarea prezintă o serie de teste grilă care permit familiarizarea elevilor cu itemii de tip alegere multiplă, dar și rezolvările cerințelor în vederea pregătirii examenului de bacalaureat și a redactării în concordanță cu cerințele actuale.

Această ediție a lucrării conține și o serie de aplicații în calculul vectorial, în trigonometrie și în geometria plană și analitică.

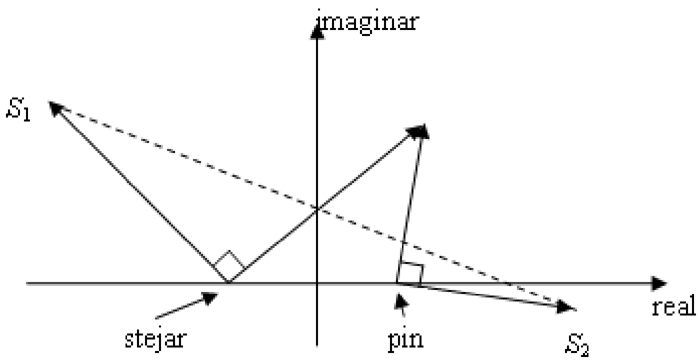
Cuprins

Introducere. Problema lui Gamow

În cartea sa *Unu, doi, trei... infinit – Fapte și speculații științifice,* George Gamow prezintă o problemă ingenioasă drept povestea unui tânăr aventurier, care descoperă printre hârtiile moştenite de la străbunicul său un pergament pe care scrie:

„Navighează până la ... grade latitudine nordică şi ... grade longitudine vestică, unde vei găsi o insulă pustie. În partea de nord a insulei este o pajişte, unde vei da de un stejar şi de un pin. Ceva mai încolo vei vedea o veche spânzurătoare, unde îi spânzuram cândva pe trădători. Mergi de la spânzurătoare spre stejar numărându-ţi paşii. Când ajungi la stejar, întoarce-te spre dreapta şi mergi acelaşi număr de paşi, apoi înfige un ţăruş în pământ. Întoarce-te apoi la spânzurătoare şi mergi spre pin numărându-ţi paşii. Când ai ajuns la pin, întoarce-te spre stânga cu un unghi drept şi mergi acelaşi număr de paşi. Înfige un alt ţăruş în pământ şi sapă la jumătatea distanţei dintre ţăruşi: comoara este acolo.”

La aceste instrucţiuni, Gamow mai adaugă două note: una, în care anunţă că a omis intenţionat latitudinea şi longitudinea locului, ca să nu-i aruncăm cartea şi să ne apucăm de săpat după comori, şi a doua, în care ne spune că ştie, bineînţeles, că stejarii şi pinii nu cresc pe insule pustii, dar că a schimbat şi felul copacilor pentru a păstra secret locul insulei.
Tânărul urmează instrucţiunile şi găseşte insula, stejarul şi pinul, dar nu şi spânzurătoarea! Dezamăgit că nu avea cum să localizeze comoara, tânărul pleacă înapoi resemnat, fără să fi văzut măcar un ban de aur pentru efortul



pe care-l depusese. Concluzia autorului este că tânărul ar fi găsit locul fără nici o problemă dacă s-ar fi priceput la numere complexe.

Prezentăm în continuare soluţia dată de P. Nahin acestei probleme.

Considerăm un sistem de coordonate în planul complex în care cei doi copaci se află pe axa reală în poziţiile +1 şi –1. Notăm cu $a + bi$ poziţia spânzurătorii, ca în figură Vom vedea că poziţia comorii nu depinde de a şi b, rezultat cel puţin neaşteptat.

Presupunem pentru început că sistemul de coordonate are originea în locul în care se găseşte stejarul. Vectorul având originea stejarul şi vârful spânzurătoarea este deci $(a + 1) + bi$. Pentru a localiza primul ţăruş trebuie să rotim acest vector cu $+90°$, adică să-l înmulţim cu i. Poziţia ţăruşului este deci $-b + (a + 1)i$, ceea ce în vechile coordonate devine $-b - 1 + (a + 1)i$.

Repetând operaţia pentru pin, poziţia spânzurătorii într-un sistem de coordonate care are originea în locul în care se găseşte pinul este $(a - 1) + ib$, iar vectorul corspunzător trebuie rotit cu $-90°$, deci înmulţit cu $-i$. Rezultatul este $b - (a - 1)i$, care, trecut în vechiul sistem de coordonate, devine $b + 1 - (a - 1)i$.

Comoara se găseşte la mijlocul distanţei dintre cei doi ţăruşi, deci poziţia ei este dată de:

$$\frac{-(b+1)+(a+1)i+(b+1)-(a-1)i}{2} = i.$$

Comoara se găseşte deci pe axa imaginară, la o distanţă de origine egală cu cea a celor doi copaci.

1 Forma algebrică a numerelor complexe

1.1 Definirea numerelor complexe

Fie mulţimea $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(a, b) | a, b \in \mathbb{R}\}$ înzestrată cu două operaţii numite adunarea şi înmulţirea, definite astfel:

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Pe $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ introducem relaţia de egalitate:

$(a, b) = (a', b') \Leftrightarrow a = a',\ b = b'$.

$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ este un corp comutativ numit *corpul numerelor complexe* şi se notează cu $\mathbb{C}$. Orice $z = (a, b)$ aparţinând lui $\mathbb{C}$ se numeşte *număr complex*.

Mulţimea $\mathbb{R} \times \{0\}$ este un subcorp al lui $\mathbb{C}$. Funcţia $\begin{matrix} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \{0\} \\ f(a) = (a, 0) \end{matrix}$ este un izomorfism de corpuri şi permite identificarea numărului complex $(a, 0)$ cu numărul real a. În plus, se obţine că $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. În particular, $(1,0) = 1$, $(0,1) = i$.

1.2 Parte reală, parte imaginară

Toate numerele complexe $z = (a, b)$ se scriu sub forma unică $z = a + ib$ cu *a* şi *b* numere reale.

$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0,1) \cdot (b, 0)$.

Cu notaţia $(0,1) = i$ şi identificările $(a, 0) = a$, $(b, 0) = b$, obţinem $(a, b) = a + ib$, numită *scrierea algebrică* a numărului complex *z*.

Numărul *a* se numeşte *partea reală* a numărului complex $z = (a, b)$ şi se notează $a = \operatorname{Re} z$, numărul *b* se numeşte *partea imaginară* şi se notează $b = \operatorname{Im} z$.

Operaţiile de adunare şi înmulţire definite mai sus se scriu în formă algebrică astfel:

- $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$
- $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$

Proprietăţile adunării şi înmulţirii din $\mathbb{R}$ se păstrează şi în $\mathbb{C}$. Putem scrie, de exemplu:

$$(1+i)(-1+2i)+8-2i$$
$$= 1\cdot(-1)+1\cdot 2i+i\cdot(-1)+i\cdot 2i+8-2i =$$
$$= -1+2i-i+2i^2+8-2i = -1+2i-i-2+8-2i$$
$$= 5-i,\ \text{cu } i^2=-1$$

Exerciţii rezolvate

R1.1. Să se determine partea reală şi partea imaginară a numărului $(3+4i)^2$.

Rezolvare. Scriem $(3+4i)^2 = 9-16+24i \Rightarrow \operatorname{Re} z=-7, \operatorname{Im} z = 24$.■

R1.2. Să se găsească numerele reale *x* şi *y* dacă:
$(3+i)x-(3-i)y = 2x-y+3i$.

Rezolvare. Se separă partea reală şi partea imaginară a numărului complex din membrul stâng şi apoi se egalează părţile reale, respectiv imaginare ale numerelor complexe din cei doi membri ai egalităţii:

$$\begin{cases} 3x-3y=2x-y \\ x+y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2y \\ 3y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}.■$$

1.3 Conjugatul unui număr complex

Numărul complex $\bar{z}=a-ib$ se numeşte *conjugatul* numărului complex *z*.

- Proprietăţile conjugării:
  - *z* este real dacă şi numai dacă $z=\bar{z}$
  - *z* este imaginar dacă şi numai dacă $z=-\bar{z}$
  - $\overline{(\bar{z})}=z$
  - $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$
  - $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$
  - $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$
  - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Exerciţii rezolvate

R1.3. Scrieţi sub formă algebrică numărul $\frac{3+2i}{5+3i}$.

Rezolvare. Folosind egalitatea $\frac{u}{v}=\frac{u\bar{v}}{v\bar{v}}$, obţinem:

$$\frac{(3+2i)(5-3i)}{(5+3i)(5-3i)}=\frac{15+6+10i-9i}{25+9}=\frac{21}{34}+\frac{1}{34}i.■$$

R1.4. Să se determine numerele complexe z astfel încât numărul $(z-1)(\bar{z}+i)$ să fie real.

Rezolvare. Deoarece $(z-1)(\bar{z}+i) \in \mathbb{R}$, putem scrie:

$(z-1)(\bar{z}+i) = \overline{(z-1)(\bar{z}+i)}$. Fie $z = a + bi$. Atunci:

$$(a-1+bi)(a-bi+i) = \overline{(a-1+bi)} \cdot \overline{(a+(1-b)i)} \Leftrightarrow$$
$$(a-1+bi)(a+(1-b)i) = (a-1-bi)(a-(1-b)i) \Leftrightarrow$$
$$(a-1)a + (a-1)(1-b)i + abi - b(1-b) =$$
$$= (a-1)a - (a-1)(1-b)i - abi - b(1-b) \Leftrightarrow$$

$2(a - ab - 1 + b + ab)i = 0$, de unde rezultă că $a + b = 1$.

Numerele căutate sunt $\{z \in \mathbb{C} | z = a + bi,\ a + b = 1\}$.■

1.4 Modulul unui număr complex

Pentru $z = a + bi$ cu $a, b \in \mathbb{R}$, numărul real $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ se numeşte *modulul* numărului complex z. Observăm că $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.

- Reguli de calcul:
  - $|\bar{z}| = |-z| = |z|$
  - $|z + z'| \leq |z| + |z'|$
  - $|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$
  - $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$
  - $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ pentru oricare z, z' nenule.

Exerciţii rezolvate

R1.5. Să se determine numărul complex z astfel încât

$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}$ şi $\left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$.

Rezolvare. Fie $z = a + bi$. Atunci:

$$\frac{|a+bi-4|}{|a+bi-8|} = 1 \Rightarrow \sqrt{(a-4)^2 + b^2} = \sqrt{(a-8)^2 + b^2} \Rightarrow$$

$a^2 - 8a + 16 = a^2 - 16a + 64 \Rightarrow 8a = 48 \Rightarrow a = 6$ şi

$\frac{|a-12+bi|}{|a+(b-8)i|} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\sqrt{(a-12)^2+b^2}}{\sqrt{a^2+(b-8)^2}} = \frac{5}{3}$. Înlocuindu-l pe a cu valoarea 6 şi ridicând la pătrat, obţinem

$$\frac{36 + b^2}{36 + (b-8)^2} = \frac{25}{9} \Rightarrow 324 + 9b^2 = 25 \cdot 36 + 25(b^2 - 16b + 64) \Rightarrow$$

$16b^2 - 400b + 2176 = 0 \Rightarrow b^2 - 25b + 136 = 0$ cu rădăcinile $b_1 = 17$ şi $b_2 = 8$. Rezultă că numerele complexe care verifică relaţia propusă sunt $z_1 = 6 + 17i$ şi $z_2 = 6 + 8i$.■

R1.6. Arătaţi că
$|z_1\overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$.

Rezolvare. Vom folosi egalitatea $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. Scriem:

$$(z_1\overline{z_2} + 1)(\overline{z_1}z_2 + 1) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) =$$
$$= z_1\overline{z_2 z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + 1 + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} =$$
$$= 1 + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = 1 + |z_2|^2 + |z_1|^2 + |z_1|^2|z_2|^2 =$$
.■

R1.7. Fie z, z' şi u numere complexe cu proprietatea $u^2 = zz'$. Arătaţi că $|z| + |z'| = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$.

Rezolvare. Ridicăm ambii membri ai egalităţii la pătrat:
$(|z| + |z'|)^2 = |z|^2 + 2|z||z'| + |z'|^2 = z\bar{z} + 2|u^2| + z'\overline{z'}$ şi, notând $z + z' = s$:

$$\left(\left|\frac{s}{2} - u\right| + \left|\frac{s}{2} + u\right|\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{s}{2} - u\right)\overline{\left(\frac{s}{2} - u\right)} + 2\left|\left(\frac{s}{2} - u\right)\left(\frac{s}{2} + u\right)\right| + \left(\frac{s}{2} + u\right)\overline{\left(\frac{s}{2} + u\right)} =$$
$$= \left(\frac{s}{2} - u\right)\left(\frac{\bar{s}}{2} - \bar{u}\right) + 2\left|\frac{s^2}{4} - u^2\right| + \left(\frac{s}{2} + u\right)\left(\frac{\bar{s}}{2} + \bar{u}\right) =$$
$$= \frac{s\bar{s}}{4} - \frac{s}{2}\bar{u} - u\frac{\bar{s}}{2} + |u|^2 + 2\left|\frac{s^2}{4} - zz'\right| + \frac{s\bar{s}}{4} + \frac{s}{2}\bar{u} + u\frac{\bar{s}}{2} + |u|^2 =$$
$$= \frac{s\bar{s}}{2} + 2|zz'| + 2\left|\frac{(z + z')^2 - 4zz'}{4}\right| =$$
$$= \frac{(z + z')(\bar{z} + \overline{z'})}{2} + 2|z||z'| + 2\left|\frac{(z - z')^2}{4}\right| =$$
$$= \frac{z\bar{z} + z\overline{z'} + z'\bar{z} + z'\overline{z'}}{2} + 2|z||z'| + 2\frac{z - z'}{2} \cdot \frac{\bar{z} - \overline{z'}}{2} = z\bar{z} + z'\overline{z'} + 2|z||z'|.$$■

1.5 Ecuaţii de gradul II cu coeficienţi reali. Rădăcina pătrată a unui număr complex

- Pentru toate numerele complexe a, soluţiile ecuaţiei $z^2 = a,\ z \in \mathbb{C}$ se numesc *rădăcinile pătrate ale lui a*. Toate numerele reale a nenule admit două rădăcini pătrate.

Dacă $a > 0$, rădăcinile pătrate ale lui a sunt $\sqrt{a}$ şi $-\sqrt{a}$.

Dacă $a < 0$, fie $b = \sqrt{-a}$; atunci $a = -b^2$ şi ecuaţia $z^2 = a$ este echivalentă cu $z^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow z^2 - (ib)^2 = 0$, deci $(z - ib)(z + ib) = 0$ cu soluţiile $i\sqrt{-a}$ şi $-i\sqrt{-a}$.

- Fie $a,\ b,\ c$ numere complexe cu $a \neq 0$ şi ecuaţia $az^2 + bz + c = 0,\ z \in \mathbb{C}$ de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Dacă $\Delta \neq 0$, ecuaţia admite două soluţii distincte. Pentru $\Delta > 0$, soluţiile sunt $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ şi $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, iar pentru $\Delta < 0$ cele două soluţii sunt $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ şi $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia admite o singură soluţie: $-\frac{b}{2a}$.

Exerciţii rezolvate

R1.8. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $z^2 + 3z + 3 = 0$

Rezolvare. Calculăm $\Delta = 9 - 4 \cdot 3 = -3 = \left(i\sqrt{3}\right)^2$. Ecuaţia are, deci, două soluţii în $\mathbb{C}$: $z_1 = \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}$ şi $z_2 = \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}$.■

R1.9. Rezolvaţi în $\mathbb{C}$ ecuaţia $z^2 - 2z\cos\theta + 1 = 0,\ \theta \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. Avem $\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$. Sunt posibile două cazuri, unde $k \in Z$:

- dacă $\theta \neq k\pi$, atunci $\Delta' < 0,\ \Delta' = (i\sin\theta)^2$ şi soluţiile ecuaţiei sunt $\cos\theta + i\sin\theta$ şi $\cos\theta - i\sin\theta$
- dacă $\theta = k\pi$, atunci $\Delta = 0$.

Pentru $\theta = 2k\pi$ ecuaţia se scrie $z^2 - 2z + 1 = 0 \Rightarrow (z-1)^2 = 0$ şi admite pe 1 ca rădăcină reală dublă.

Pentru $\theta = 2(k+1)\pi$ ecuaţia se scrie $z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 0$, care admite pe –1 ca rădăcină dublă. ■

R1.10. Să se rezolve ecuaţia $z^2 - (7+i)z + 14 + 5i = 0$.

Rezolvare. Calculam

$\Delta = (7+i)^2 - 4(14+5i) = 49 + 14i - 1 - 56 - 20i = -8 - 6i$.

Avem $\sqrt{-8-6i} \in \mathbb{C}$ şi, deci, $\sqrt{-8-6i} = a + bi$. Ridicând această expresie la pătrat, rezultă $\begin{cases} a^2 - b^2 = -8 \\ 2ab = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 + b_1 i = 1 - 3i \\ a_2 + b_2 i = -1 + 3i \end{cases}$, adică $z_1 = \frac{7+i+1-3i}{2} = 4 - i$ şi $z_2 = \frac{7+i-1+3i}{2} = 3 + 2i$.■

R1.11. Calculaţi rădăcinile pătrate ale lui $24 + 70i$.

Rezolvare. Ne propunem să determinăm numerele complexe z pentru care $z^2 = 24 + 70i$. Punând $z = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$, avem:

$(a+bi)^2 = 24+70i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=24 \\ 2ab=70 \end{cases}$.

În plus, $|z^2| = |24+70i| = \sqrt{24^2+70^2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{576+4900} \Rightarrow a^2+b^2=74.$

Atunci $(a+bi)^2 = 24+70i \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-b^2=24 \\ ab>0 \\ a^2+b^2=74 \end{cases}$. Adunând cele două ecuaţii, obţinem $2a^2=98 \Rightarrow a^2=49 \Rightarrow a=\pm 7$ şi b$=\pm 5$. Rădăcinile pătrate ale lui $24+70i$ sunt $7+5i$ şi $-7-5i$.■

1.6 Exerciţii propuse

Pentru exerciţiile 1-16, determinaţi partea reală şi partea imaginară a numerelor complexe:

1. $(4+3i)^2$ **2.** $(2+i)^2+(1-2i)^2$

3. $(2+i)(1-2i)$ **4.** $(1+i)^2-(1-i)^2$

5. $(4+3i)^3$ **6.** $(2+i)^3+(1-2i)^3$

7. $\frac{1}{5+3i}$ **8.** $\frac{1+i}{1-i}$

9. $\frac{3+2i}{3-2i}$ **10.** $\frac{3+i}{2-i}+\frac{2-i}{3+i}$

11. $\frac{i-7}{1+7i}+\frac{1-i}{1+i}$ **12.** $\frac{1+18i}{3+4i}+\frac{7-26i}{3-4i}$

13. $\frac{(-3+4i)(5-4i)}{3-2i}$ **14.** $\frac{(4-3i)(2+3i)}{5-3i}$

15. $\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$ **16.** $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}$

Pentru exerciţiile 17-20, fie $j=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Aduceţi la forma algebrică următoarele numere complexe:

17. $1+j+j^2$ **18.** $(1+j)^3+(1+j^2)^3$

19. $\frac{1+j}{1+j^2}$ **20.** $\frac{1+j}{(1-i)^2}+\frac{1-j}{(1+i)^2}$

Determinaţi numerele complexe z care îndeplinesc condiţiile propuse la exerciţiile 21-26:

21. $z-2\bar{z}=2+9i$ **22.** $3z=7-\bar{z}$

23. $\overline{(\bar{z}-2i)}=2z$ **24.** $\overline{(1+i)\bar{z}-1+i}=\bar{z}-i$

25. $z-2z\in\mathbb{R}$ **26.** $z-iz\in i\mathbb{R}$

Calculaţi modulul următoarelor numere complexe propuse la exerciţiile 27-30:

27. $17+51i$ **28.** $(7+35i)(3+2i)$

29. $\frac{7-35i}{3-2i}$ **30.** $\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}$

31. Fie $z_1,\ z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ astfel încât $Im(\overline{z_1}z_2) = Im(\overline{z_2}z_3) = Im(\overline{z_3}z_1) \neq 0$. Să se arate că $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 = 3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2)$.

32. Fie $a = 4k - 1,\ k \in \mathbb{N}$. Să se demonstreze că

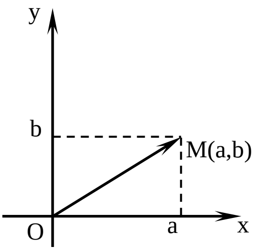
$$S_n = 1 - C_n^2 \cdot a + C_n^4 \cdot a^2 - C_n^6 \cdot a^3 + C_n^8 \cdot a^4 - \ldots$$

se divide cu 2^{n-1}, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

2.1 Afixul

În planul *P* fixăm un sistem de axe ortogonale *xOy*. Un punct $M(a,b)$ din planul *P* se numeşte *imaginea geometrică* a numărului complex $a+ib$, iar numărul $z=a+ib$ se numeşte *afixul* punctului *M*.



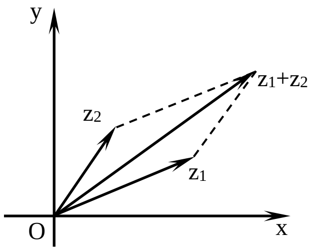
Numărului complex $z=a+ib$ i se poate pune în corespondenţă vectorul $\vec{z}=\overrightarrow{OM}$ care porneşte din origine şi are extremitatea în punctul *M*. Această corespondenţă este univocă.

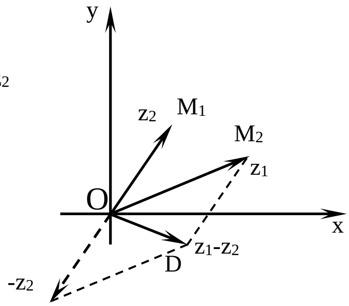
Se observă că $|z|=\left\|\overrightarrow{OM}\right\|$.

2.2 Interpretarea geometrică a adunării şi scăderii numerelor complexe

Fie $z_1=a_1+b_1 i$ şi $z_2=a_2+b_2 i$ afixele punctelor $M_1(a_1,b_1)$ şi $M_2(a_2,b_2)$.

Adunarea numerelor complexe z_1 şi z_2 se face geometric după regula paralelogramului.





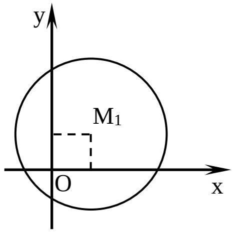
Pentru a da o interpretare geometrică scăderii z_1-z_2, o putem gândi ca suma $z_1+(-z_2)$.

Punctul D reprezintă imaginea geometrică a diferenţei $z_1 - z_2$. Cum $OD = |z_1 - z_2| = M_1M_2$, deducem că lungimea segmentului M_1M_2 determinat de imaginile a două numere complexe este dată de relaţia:

- $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$.
- Dacă z_0 este un număr complex dat şi $r > 0$, atunci mulţimea punctelor din planul complex ce satisfac condiţia $|z - z_0| < r$ este formată din interiorul cercului $C(z_0, r)$ cu centrul în z_0 şi de rază r.
- Punctele din planul complex ce satisfac condiţia $|z - z_0| \geq r$ sunt situate în exteriorul sau pe cercul $C(z_0, r)$.

Exerciţii rezolvate

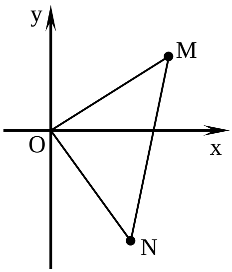
R2.1. Reprezentaţi în planul complex mulţimea punctelor de afix z pentru care$|z - 1 - i| \leq 4$.



Rezolvare. Fie M imaginea geometrică a numărului complex z şi M_1 imaginea geometrică a lui $1 + i$. Semnificaţia geometrică a relaţiei din ipoteză este aceea că distanţa de la $M(z)$ la $M_1(1,1)$ este mai mică sau egală cu 4. Punctele căutate se află deci în interiorul sau pe cercul cu centrul în M_1 şi de rază 4.■

R2.2. Fie punctul M de afix $3 + 2i$ şi N de afix $2 - 3i$. Demonstraţi că triunghiul OMN este dreptunghic.

Rezolvare. Se calculează lungimile laturilor.



$OM = |3 + 2i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$

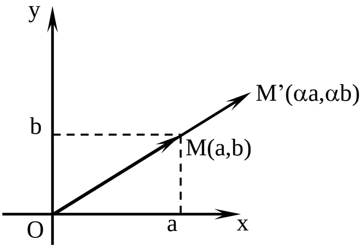
$ON = |2 - 3i| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$.

$MN = |3 + 2i - (2 - 3i)| = |1 + 5i| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$.

Cum $OM^2 + ON^2 = MN^2$, rezută conform reciprocei teoremei lui Pitagora, că triunghiul este dreptunghic.■

2.3 Interpretarea geometrică a înmulţirii unui număr complex cu un număr real

Fie $\alpha \in \mathbb{R}$ şi $z = a + ib$ având imaginea geometrică $M(z)$. Atunci αz este afixul punctului M pentru care$\overrightarrow{OM}\,' = \alpha\,\overrightarrow{OM}$.



Fie punctele $A(z_1)$, $B(z_2)$, $M(z)$ trei puncte în plan. Condiţia ca punctele

A, *M*, *B* să fie coliniare este ca vectorii $\overrightarrow{AM}$ şi $\overrightarrow{AB}$ să fie coliniari, ceea ce este echivalent cu$\overrightarrow{AM} = \alpha\, \overrightarrow{AB}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Cum $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, rezultă:

$\overrightarrow{AM} = \alpha\, \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (1-\alpha)\, \overrightarrow{OA} + \alpha\, \overrightarrow{OB} \Rightarrow z = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2$.

Condiţia de coliniaritate a punctelor *A*, *M*, *B* se mai poate scrie astfel: $\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \in \mathbb{R}^*$.

Exerciţiu rezolvat

R2.3. Să se arate că imaginile geometrice ale numerelor complexe $z_1 = -1-2i$, $z_2 = 1+4i$, $z_3 = 2+7i$ sunt coliniare.

Rezolvare. Scriem:

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{1+4i+1+2i}{2+7i+1+2i} = \frac{2+6i}{3+9i} = \frac{2(1+3i)}{3(1+3i)} = \frac{2}{3} \in \mathbb{R}.$$

Altfel: $A_1(z_1)$, $A_2(z_2)$, $A_3(z_3)$ sunt coliniare, adică:

$$A_1A_2 + A_2A_3 = A_1A_3 \Leftrightarrow |z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| = |z_1 - z_3|$$

Avem:

$$|z_1 - z_2| = |-1-2i-1-4i| = |-2-6i| = \sqrt{4+36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

$$|z_2 - z_3| = |1+4i-2-7i| = |-1-3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$$

$$|z_1 - z_3| = |-1-2i-2-7i| = |-3-9i| = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

care verifică relaţia. ■

2.4 Exerciţii propuse

Pentru exerciţiile 1-6, determinaţi mulţimea punctelor *M* de afix *z* care verifică următoarele condiţii:

1. $|z-1| = |z|$

2. $|z-1| = |z-i|$

3. $z - \bar{z} = 0$

4. $|z-1| = 1$

5. $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0$

6. $(2+i)^3 + (1-2i)^3 = 0$

7. Fie $\varepsilon = cos\frac{2\pi}{3} + i\, sin\frac{2\pi}{3}$. Arătaţi că dacă $|z-\varepsilon| \le 1$ şi $|z-\varepsilon^2| \le 1$, atunci $|z| \le 1$.

3 Forma trigonometrică a numerelor complexe

3.1 Argumentul

Fie $z = a + bi$ un număr complex diferit de zero, dat sub formă algebrică şi $M(z)$ imaginea lui z în planul P. Notând cu $r = |z|$ distanţa de la O la M şi cu $\phi = arg\, z$ unghiul cuprins între 0 şi 2π făcut de *OM* cu *Ox*, măsurat în sensul invers al acelor de ceasornic, avem: $\begin{cases} a = r\cos\phi \\ b = r\sin\phi \end{cases}$, $\phi \in [0,2\pi)$. Numărul $\phi = arg\, z$ se numeşte *argumentul principal* al numărului complex *z*. Notăm cu Arg*z* $= \{arg\, z + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ mulţimea tuturor argumentelor lui *z*.

- Scrierea $z = r(\cos\phi + i\sin\phi)$, $\phi \in [0,2\pi)$ se numeşte *forma trigonometrică* a numărului z. Pentru $z \neq 0$, avem: $\begin{cases} r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \phi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} + k\pi \end{cases}$,

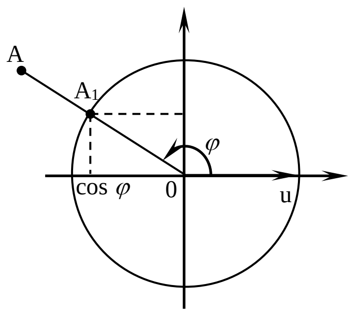
unde: $k = \begin{cases} 0, \text{ dacă } M(a,b) \text{ este în cadranul I} \\ 1, \text{ dacă } M(a,b) \text{ este în cadranul II sau III.} \\ 2, \text{ dacă } M(a,b) \text{ este în cadranul IV} \end{cases}$

Interpretare geometrică

Fie *C* cercul trigonometric de centru *O* şi A_1 punctul de pe cerc de afix $\cos\phi + i\sin\phi = \frac{z}{|z|}$. Notăm $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1}\right) = \phi$. Dar $z_{A_1} = \frac{z}{|z|} \Rightarrow |z| \cdot z_{A_1} = z$

$\Rightarrow |z| \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA}$.

Punând $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1}\right)$, avem $arg\, z = \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA}\right)$.



3.2 Operaţii cu numere complexe scrise sub formă trigonometrică

Fie numerele complexe $z = r(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)$,
$z_1 = r_1(cos\,\phi_1 + i\,sin\,\phi_1)$ şi $z_2 = r_2(cos\,\phi_2 + i\,sin\,\phi_2)$. Atunci:

- $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[cos(\phi_1 + \phi_2) + i\,sin(\phi_1 + \phi_2)]$
- $z^n = r^n(cos\,n\,\phi + i\,sin\,n\,\phi)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\phi_1 - \phi_2) + i\,sin(\phi_1 - \phi_2)]$
- $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[cos\frac{\phi+2k\pi}{n} + i\,sin\frac{\phi+2k\pi}{n}\right],\ k = 0, \dots, n-1$

3.3 Aplicaţii în geometrie

$arg(z_1 \cdot z_2) = arg\,z_1 + arg\,z_2$. Atunci $arg\frac{z_2}{z_2} + arg\,z_2 = arg\left(\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right) = arg\,z_1$, adică $arg\frac{z_1}{z_2} = arg\,z_1 - arg\,z_2$.

Dându-se trei puncte *A*, *B* şi *C* de afixe z_A, z_B respectiv z_C cu $z_A \neq z_B$ şi $z_A \neq z_C$, atunci:

$$arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_A - z_B}\right) = arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg(z_C - z_A) - arg(z_B - z_A) =$$

$$= (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AB}, \vec{u}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Exerciţii rezolvate

R3.1. Fie $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ şi $z_2 = 1 - i$.

a) Scrieţi z_1, z_2 şi $\frac{z_1}{z_2}$ sub formă trigonometrică

b) Deduceţi valorile pentru $cos\frac{\pi}{12}$ şi $sin\frac{\pi}{12}$

c) Rezolvaţi ecuaţia $(\sqrt{6} + \sqrt{2})\,cos\,x + (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,sin\,x = 2,\ x \in \mathbb{R}$.

Rezolvare. a) $|z_1| = \sqrt{\frac{6}{4} + \frac{2}{4}} = \sqrt{2}$. Argumentul lui z_1 este definit prin: $cos\,\phi_1 = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $sin\,\phi_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$, deci $\phi_1 = -\frac{\pi}{6}$. În consecinţă, $z_1 = \sqrt{2}\left(cos\frac{11\pi}{6} + i\,sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

$|z_2| = \sqrt{2}$ şi argumentul său ϕ_2 este definit prin $cos\,\phi_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ şi $sin\,\phi_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, deci:

$\varphi_2 = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow z_2 = \sqrt{2}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)$. Obţinem:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)\right) = cos\frac{\pi}{12} + i\,sin\frac{\pi}{12}$.

b) Calculăm $\frac{z_1}{z_2}$ direct sub formă algebrică:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4} =$$

$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Comparând cu rezultatul de la punctul a, prin identificare obţinem $cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ şi $sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

c) Vom face să apară $cos\frac{\pi}{12}$ şi $sin\frac{\pi}{12}$ în loc de $\sqrt{6}+\sqrt{2}$ şi $\sqrt{6}-\sqrt{2}$. Scriem:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}cos\,x + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}sin\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow cos\frac{\pi}{12}cos\,x + sin\frac{\pi}{12}sin\,x = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow cos\left(x-\frac{\pi}{12}\right) = cos\frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}+2k\pi$ sau $x = \frac{5\pi}{12}+2k\pi$ sau $x = -\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.■

R3.2. i) Calculaţi modulul şi argumentul lui $1+i$. Deduceţi $(1+i)^8$.
ii) Calculaţi $(1+i)^8$ cu formula binomului lui Newton şi deduceţi valorile sumelor $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8$ şi $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7$.
iii) Verificaţi aceste rezultate calculând coeficienţii $C_8^k,\ 0\le k\le 8$ cu ajutorul triunghiului lui Pascal.

Rezolvare. i) $r = |1+i| = \sqrt{2}$ şi $cos\,\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $sin\,\phi = \frac{\sqrt{2}}{2}$, deci $\phi = \frac{\pi}{4}$. Atunci $1+i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow (1+i)^8 = (\sqrt{2})^8\left(cos\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(8\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right)$, deci $(1+i)^8 = 16$.

ii) $(1+i)^8 = C_8^0 + iC_8^1 + i^2C_8^2 + \ldots + i^7C_7^8 + i^8C_8^8$ care se mai scrie $(1+i)^8 = \sum_{k=0}^{8} C_8^k i^k$. Cum $i^2 = -1$, $i^4 = 1$, $i^6 = -1$, iar $i^3 = -i$, $i^5 = i$, $i^7 = -i$ sau, mai general, $i^{2k} = (-1)^k$ şi $i^{2k+1} = (-1)^k i$, formula se mai scrie $(1+i)^8 = C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 + i(C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7)$. Din i), identificând partea reală şi partea imaginară obţinem:
$C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 16$ şi $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 0$.
iii) Triunghiul lui Pascal se scrie:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Atunci $C_8^0 - C_8^2 + C_8^4 - C_8^6 + C_8^8 = 1 - 28 + 70 - 28 + 1 = 16$ şi $C_8^1 - C_8^3 + C_8^5 - C_8^7 = 8 - 56 + 56 - 8 = 0.$■

R3.3. Dându-se punctele $A(1,2)$, $B(5,-2)$ şi $B'(-2,-2)$ arătaţi că AB şi AB' sunt drepte perpendiculare.

Rezolvare. $z_A = 1 + 2i$ este afixul lui *A*, $z_B = 5 - i$ este afixul lui *B*, iar $z_{B'} = -2 - 2i$ este afixul lui B'. Atunci:

$$\frac{z_{B'}-z_A}{z_B-z_A} = \frac{-2-2i-1-2i}{5-i-1-2i} = \frac{-3-4i}{4-3i} = \frac{(-3-4i)(4+3i)}{25} = \frac{-25i}{25} = -i.$$

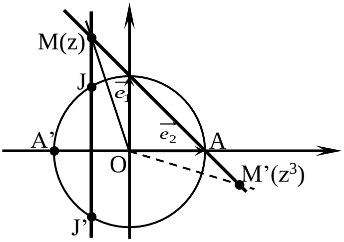
Obţinem $arg\left(\frac{z_{B'}-z_A}{z_B-z_A}\right) = arg(-i) = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

În concluzie, AB şi AB' sunt perpendiculare. ■

R3.4. Considerăm un plan raportat la reperul ortonormal $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Determinaţi mulţimea *L* de puncte *M* de afix *z* astfel încât punctele *A(1)*, *M(z)* şi $M'(z^3)$ să fie coliniare.

Rezolvare. Remarcăm mai întâi că dacă două dintre puncte coincid, atunci *A*, *M*, M' sunt coliniare. Dacă $M = A$, atunci $z = 1$. Pentru $M' = A$ avem $z^3 = 1 \Leftrightarrow z = 1$ sau $z = j$ sau $z = j^2$. Am notat cu *j* rădăcina de ordin 3 a unității $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Pentru $M' = M$, avem $z^3 = z \Leftrightarrow z(z^2 - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$ sau $z = 1$ sau $z = -1$. Atunci punctele *O*, *A*, *A'*, *J* şi J' de afixe respectiv 0, 1, -1, j şi j^2 aparţin mulţimii de puncte căutate.

Pentru M' diferit de *O*, *A*, *A'*, *J* sau J' punctele *A*, *M*, M' sunt două câte două distincte şi sunt coliniare dacă şi numai dacă $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}\right) = 0(\pi)$,



adică $\frac{z^3-1}{z-1}$ este număr real.

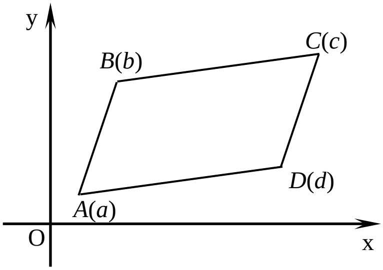
Dar $\frac{z^3-1}{z-1} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 + z + 1 \in \mathbb{R}$. Fie $z = x + yi$ cu $x,\ y \in \mathbb{R}$. Atunci $z^2 + z + 1 = x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y)$, deci $z^2 + z + 1 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$y(2x+1)=0$, adică $y=0$ sau $x=-\frac{1}{2}$. Observăm că punctele J şi J' sunt pe dreapta $d: x=-\frac{1}{2}$, iar punctele *O*, *A*, A' sunt pe dreapta $d': y=0$. Mulţimea de puncte căutată este deci reuniunea dreptelor $d: x=-\frac{1}{2}$ şi $d': y=0$.■

R3.5. a) Arătaţi că pentru toate cuplurile (z, z') de numere complexe avem $|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$.
b) Deduceţi că într-un paralelogram *ABCD* există relaţia:
$AC^2+BD^2=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Rezolvare. Reguli de calcul utilizate: $|z|^2=z\cdot\bar{z}$, $\overline{z+z'}=\bar{z}+\overline{z'}$, $\overline{(-z)}=-\bar{z}$.

a) Scriem: $|z+z'|^2=(z+z')\overline{(z+z')}=z\bar{z}+\overline{zz'}+z'\bar{z}+z'\overline{z'}$. Înlocuind z' cu $-z'$ rezultă $|z-z'|^2=z\bar{z}+z\left(\overline{-z'}\right)-z'\bar{z}-z'\left(\overline{-z'}\right)\Rightarrow$
$\Rightarrow |z+z'|^2+|z-z'|^2=2z\bar{z}+2z'\overline{z'}=2(|z|^2+|z'|^2)$



b) $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, de unde obţinem $d-a=c-b$ şi $b-a=c-d$. Notăm $z=d-a=c-b$ şi $z'=b-a=c-d$, de unde rezultă $z+z'=c-a$ şi $z-z'=d-b\Rightarrow$
$\Rightarrow |c-a|^2+|d-b|^2=$
$=|d-a|^2+|c-b|^2+|b-a|^2+|c-d|^2$■

3.4 Exponenţiala imaginară

Fie θ un număr real. Notăm $e^{i\theta}$ numărul complex definit prin $e^{i\theta}=cos\,\theta+i\,sin\,\theta$. Cum $e^{-i\theta}=cos\,\theta-i\,sin\,\theta$, făcând diferenţa celor două relaţii membru cu membru se obţin

- Formulele lui Euler: $cos\,\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ şi $sin\,\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}$.
- Scrierea exponenţială a unui număr complex nenul *z* este:

$z=|z|e^{i\,arg\,z}$, unde $arg\,z=\theta$.

- Observăm că $\left|e^{i\theta}\right|=\sqrt{cos^2\theta+sin^2\theta}=\sqrt{1}=1$ şi reţinem că toate numerele complexe de modul 1 se scriu sub forma $e^{i\theta}$, $\theta\in\mathbb{R}$.

Exemple:

$$e^{i\frac{\pi}{2}}=cos\frac{\pi}{2}+i\,sin\frac{\pi}{2}=i$$

$$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$$

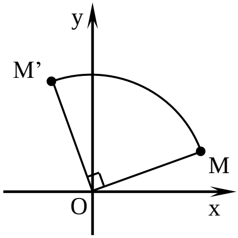
$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- Proprietăţi:

- $e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{ni\theta}$

R3.6. i) Fie $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ şi z un număr complex cu proprietatea $\bar{z} = jz^2$. Calculaţi modulul lui z.
ii) Deduceţi soluţiile ecuaţiei $\bar{z} = jz^2,\ z \in \mathbb{C}$.
Rezolvare. i) Folosind notaţia exponenţială a unui număr complex, îl scriem pe $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, j având modulul 1. Cum pentru orice număr complex z avem $|\bar{z}| = |z|$, egalitatea din ipoteză devine $|z| = |j| \cdot |z^2| \Rightarrow |z| = |z|^2$. Atunci $|z|(|z| - 1) = 0 \Rightarrow |z| = 0$ sau $|z| = 1$.
ii) Dacă z este soluţie a ecuaţiei $\bar{z} = jz^2$, atunci rezultă conform i) că $z = 0$ sau $z = e^{i\theta},\ \theta \in \mathbb{R}$. Reciproc, 0 este evident o soluţie a ecuaţiei. Pentru θ real, $e^{i\theta}$ este soluţie dacă şi numai dacă $e^{-i\theta} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{2i\theta}$, adică $e^{3i\theta} = e^{-i\frac{2\pi}{3}}$, egalitate adevărată pentru acei $k \in \mathbb{Z}$ pentru care $3\theta = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, adică $\theta = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$. Ecuaţia are deci trei soluţii de forma $e^{i\theta}$, în funcţie de k: pentru $k = 3p,\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{-i\frac{2\pi}{9}}$, pentru $k = 3p + 1,\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{i\frac{4\pi}{9}}$, pentru $k = 3p + 2,\ p \in \mathbb{Z} \Rightarrow e^{i\frac{10\pi}{9}}$.
Mulţimea soluţiilor ecuaţiei propuse este: $\left\{0, e^{-\frac{2\pi i}{3}}, e^{\frac{4\pi i}{9}}, e^{\frac{10\pi i}{9}}\right\}$.

Dacă α este un număr real, transformarea care, unui punct M de afix z îi asociază un punct M' de afix $e^{i\alpha}z$ este rotaţia de centru O şi unghi α.



Exemplu: Fie $M(z)$ şi $M(z')$ cu $z' = iz$. Forma exponenţială a lui z' este $iz = e^{i\frac{\pi}{2}}z$, deci M' este imaginea lui M prin rotaţia de centru O şi unghi $\frac{\pi}{2}$.■

3.5 Rădăcinile de ordinul *n* ale unităţii

Fie n un număr natural nenul. Se spune că numărul complex z este o rădăcină de ordinul n a unităţii dacă $z^n = 1$.
Discutăm cazul particular $n = 3$. Fie $z = |z|e^{i\theta}$ un număr complex cu $r = |z|$ şi θ real. Atunci $z^3 = r^3 e^{3i\theta}$. z este o rădăcină cubică complexă a unităţii dacă şi numai dacă $r^3 = 1$ şi $3\theta = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ sau $z = 1$ şi $\theta = \frac{2k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$. Rădăcinile cubice complexe ale unităţii sunt, deci, numerele $z_k = e^{\frac{2k\pi i}{3}},\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le 2$. În notaţia clasică $j = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, cele trei rădăcini cubice complexe ale unităţii sunt 1, j şi j^2. Imaginile lor în planul complex sunt vârfurile unui triunghi echilateral înscris în cercul trigonometric.
În general, se demonstrează analog că există n rădăcini de ordinul n ale unităţii, şi anume numerele $e^{\frac{2k\pi i}{n}},\ k \in \mathbb{Z},\ 0 \le k \le n-1$. Imaginile lor în planul complex formează un poligon regulat cu n laturi, înscris în cercul trigonometric.

3.6 Exerciţii propuse

Pentru exerciţiile 1-14, calculaţi modulul şi argumentul numerelor complexe propuse şi scrieţi-le sub formă trigonometrică:

1. -3
2. $i\sqrt{2}$
3. $-2i$
4. $-1+i$
5. $\sqrt{3}+i$
6. $\frac{3}{1-i}$
7. $\frac{\sqrt{2}}{1+i}$
8. $\frac{1}{1+i\sqrt{3}}$
9. $\frac{(1+i)^3}{1-i} + \frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}$
10. $\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}$
11. $\frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}}$
12. $\frac{3+7i}{2-5i}$
13. $\frac{9\sqrt{3}+3i}{2+i\sqrt{3}}$
14. $\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)}{1-i}$

Pentru exerciţiile 15-18, scrieţi numerele propuse sub formă trigonometrică:

15. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\right)^3$
16. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{2004}$
17. $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{12}}{(1+i)^{20}} - \frac{(-1-i\sqrt{3})^{12}}{(1-i)^{20}}$
18. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^p},\ n,p \in \mathbb{N}$

Pentru exerciţiile 19-22, scrieţi rădăcinile cubice complexe ale numerelor:

19. -8 **20.** $-1+i$ **21.** $\sqrt{3}+i$ **22.** $\frac{3+7i}{2-5i}$

Pentru exerciţiile 23-26, scrieţi rădăcinile de ordinul 4 complexe ale numerelor:

23. -1 **24.** $1+i$ **25.** $\sqrt{3}+i$ **26.** $\frac{j^2}{1+j}$

Pentru exerciţiile 27-28, ştiind că $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{i\theta n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\theta \in \mathbb{R}$, deduceţi forma algebrică a numerelor:

27. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2005}$ **28.** $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{2004}$

29. Fie *A*, *B*, *C* punctele de afixe respectiv $z_1 = -\sqrt{2}$, $z_2 = 1+i$, $z_3 = 1-i$.

a) Determinaţi un număr real θ pentru care $z_1 = e^{i\theta} z_2$

b) Calculaţi $z_1 - z_2$ şi $z_3 - z_1$ în funcţie de z_1 şi $e^{i\theta}$

c) Determinaţi modulul şi argumentul lui $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}$ şi deduceţi măsura unghiului $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right)$.

30. Fie *A*, *B*, *C*, *D* patru puncte în plan. Pe laturile patrulaterului *ABCD* se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele *APB*, *CQB*, *CRD*, *ASD* pentru care$\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RC}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}\right) = \frac{\pi}{2}$. Arătaţi că *PQRS* este paralelogram.

31. Pe înălţimea *AD* a triunghiului *ABC* se consideră punctul *H*. Să se arate că proiecţiile lui *D* pe dreptele *BA*, *BH*, *CA*, *CH* determină un patrulater inscriptibil.

32. Fie un triunghi echilateral *ABO* cu centrul *S* şi un alt triunghi echilateral $A'B'O$, având comun cu primul triunghi vârful *O*, cu $A' \neq S$ şi $B' \neq S$, astfel încât unghiurile $A'OB'$ şi AOB să aibă aceeaşi orientare. Dacă *M* este mijlocul lui $A'B$ şi *N* mijlocul lui AB', să se demonstreze că triunghiurile $SB'M$ şi $SA'N$ sunt asemenea.

4 Teste

Testul 1

1. Partea reală a numărului $\frac{(1+i)^2}{2-i} + \frac{(1-i)^2}{2+i}$ este

a) 0 b) $-\frac{4}{5}$ c) –4 d) $\frac{4}{5}$

2. Argumentul numărului complex $\frac{2}{1+i}$ este:

a) 0 b) $-\frac{4}{5}$ c) –4 d) $\frac{4}{5}$

3. Rădăcinile pătrate ale numărului complex $7-24i$ sunt:

a) $4-3i,\ -4+3i$ b) $4+3i,\ 4-3i$
c) $2-5i,\ -2+5i$ d) $2+5i,\ -2+5i$

4. Numerele complexe *z* pentru care $(z-2)(\bar{z}-i)$ este real sunt:

a) $z = a - \frac{2+a}{2}i,\ a \in \mathbb{R}$ b) $z = 2b+2+bi,\ b \in \mathbb{R}$
c) $z = c+i,\ c \in \mathbb{R}$ d) $z = d+2+\frac{d}{4}i,\ d \in \mathbb{R}$

5. Fie *A*, *B*, *C* imaginile respective ale numerelor complexe 1, $-1+2i$ şi $-1-2i$. Triunghiul ale cărui vârfuri sunt *A*, *B*, *C* este:

a) isoscel b) dreptunghic c) echilateral d) dreptunghic isoscel

Testul 2

1. Puneţi rezultatul calculului $(2+i)^3$ sub formă algebrică

a) $2+11i$ b) $14+11i$ c) $2+13i$ d) $18+12i$

2. Rădăcinile de ordinul 3 ale numărului $2+11i$ sunt:

a) $2+i, -1-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right), -1+\frac{\sqrt{3}}{2}+i\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$
b) $3+i,\ i(3+i),\ -(3+i)$
c) $2-i,\ i(2-i),\ -(2-i)$
d) $3-i,\ i(3-i),\ -(3-i)$

3. Se consideră numerele complexe $z_1 = x-4+i(y+5)$ şi $z_2 = x+4+i(1-y)$, unde *x* şi *y* sunt numere reale. Fie *M* punctul de afix *z* din planul complex. Coordonatele lui *M* pentru care $z_1 = 3z_2$ sunt:

a) $M\left(-8;-\frac{1}{2}\right)$ b) $M\left(8;-\frac{1}{2}\right)$ c) $M\left(6;\frac{1}{2}\right)$ d) $M(4;-1)$

4. Fie numărul complex $z=\sqrt{3}-i$. Modulul şi argumentul lui *z* sunt:

a) 2 şi $-\frac{\pi}{3}$ b) 2 şi $\frac{\pi}{6}$ c) 2 şi $-\frac{\pi}{6}$ d) $\sqrt{10}$ şi $\frac{\pi}{3}$

5. Numărul de soluţii ale ecuaţiei $2iz + 3 + i = z - iz$ este:

a) 0 b) 1 c) 2 d) o infinitate

Testul 3

1. Să se determine toate numerele complexe $z \in \mathbb{C}$ care verifică ecuaţia $|z| - z = 1 + 2i$

a) $z = -\frac{1}{2} + i$ b) $z = \frac{3}{2} - 2i$

c) $z_1 = -\frac{1}{2} + i,\ z_2 = \frac{3}{2} - 2i$ d) $z_1 = -\frac{1}{2} - i,\ z_2 = \frac{3}{2} + 2i$

2. Determinaţi parametrul real α astfel încât numărul $\frac{1-i\sqrt{3}}{\alpha-(\alpha+1)i}$ să fie real:

a) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

3. Fie numărul complex $z = -1 + i$. Care dintre următoarele relaţii este adevărată:

a) $z = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $z^4 \neq 4(cos\,3\,\pi + i\,sin\,3\,\pi)$

c) $z^4 = -4$ d) $z^4 = -8$

4. Rădăcinile de ordinul 2 ale lui $-2i$ sunt:

a) $z_1 = 1 + i,\ z_2 = -1 - i$ b) $z_1 = 1 - i,\ z_2 = -1 + i$

c) $z_1 = 2 + i,\ z_2 = -2 - i$ d) $z_1 = 2 - i,\ z_2 = -2 + i$

5. Fie ecuaţia $z^8 - (1 - i)z^4 - i = 0$. Stabiliţi-i numărul rădăcinilor reale:

a) nici o rădăcină reală b)o rădăcină reală

c) două rădăcini reale d) trei rădăcini reale

Testul 4

1. Soluţiile sistemului $\begin{cases}(1+i)z + (1-i)z' = 0 \\ 2iz + z' = -1\end{cases}$ sunt:

a) $z = -\frac{1}{3}i,\ z' = -\frac{1}{3}$ b) $z = i,\ z' = 1$

c) $z = \frac{3}{2} + 2i,\ z' = -2$ d) $z = \frac{1}{2}i,\ z' = -\frac{1}{2}$

2. Fie $z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$ cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ şi $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \neq -1$. Atunci $Im\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{1+z_1z_2z_3}$ este egal cu:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

3. Numerele naturale n pentru care are loc egalitatea $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = 2$ sunt:

a) $\{0,1\}$ b) $\{1,3\}$

c) $n = 3k,\ k \in \mathbb{N}$ d) $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$

4. Se consideră punctele $A(1,2)$, $B(5,-1)$, $D(5,5)$. Precizaţi natura triunghiului *ABD*:

a) isoscel b) dreptunghic c) echilateral d) dreptunghic isoscel

5. Pentru punctele de la exerciţiul precedent, determinaţi punctul *C* pentru care *ABCD* este paralelogram:

a) $C(0,0)$ b) $C(9,2)$ c) $C(11,2)$ d) $C(7,4)$

Testul 5

1. Care este natura patrulaterului obţinut prin reprezentarea în planul complex a soluţiilor ecuaţiei $(z^2+4)(z^2-2z+5)=0$?

a) dreptunghi b) pătrat

c) romb d) paralelogram

2. Soluţiile ecuaţiei $z^3 = 1+i$ sunt:

a) $z_k = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{5}\right),\ 0 \le k \le 2$

b) $z_k = \sqrt[5]{2}\left(cos\frac{2k\pi}{7} + i\,sin\frac{2k\pi}{7}\right),\ 0 \le k \le 2$

c) $z_k = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right),\ 0 \le k \le 2$

d) $z_k = \sqrt[3]{2}\left(cos\frac{2k\pi}{3} + i\,sin\frac{2k\pi}{3}\right),\ 0 \le k \le 2$

3. Numerele complexe *z* pentru care $\frac{z-i-1}{iz+1}$ este real se află pe:

a) dreapta de ecuaţie $y = \frac{1}{3}x+1$ b) cercul de centru $O\left(\frac{1}{2},1\right)$ şi rază $\frac{1}{2}$

c) axa *Ox* d) axa *Oy*

4. Fiind date numerele complexe $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ cu acelaşi modul, numărul $z = \frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)\cdot\ldots\cdot(z_{n-1}+z_n)(z_n+z_1)}{z_1z_2\cdot\ldots\cdot z_n}$ este:

a) real b) imaginar c) nul d) pur imaginar

5. Fie $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$ trei puncte ale cercului $C(0,r),\ r>0$. Atunci punctul de afix $\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}$ aparţine:

a) cercului $C(0,r)$

b)) interiorului cercului $C(0,r)$

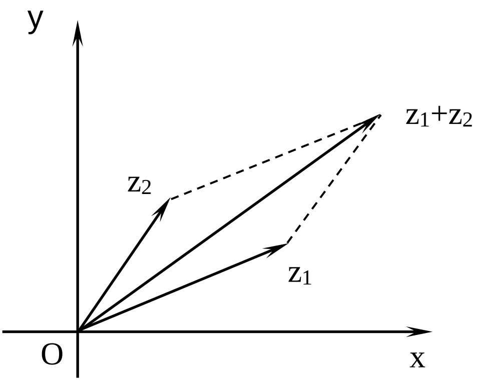
c) exteriorului $C(0,r)$

d) cercului $C(0,r^3)$

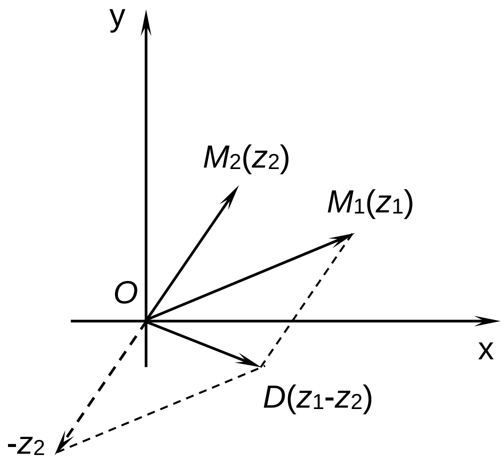
5 Aplicații ale numerelor complexe

5.1 Aplicații în calculul vectorial

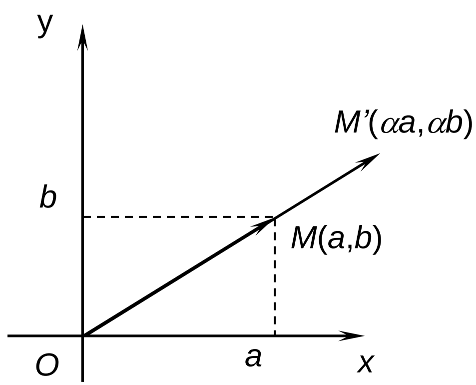
Descoperirea făcută de Caspar Wessel (1797) în legătură cu reprezentarea numerelor complexe prin puncte în plan a contribuit la dezvoltarea unor tehnici utile în demonstrarea unor teoreme de geometrie.
Tratarea numerelor complexe ca vectori a făcut posibilă interpretarea aritmeticii numerelor complexe ca un şir de operaţii asupra vectorilor.
Adunarea şi scăderea vectorilor se predau acum în matematica de liceu la clasa a IX-a. Atunci dobândesc elevii primele noţiuni de calcul vectorial şi înţeleg că suma a doi sau mai mulţi vectori este tot un vector care se obţine printr-o construcţie geometrică efectuată după regula paralelogramului sau regula triunghiului.
În clasa a X-a, la geometrie se dă interpretarea geometrică a adunării numerelor complexe. Considerând $z_1 = a_1 + b_1 i$ şi $z_2 = a_2 + b_2 i$ afixele punctelor $M_1(a_1, b_1)$ şi $M_2(a_2, b_2)$ şi $\overrightarrow{OM_1}(a_1, b_1)$, $\overrightarrow{OM_2}(a_2, b_2)$ vectorii corespunzători numerelor complexe z_1, respectiv z_2, vectorul sumei $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$ este $\overrightarrow{OS}(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, unde S este al patrulea vârf al paralelogramului OM_1SM_2.



Pentru a da o interpretare geometrică scăderii $z_1 - z_2$ o putem gândi ca suma $z_1 + (-z_2)$. Considerând simetricul lui M_2 în raport cu originea, ca imagine geometrică a lui $(-z_2)$ se obţine paralelogramul ODM_1M_2.
Cum $OD = |z_1 - z_2| = M_1M_2$, deducem că lungimea segmentului M_1M_2 determinat de lungimile a două numere complexe este dată de relaţia $M_1M_2 = |z_1 - z_2|$

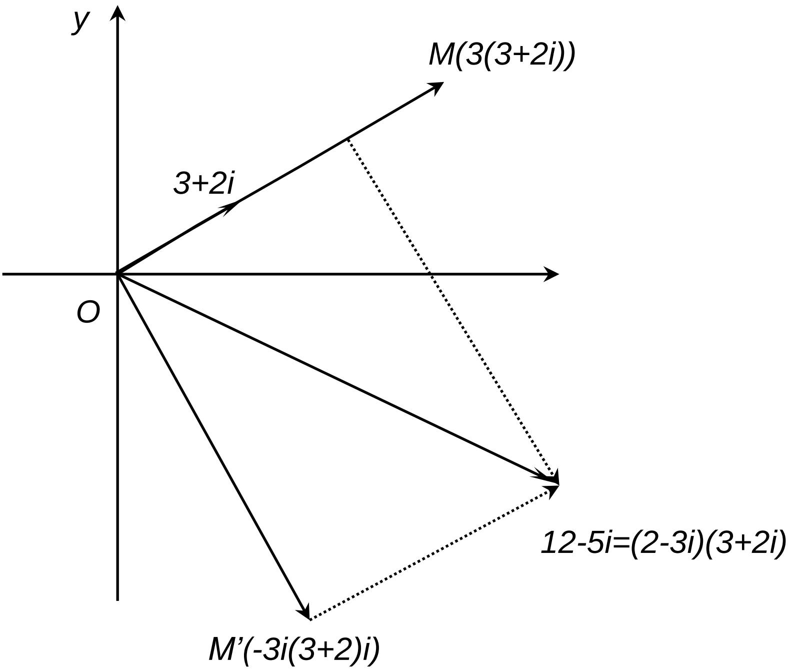


Înmulţirea unui număr complex $z = a + ib$ cu un număr real α are următoarea interpretare geometrică: M fiind imaginea geometrică a numărului complex z, atunci αzeste afişul punctului M' pentru care $\overrightarrow{OM'} = \alpha\overrightarrow{OM}$.



Pentru înmulţirea a doi vectori prezentăm un exemplu numeric. Remarcăm că $(2-3i)(3+2i) = 2(3+2i) - 3i(3+2i)$. Desenăm apoi vectorul $3+2i$ pe care îl prelungim până ce devine de trei ori mai lung şi îl rotim cu $90°$ în sensul acelor de ceasornic. Vectorii astfel obţinuţi se adună după regula paralelogramului.

Observăm că expresii simple de numere complexe ca: $z_1 = z + a$, $z_2 = b \cdot z$, cu a şi b complexe date, z număr complex variabil, au ca interpretări transformări geometrice uzuale ca: translaţia, omotetia.

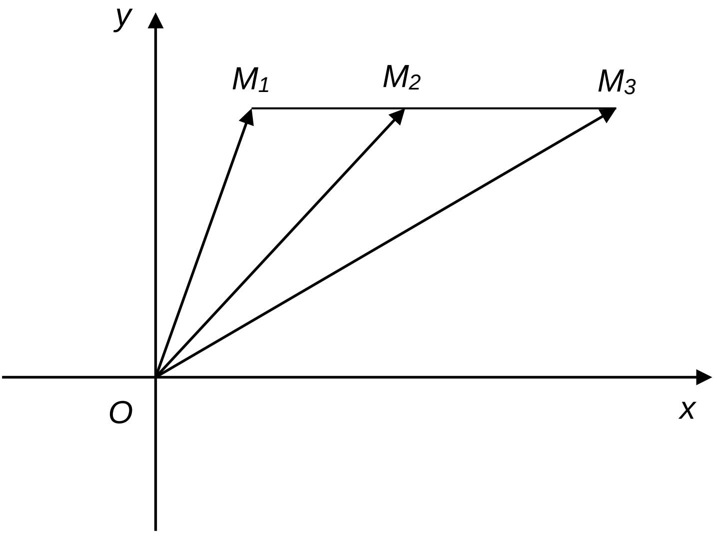


Rotaţia de unghi α a unui punct M de afix z din plan este transformarea care îi asociază lui M un punct M' de afix $z \cdot e^{i\alpha}$. Ştim că $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2[cos(\phi_1 + \phi_2) + i\, sin(\phi_1 + \phi_2)]$. Dacă, în particular, $z = r(cos\, u + i\, sin\, u)$ şi $z_1 = cos\, \alpha + i\, sin\, \alpha$, atunci $z' = zz_1 = r[cos(u + \alpha) + i\, sin(u + \alpha)] = z \cdot e^{i\alpha}$.

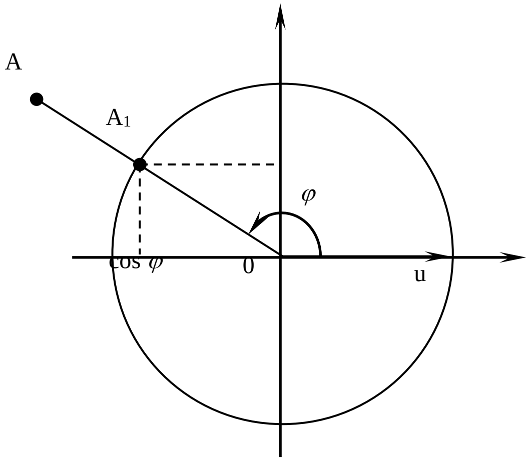
Ţinând seama de legătura între vectori şi numerele complexe, condiţiile de coliniaritate şi concurenţă de la vectori se scriu în expresii

asemănătoare în complex şi reciproc, relaţii între numere complexe au explicaţii interpretări geometrice.
Astfel, relaţia vectorială $\overrightarrow{OM} = k_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + k \cdot \overrightarrow{OM_2}$ admite o transcriere în complex sub forma $z = k_1 z_1 + k_2 z_2$.
Condiţia de coliniaritate a punctelor M, M_1, M_2 exprimată vectorial: $\overrightarrow{OM} = k_1 \cdot \overrightarrow{OM_1} + k_2 \cdot \overrightarrow{OM_2}, k_1 + k_2 = 1$ admite transcrierea $z = k_1 z_1 + k_2 z_2, k_1 + k_2 = 1$.

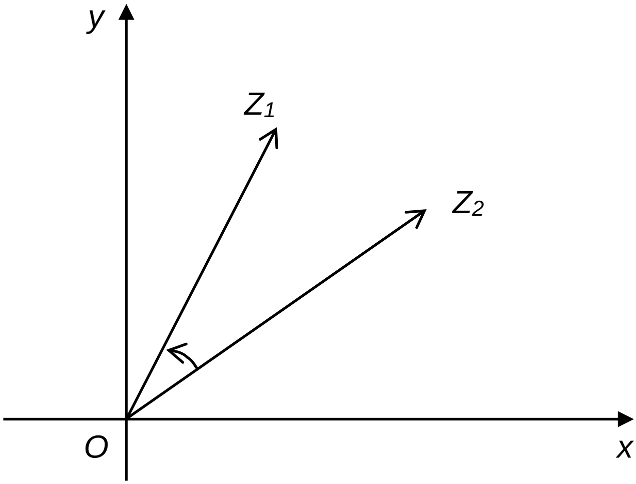
Condiţia ca un patrulater să fie paralelogram se exprimă vectorial: $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_4M_3}$ sau $\overrightarrow{M_2M_3} = \overrightarrow{M_1M_4}$. În complex condiţia devine: $z_2 - z_1 = z_3 - z_4 \Leftrightarrow z_3 + z_1 = z_2 + z_4$. Ultima relaţie arată că segmentele M_1M_3 şi M_2M_4 trebuie să aibă acelaşi mijloc.
Tot pentru demonstrarea coliniarităţii a trei puncte putem folosi expresia



unghiului dintre doi vectori reprezentanţi ai numerelor complexe z_1 şi z_2. Astfel, folosind forma trigonometrică a numerelor complexe scriem $cos\,\phi + i\,sin\,\phi = \frac{z}{|z|}$. Notăm $(\vec{u}, \overrightarrow{OA_1}) = \phi$. Dar $z_{A_1} = \frac{z}{|z|} \Rightarrow |z| \cdot z_{A_1} = z \Rightarrow |z| \cdot \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA}$. Punând $(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OA_1})$, avem $arg\,z = (\vec{u}, \overrightarrow{OA})$.



Cum $arg(z_1 \cdot z_2) = arg\, z_1 + arg\, z_2$, rezultă că $arg\frac{z_1}{z_2} + arg\, z_2 = arg\left(\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2\right) = arg\, z_1$, adică $arg\frac{z_1}{z_2} = arg\, z_1 - arg\, z_2$.

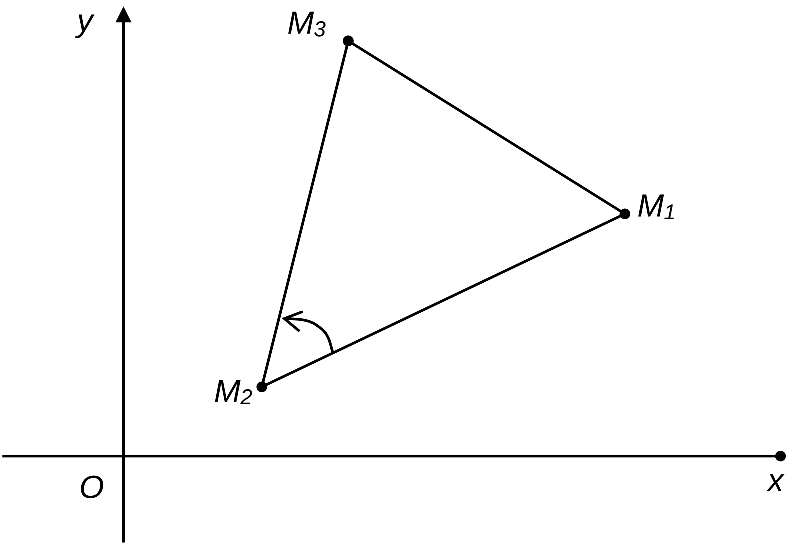


Dându-se trei puncte M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2 respectiv z_3 cu $z_1 \neq z_2$ şi $z_1 \neq z_3$, atunci:

$$arg\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) = arg(z_3 - z_2) - arg(z_1 - z_2)$$

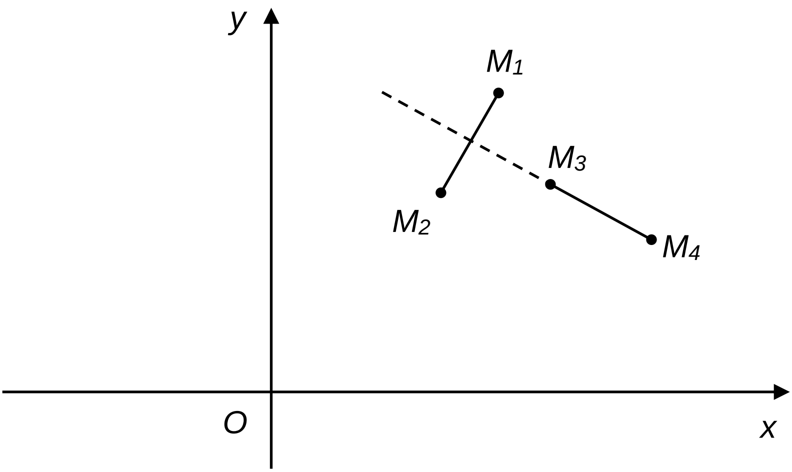
$$= \left(\vec{u}, \overrightarrow{M_3M_2}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{M_2M_1}\right) =$$

$$= \left(\overrightarrow{M_2M_1}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{M_3M_2}\right) = \left(\overrightarrow{M_3M_2}, \overrightarrow{M_2M_1}\right).$$



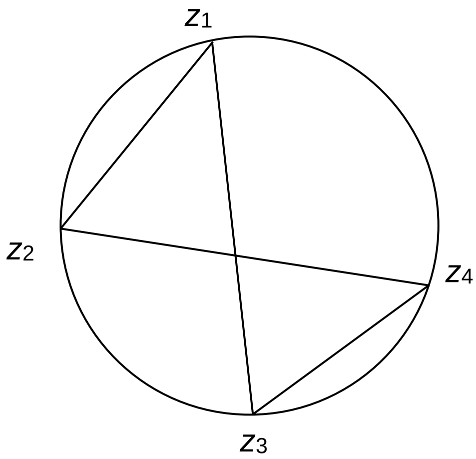
De aici, coliniaritatea punctelor $M_1, M_2, M_3 \Leftrightarrow arg\frac{z_3-z_2}{z_1-z_2} = 0$ sau $\pi \Rightarrow \frac{z_3-z_2}{z_1-z_2}$real.

Condiţia de perpendicularitate a doi vectori $\overrightarrow{M_1M_2} \perp \overrightarrow{M_3M_4} \Leftrightarrow$



$arg(z_2 - z_1) - arg(z_3 - z_4) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ pur imaginar.

Dacă patru puncte sunt conciclice, raportul anarmonic al afixelor este real: $arg\frac{z_1-z_2}{z_4-z_2} = arg\frac{z_1-z_3}{z_4-z_3} \Rightarrow arg\left(\frac{z_1-z_2}{z_4-z_2} : \frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{z_1-z_2}{z_4-z_2} : \frac{z_1-z_3}{z_4-z_3}$ real.



Asemănarea triunghiurilor $A_1A_2A_3$ şi $A_1'A_2'A_3'$ exprimată prin $\frac{A_1A_2}{A_1A_3} = \frac{A_1'A_2'}{A_1'A_3'}$ şi $\sphericalangle A_2A_1A_3 \equiv \sphericalangle A_2'A_1'A_3'$ se scrie unic

$$\frac{a_2-a_1}{a_3-a_1} = \frac{a_2'-a_1'}{a_3'-a_1'} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{vmatrix} = 0.$$

În particular, punem condiţia ca triunghiul $A_1A_2A_3$ să fie echilateral:

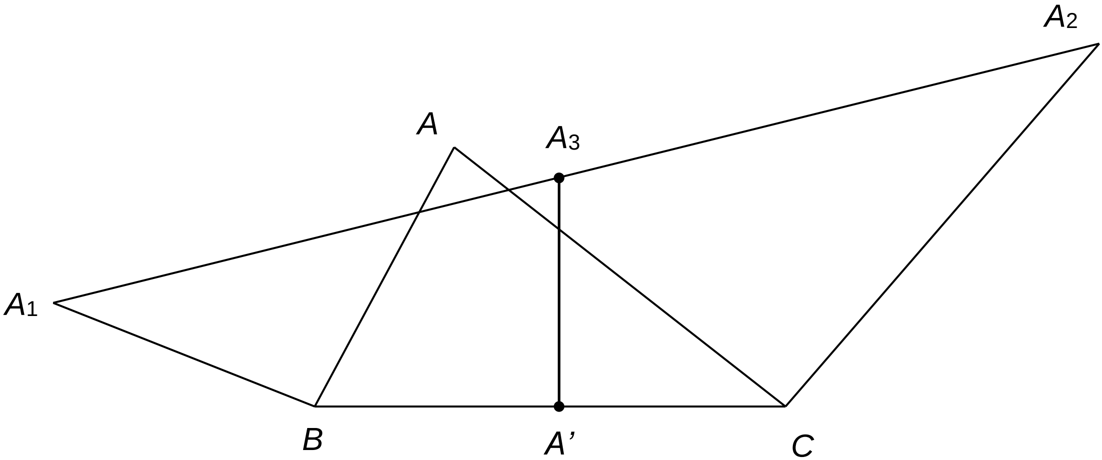
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (a_2 - a_3)^2 + (a_3 - a_1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + a_3)(a_1\varepsilon^2 + a_2\varepsilon + a_3) = 0$, unde 1, ε, ε^2 sunt cele trei rădăcini cubice ale unităţii.

1) Fie triunghiul ABCcu $CA_2 \perp AC$, $BA_1 \perp AB$ şi $AC = CA_2$, $AB = BA_1$, $A_3A \perp BC$, $A' \in BC$ cu $A'B = A'C$ şi $A_3'A' = \frac{BC}{2}$. Să se demonstreze că punctele A_1, A_2, A_3 sunt coliniare.

Rezolvare: Cum $\overrightarrow{BA_1}$ este imaginea lui $\overrightarrow{BA}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, avem: $a_1 - b = (a-b)i \Leftrightarrow a_1 = b + (a-b)i$. $\overrightarrow{CA_2}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{CA}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2} \Rightarrow a_2 - c = -(a-c)i \Rightarrow a_2 = c - (a-c)i$.



Analog, $a_3 - \frac{b+c}{2} = i\frac{c-b}{2} \Rightarrow a_3 = \frac{b+c}{2} + i\frac{c-b}{2}$.

Atunci $\frac{a_3-a_1}{a_2-a_3} = \frac{\frac{c-b}{2}+i\frac{b+c-2a}{2}}{\frac{c-b}{2}+i\frac{b+c-2a}{2}} = 1$, deci A_1, A_2, A_3 sunt coliniare şi $A_1A_3 = A_3A_2$.■

2) Fie *A*, *B*, *C*, *D* patru puncte în plan. Pe laturile patrulaterului *ABCD* se construiesc triunghiurile dreptunghice isoscele *APB*, *CQB*, *CRD*, *ASD* pentru care $\left(\overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PA}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left(\overrightarrow{QB}, \overrightarrow{QC}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left(\overrightarrow{RD}, \overrightarrow{RC}\right) = \frac{\pi}{2}$, $\left(\overrightarrow{SD}, \overrightarrow{SA}\right) = \frac{\pi}{2}$. Arătaţi că *PQRS* este paralelogram.

Rezolvare. Fie *a*, *b*, *c*, *d* afixele respective ale punctelor *A*, *B*, *C*, *D* şi *p*, *q*, *r*, *s* afixele punctelor *P*, *Q*, *R*, *S*. Triunghiul *APB* fiind dreptunghic isoscel cu $m\left(\widehat{APB}\right) = 90°$, $PB = PA$. Cum $\overrightarrow{PA}$ este imaginea lui $\overrightarrow{PB}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, avem: $a - p = i(b-p) \Leftrightarrow p(1-i) = a - ib \Rightarrow 2p = (a-ib)(1+i) \Rightarrow p = \frac{1}{2}[a(1+i) + b(1-i)]$ (1).

Analog:

$\overrightarrow{QC}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{QB}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, deci $q = \frac{1}{2}[c(1+i)+b(1-i)]$ (2)

$\overrightarrow{RC}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{RD}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, deci $r = \frac{1}{2}[c(1+i)+d(1-i)]$ (3)

$\overrightarrow{SA}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{SD}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, deci $s = \frac{1}{2}[a(1+i)+d(1-i)]$ (4).

Adunând relaţiile (1) şi (3) obţinem $p + r = \frac{1}{2}[(a+c)(1+i) + (b+d)(1-i)]$. Adunând relaţiile (2) şi (4) obţinem $q + s = \frac{1}{2}[(a+c)(1+i)+(b+d)(1-i)]$. Deci $p + r = q + s$, ceea ce înseamnă că diagonalele *PR* şi *QS* au acelaşi mijloc, deci *PQRS* este paralelogram. ■

3) Fie O un punct arbitrar în planul patrulaterului $A_1A_2A_3A_4$ şi A_1', A_2', A_3', A_4' puncte astfel încât $\frac{OA_1'}{OA_1} = \frac{OA_2'}{OA_2} = \frac{OA_3'}{OA_3} = \frac{OA_4'}{OA_4} = k$. Pe mediatoarele segmentelor $A_4'A_1'$, A_1A_2, $A_2'A_3'$, A_3A_4 se iau respectiv segmentele (spre exteriorul figurii) $\frac{A_1A_4}{2}$, $k \cdot \frac{A_1A_2}{2}$, $\frac{A_2A_3}{2}$, $k \cdot \frac{A_3A_4}{2}$. Dacă O_1, O_2, O_3, O_4 sunt extremităţile acestor segmente, atunci dreptele O_1O_3 şi O_2O_4 sunt perpendiculare.

<u>*Rezolvare.*</u> Fie a_1, a_2, a_3, a_4 afixele respective ale punctelor A_1, A_2, A_3, A_4. Din ipoteză rezultă că punctele A_i' au afixele ka_i. Mijloacele segmentelor $A_4'A_1'$, A_1A_2, $A_2'A_3'$, A_3A_4 vor avea afixele: $S\left(k\frac{a_1+a_4}{2}\right)$, $P\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)$, $Q\left(k\frac{a_2+a_3}{2}\right)$, $R\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)$.

Notând cu o_i afixele punctelor O_i, avem:

$$o_1 - s = o_1 - k\frac{a_1+a_4}{2} = i\frac{a_4-a_1}{2} \Rightarrow o_1 = k\frac{a_1+a_4}{2} + i\frac{a_4-a_1}{2}$$
$$o_2 - p = o_2 - \frac{a_1+a_2}{2} = ki\frac{a_1-a_2}{2} \Rightarrow o_2 = \frac{a_1+a_2}{2} + ki\frac{a_1-a_2}{2}$$
$$o_3 - q = o_3 - k\frac{a_2+a_3}{2} = i\frac{a_2-a_3}{2} \Rightarrow o_3 = k\frac{a_2+a_3}{2} + i\frac{a_2-a_3}{2}$$
$$o_4 - r = o_4 - \frac{a_4-a_3}{2} = ki\frac{a_3-a_4}{2} \Rightarrow o_4 = \frac{a_4+a_3}{2} + ki\frac{a_3-a_4}{2}$$

Atunci:

$$\frac{O_1 - O_3}{O_2 - O_4} = \frac{k(a_1 + a_4 - a_2 - a_3) + i(a_4 - a_1 - a_2 + a_3)}{(a_1 + a_2 - a_4 - a_3) + ki(a_1 - a_2 - a_3 + a_4)} = \frac{kA + Bi}{-B + kAi}$$

$$= -\frac{C + Bi}{B - Ci} =$$

$$= -\frac{(C+Bi)(B+Ci)}{B^2+C^2} = -\frac{BC+B^2i+C^2i-BC}{B^2+C^2},$$

adică $arg\frac{o_1-o_3}{o_2-o_4} = -\frac{\pi}{2}$, deci dreptele O_1O_3 şi O_2O_4 sunt perpendiculare. ■

Particularizări ale acestei probleme sunt ele însele interesante. De exemplu, cazul $k = O$, luând pe O în unul din mijloacele laturilor patrulaterului.

O problemă interesantă, la care prezentăm şi o soluţie sintetică (prin relaţii metrice) se obţine ducând în P segmentul $PO_3 = \frac{A_2A_3}{2}$ şi $PO_1 = \frac{A_1A_4}{2}$. Concluzia este că O_1O_3 este egal cu PR şi perpendicular pe el.

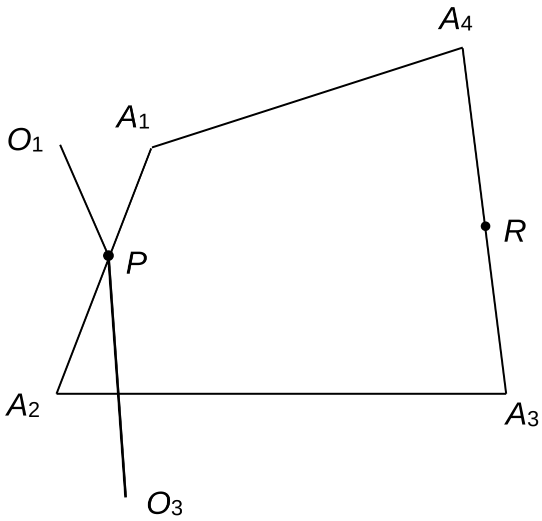
<u>*Soluţia cu numere complexe*</u>:

$$o_1 - p = o_1 - \frac{a_1 + a_2}{2} = i\frac{a_4 - a_1}{2} \Rightarrow o_1 = \frac{a_1 + a_2}{2} + i\frac{a_4 - a_1}{2}$$

$$o_3 - p = o_3 - \frac{a_2 + a_1}{2} = i\frac{a_2 - a_3}{2} \Rightarrow o_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} + i\frac{a_2 - a_3}{2}$$

Atunci $\frac{o_1-o_3}{r-p} = \frac{\frac{a_1+a_2}{2}-\frac{a_1+a_2}{2}+i\frac{a_4-a_1-a_2+a_3}{2}}{\frac{a_4+a_3}{2}-\frac{a_1+a_2}{2}} = i \Rightarrow arg\frac{o_1-o_3}{r-p} = arg\, i = \frac{\pi}{2}$

De asemenea $|o_1 - o_3| = |r - p|$.■



<u>Soluţia sintetică</u>: Cum:
$2\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{A_1A_4} + \overrightarrow{A_2A_3} \Rightarrow 4PR^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 + 2A_1 \cdot A_4 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot cos(A_1\widehat{A_4, A_2}A_3)$.

Din

$$\Delta O_1O_3P \Rightarrow O_1O_3^2 = PO_1^2 + PO_3^2 - 2PO_1 \cdot PO_3 \cdot cos(180° - A_1\widehat{A_4, A_2}A_3) = \frac{A_1A_4^2}{4} + \frac{A_2A_3^2}{4} +$$

$+2 \cdot \frac{A_1A_4A_2A_3}{4} cos(A_1\widehat{A_4, A_2}A_3) \Rightarrow 4O_1O_3^2 = A_1A_4^2 + A_2A_3^2 + 2A_1A_4 \cdot A_2A_3 \cdot cos(A_1\widehat{A_4, A_2}A_3)$, adică $O_1O_3 = PR$.

Utilizând faptul că într-un patrulater suma pătratelor a două laturi opuse este egală cu suma pătratelor celorlalte laturi, în patrulaterul O_1PO_3R avem $PO_1^2 + RO_3^2 = PO_3^2 + RO_1^2$ şi deci $PR \perp O_1O_3$.■

5.2 Aplicații ale numerelor complexe în trigonometrie

5.2.1 Deducerea unor identităţi trigonometrice cu ajutorul numerelor complexe

După ce francezul Abraham de Moivre a găsit formula care astăzi îi poartă numele, matematicienii au descoperit aplicaţii multiple ale numerelor complexe în demonstrarea unor identităţi trigonometrice, în calculul unor sume şi produse trigonometrice.

Teorema lui de Moivre permite obţinerea cu uşurinţă a unor identităţi trigonometrice. Astfel, înlocuind $n = 3$ în formulă obţinem: $(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)^3 = cos\,3\,\phi + i\,sin\,3\,\phi$. Făcând calculele, membrul stâng este egal cu $cos^3\phi + 3i\,cos^2\phi\,sin\,\phi + 3i^2\,cos\,\phi\,sin^2\phi + i^3\,sin^3\phi =$

$$= cos^3\phi - 3\,cos\,\phi\,sin^2\phi + i(3\,cos^2\phi\,sin\,\phi - sin^3\phi)$$

de unde, egalând părţile reale şi părţile imaginare obţinem:

$$cos\,3\,\phi = cos^3\phi - 3\,cos\,\phi\,sin^2\phi = cos^3\phi - 3\,cos\,\phi\,(1 - cos^2\phi) = 4\,cos^3\phi - 3\,cos\,\phi$$

$sin\,3\,\phi = 3\,cos^2\phi\,sin\,\phi - sin^3\phi = 3(1 - sin^2\phi)\,sin\,\phi - sin^3\phi = 3\,sin\,\phi - 4\,sin^3\phi.$

Dând alte valori lui n în formula lui de Moivre şi urmând acelaşi procedeu, putem obţine o infinitate de alte identităţi trigonometrice.

Un caz particular interesant este $n = -1$:
$(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)^{-1} = cos(-\phi) + i\,sin(-\phi) = cos\,\phi - i\,sin\,\phi.$

Dacă z este un punct de pe cercul unitate al planului complex, atunci z se scrie în formă trigonometrică $z = cos\,\phi + i\,sin\,\phi$, unde ϕ este argumentul lui z. Din formula lui Moivre avem: $z^n = cos(n\phi) + i\,sin(n\phi)$ şi $z^{-n} = cos(n\phi) - i\,sin(n\phi)$. Adunând cele două relaţii obţinem:

$$z^n + z^{-n} = 2\,cos(n\phi)$$

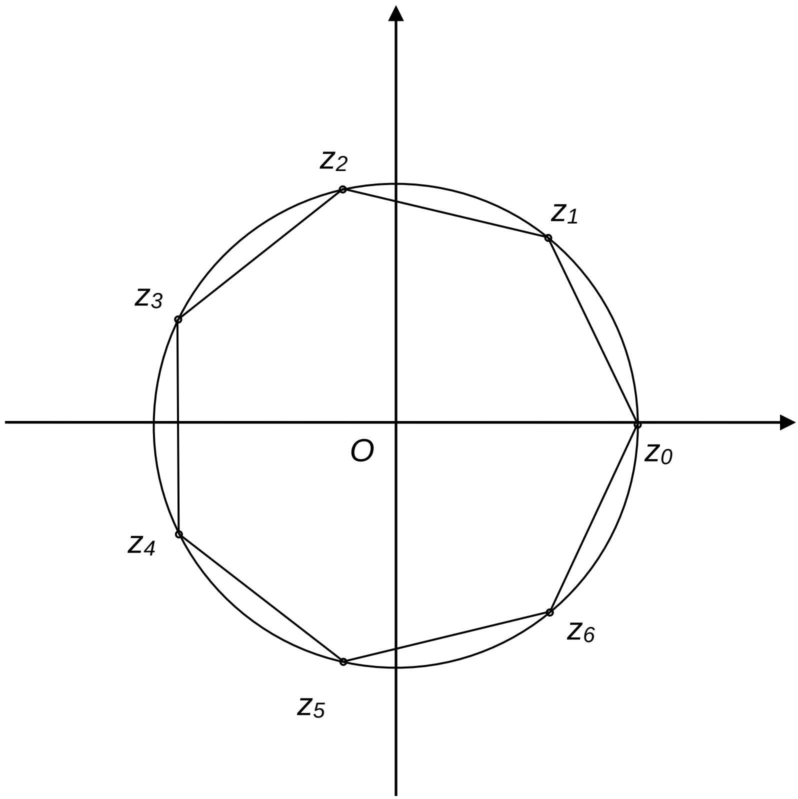
şi găsim astfel o metodă de a genera identităţi trigonometrice.
Să calculăm, de exemplu, $(z + z^{-1})^6 = 2^6\,cos^6\,\phi$.
Aplicând în membrul stâng formula binomului lui Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$, identificând pe $a$cu z şi pe b cu z^{-1} putem scrie:

$$(z + z^{-1})^6 = z^6 + 6z^4 + 15z^2 + 20 + 15z^{-2} + 6z^{-4} + z^{-6} =$$
$$= z^6 + z^{-6} + 6(z^4 + z^{-4}) + 15(z^2 + z^{-2}) + 20 =$$
$$= 2\,cos(6\phi) + 6 \cdot 2\,cos(4\phi) + 15 \cdot 2\,cos(2\phi) + 20.$$

Egalând această expresie cu $2^6\,cos^6\,\phi$ suntem conduşi la identitatea:
$cos^6\,\phi = \frac{1}{32}cos(6\phi) + \frac{3}{16}cos(4\phi) + \frac{15}{32}cos(2\phi) + \frac{5}{16}$.
Prezenţa termenului constant $\frac{5}{16}$ se datorează faptului că funcţia $cos^6\,\phi$ ia numai valori pozitive. Observăm, de asemenea, că $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} cos^6\,\phi\,d\phi = \frac{5}{16}$, ceea ce ar putea îndreptăţi denumirea de valoare medie dată lui $\frac{5}{16}$.
Folosirea numerelor complexe apare ca o metodă de sine stătătoare în cazul demonstrării unor identităţi:

1) $cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$

Considerăm ecuaţia binomă $z^7 - 1 = 0$, având rădăcinile
$z_k = cos\frac{2\pi}{7} + i\,sin\frac{2k\pi}{7}$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, 6$



$z_0 = 1$ pentru $k = 0$
$z_1 = cos\frac{2\pi}{7} + i\, sin\frac{2\pi}{7}$ pentru $k = 1$, ……$z_7 = cos\frac{12\pi}{7} + i\, sin\frac{12\pi}{7}$
Observăm că $z_1 = \overline{z_6}$, $z_2 = \overline{z_5}$, $z_3 = \overline{z_4}$. (1)
Cum $z_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_6 = 0 \Rightarrow z_1 + z_2 + \ldots + z_6 = -1$
Folosind (1) $\Rightarrow 2\left(cos\frac{2\pi}{7} + cos\frac{4\pi}{7} + cos\frac{6\pi}{7}\right) = -1$.

5.2.2 Funcţii trigonometrice hiperbolice

Odată cu descoperirea de către Euler a formulelor exponenţiale pentru sinus şi cosinus, s-a putut da un sens şi unghiurilor complexe. Astfel,

$$cos(a+ib)=\frac{e^{i(a+ib)}+e^{-i(a+ib)}}{2}=\frac{e^{ia}\cdot e^{-b}+e^{-ia}\cdot e^{b}}{2}$$
$$=\frac{e^{-b}[cos\,a+i\,sin\,a]+e^{b}[cos\,a-i\,sin\,a]}{2}=$$
$= cos\,a\left(\frac{e^b+e^{-b}}{2}\right)-i\,sin\,a\left(\frac{e^b-e^{-b}}{2}\right)$.

Notând $\text{ch}(b)=\frac{1}{2}\left(e^b+e^{-b}\right)$şi $\text{sh}(b)=\frac{1}{2}\left(e^b-e^{-b}\right)$, obţinem $cos(a+ib)=cos\,a\cdot\text{ch}(b)+i\,sin\,a\cdot\text{sh}(b)$.

Analog, $sin(a+ib)=sin\,a\cdot\text{ch}(b)+i\,cos\,a\cdot\text{sh}(b)$

Numerele $\text{ch}(b)$ şi $\text{sh}(b)$ se numesc cosinusul hiperbolic şi respectiv sinusul hiperbolic ale lui b. Definim tangenta hiperbolică prin $\text{tg}(a+ib)=\frac{\text{sh}(a+ib)}{\text{ch}(a+ib)}$.

Este evidentă relaţia $\text{ch}^2b-\text{sh}^2b=1,\ \forall b\in R$, deci punctul (x,y) din plan de coordonate $x=\text{ch}b,\ y=\text{sh}b$ parcurge ramura de hiperbolă $x^2-y^2=1,\ x>0$, ceea ce justifică denumirea de funcţii "hiperbolice".

Funcţiile trigonometrice hiperbolice sunt deosebit de utile în ştiinţă. Printre calităţile lor se numără şi faptul că permit eliminarea restricţiilor uzuale $|sin\,\phi|\le 1$şi $|cos\,\phi|\le 1$.

5.2.3 Aplicaţii în calculul unor sume şi produse trigonometrice

1) Să se calculeze sumele:

$$S_n=cos\,a+cos(a+h)+cos(a+2h)+\ldots+cos(a+nh)$$
$$S_n'=sin\,a+sin(a+h)+sin(a+2h)+\ldots+sin(a+nh)$$

Soluţie. Metoda de rezolvare constă în înmulţirea celei de-a doua sume cu i, adunarea la prima sumă şi apoi identificarea părţilor reale şi imaginare ale expresiei obţinute:

$$S_n+iS_n'=(cos\,a+i\,sin\,a)+[cos(a+h)+i\,sin(a+h)]+\ldots$$
$$\ldots+[cos(a+nh)+i\,sin(a+h)] \qquad (1)$$

Observăm că membrul al doilea este o progresie geometrică cu raţia $q=cos\,h+i\,sin\,h$ şi putem calcula suma primilor n termeni cu formula $S=b_1\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$:

$$S_n+iS_n'=(cos\,a+i\,sin\,a)\frac{cos(n+1)\,h+i\,sin(n+1)\,h-1}{cosh+i\,sinh-1}=$$

$$= (\cos a + i \sin a)\frac{-2\sin^2\frac{(n+1)h}{2} + 2i\sin\frac{(n+1)h}{2}\cos\frac{(n+1)h}{2}}{-2\sin^2\frac{h}{2} + 2i\sin\frac{h}{2}\cos\frac{h}{2}} =$$

$$= (\cos a + i \sin a)\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \frac{i\cos\frac{n+1}{2}h - \sin\frac{n+1}{2}h}{i\cos\frac{h}{2} - \sin\frac{h}{2}} =$$

$$= (\cos a + i \sin a)\frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}} \cdot \left(\cos\frac{n}{2}h + i\sin\frac{n}{2}h\right) \qquad (2)$$

Identificând partea reală şi partea imaginară a expresiilor (1) şi (2), obţinem:

$$S_n = \frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\cos\left(a + \frac{n}{2}h\right),$$

$$S_n' = \frac{\sin\frac{n+1}{2}h}{\sin\frac{h}{2}}\sin\left(a + \frac{n}{2}h\right).■$$

2) Să se calculaze sumele:

$$S_n = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx$$
$$S_n' = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx$$

Soluţie. Utilizăm egalitatea: $S = z + z^2 + \ldots + z^n = z\frac{1-z^n}{1-z}$, $z \neq 1$ pe care o derivăm: $S' = 1 + 2z + \ldots + nz^{n-1} = \left(z\frac{1-z^n}{1-z}\right)'$ iar rezultatul îl înmulţim cu z:

$$z \cdot S' = z + 2z^2 + \ldots + nz^n$$
$$= z \cdot \left\{\frac{[1-(n+1)z^n](1-z) + (z - z^{n+1})}{(1-z)^2}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z + 2z^2 + \ldots + nz^n = \frac{z(1 - nz^n - z^n + nz^{n+1})}{(1-z)^2} =$$

$$= \frac{nz^{n+1}}{z-1} - \frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2} \qquad (1)$$

Fie $z = \cos a + i\sin a$. Atunci:

$$\frac{nz^{n+1}}{z-1} = \frac{n[\cos(n+1)a + i\sin(n+1)a]}{-2\sin\frac{a}{2}\left(\sin\frac{a}{2} - i\cos\frac{a}{2}\right)} = \frac{n}{2\sin\frac{a}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a - i\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right]$$

(2)

$$\frac{z^{n+1}-z}{(z-1)^2} = \frac{\cos(n+1)a + i\sin(n+1)a - \cos a - i\sin a}{-4\sin^2\frac{a}{2}(\cos a + i\sin a)} =$$

$$\frac{-2\,sin\frac{(n+2)a}{2}\,sin\frac{na}{2}+i\cdot 2\,sin\frac{na}{2}\,cos\frac{(n+2)a}{2}}{-4\,sin^2\frac{a}{2}(cos\,a+i\,sin\,a)}=\frac{2\,sin^2\frac{na}{2}-i\,sin\,na}{4\,sin^2\frac{a}{2}} \qquad (3)$$

Din (1), (2), (3)

$\Rightarrow S_n+iS_n'=\frac{n\,sin\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{2\,sin\frac{a}{2}}-\frac{sin^2\frac{na}{2}}{2\,sin^2\frac{a}{2}}+i\left(\frac{sin\,na}{4\,sin^2\frac{a}{2}}-\frac{cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a}{2\,sin\frac{a}{2}}\right)$, de unde prin identificare obţinem S_n şi S_n'.■

3) Să se calculeze produsul

$$P_n=\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}.$$

Vom calcula acest produs pornind de la descompunerea în factori a membrului întâi al ecuaţiei binome $x^n-1=0$.

Cum rădăcinile ecuaţiei binome $x^n-1=0$ sunt date de $x_j=\cos 2k\pi+i\sin 2k\pi$, $j=1,2,\ldots,n$, $k=0,1,\ldots,n-1$, avem:

$$x^n-1=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_j)\ldots(x-x_n)=$$

$$=(x-1)\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left[x-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right] \qquad (1)$$

Ţinând seama că:

$$\frac{x^n-1}{x-1}=x^{n-1}+x^{n-2}+\ldots+1$$

şi făcând în relaţia anterioară $x=1$, rezultă:

$$\left(x-\cos\frac{2\pi}{n}-i\sin\frac{2\pi}{n}\right)\left(x-\cos\frac{4\pi}{n}-i\sin\frac{4\pi}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left[x-\cos\frac{2(n-1)\pi}{n}-i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}\right]=n. \qquad (2)$$

Folosind identităţile $1-\cos a=2sin^2\frac{a}{2}$ şi $\sin 2a=2\sin a\cos a$, egalitatea (2) se transformă în:

$$\left(2\sin^2\frac{\pi}{n}-2i\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(2\sin^2\frac{2\pi}{n}-2i\sin\frac{2\pi}{n}\cos\frac{2\pi}{n}\right)\ldots$$

$$\ldots\left[2\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}-2i\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right].$$

Se înmulţeşte fiecare factor cu i şi se scoate factor 2^{n-1} rezultând:

$$\frac{1}{i^{n-1}}2^{n-1}\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\cdot S \tag{3}$$

unde

$$S=[1+2+\ldots+(n-1)]\cos\frac{\pi}{n}+[1+2+\ldots+(n-1)]\sin\frac{\pi}{n}.$$

Efectuând calculele şi tinând cont de relaţia (3), rezultă $P_n=\frac{n}{2^{n-1}}$.■

5.2.4 Aplicaţii în rezolvarea unor ecuaţii trigonometrice

1) Ecuaţia liniară în $\sin x$ şi $\cos x$ de forma: $a\sin x+b\cos x=c$, $a,b,c\in R$, $a\cdot b\neq 0$.

La clasa a IX-a se indică pentru rezolvarea acestui tip de ecuaţii următoarele metode: metoda unghiului auxiliar (ϕ cu $tg\phi=\frac{b}{a}$), metoda substituţiei universale (not. $tg\frac{x}{2}=t$), metoda omogenizării (utilizând formulele $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, $\cos x=\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$), metoda ridicării la pătrat.

În cadrul unui opţional la nivelul clasei a X-a putem propune şi metoda care foloseşte formulele lui Euler:

$$a\cdot\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}+b\cdot\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=c$$

$$z=e^{i\theta}$$

$$-iae^{i\theta}+iae^{-i\theta}+be^{i\theta}+be^{-i\theta}=2c$$

$$e^{i\theta}(b-ai)+e^{-i\theta}(b+ai)-2c=0$$

$$z(b-ai)+\frac{1}{z}(b+ai)-2c=0$$

$z^2(b-ai)-2cz+b+ai=0$. Am obţinut astfel o ecuaţie de gradul al II-lea cu coeficienţi în C.

Această metodă permite obţinerea soluţiilor θ şi cunoaşterea valorilor exacte pentru $sin\,\theta$, $cos\,\theta$.

2) Să se rezolve în R ecuaţia: $sin\,x + sin\,2\,x + sin\,3\,x = 0$

Cum $e^{ix} = cos\,x + i\,sin\,x$ rezultă că $sin\,x + sin\,2\,x + sin\,3\,x$ este partea imaginară a sumei $e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix}$, care reprezintă suma a trei termeni în progresie geometrică cu primul termen e^{ix} şi raţia e^{ix}.

Dacă $e^{ix} = 1$ se poate pune $x = 0(2\pi)$ şi $\sum = e^{ix} + e^{2ix} + e^{3ix} = 3$, iar partea sa imaginară este 0.

Toate soluţiile $2k\pi$, $k \in Z$ aparţin ansamblului S de soluţii.

Pentru $x \neq 0(2\pi)$, $\sum = e^{ix}\frac{e^{3ix}-1}{e^{ix}-1}$, expresie care se mai poate scrie:

$\sum = e^{ix}\frac{e^{\frac{3ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}}} \cdot \frac{e^{\frac{3ix}{2}} - e^{\frac{-3ix}{2}}}{e^{\frac{ix}{2}} - e^{\frac{-ix}{2}}}$, deci $\sum = e^{2ix}\frac{sin\frac{3x}{2}}{sin\frac{x}{2}}$.

Partea imaginară a lui Σ va fi $\frac{sin\,2x \cdot sin\frac{3x}{2}}{sin\frac{x}{2}}$.

În acest caz soluţiile vor fi $x \in R$ pentru care $sin\frac{3x}{2} = 0$ sau $sin\,2\,x = 0$.

Rezultă $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ sau $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

5.2.5 Liniarizarea polinoamelor trigonometrice

Formulele lui Euler permit, de asemenea, regăsirea formulelor trigonometrice de transformare a produselor în sume şi, mai general, liniarizarea polinoamelor trigonometrice.

Dezvoltarea binomului lui Newton permite obţinerea lui $sin^n\,\theta$ şi $cos^n\,\theta$ cu ajutorul sinusului sau cosinusului numerelor multiplii întregi de θ:

$$sin^n\,\theta = \frac{1}{(2i)^n}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)^n$$

$$cos^n\,\theta = \frac{1}{2^n}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)^n$$

Exemplu: Exprimaţi $sin^5\,x$ şi $sin\,x\,cos^3\,x$ în sume liniare trigonometrice de multiplii întregi de x:

Pentru $\forall x \in R$: $cos\,x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, $sin\,x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. Utilizând formula binomului lui Newton, obţinem:

$sin^5\,x = \frac{1}{(2i)^5}\left(e^{5ix} - 5e^{3ix} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right)$.

Deducem că: $sin^5 x = \frac{1}{2^4}\left(\frac{e^{5ix}-e^{-5ix}}{2i} - 5\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i} + 10\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)$, de unde: $sin^5 x = \frac{1}{16} sin\, 5\,x - \frac{5}{16} sin\, 3\,x + \frac{5}{8} sin\, x.$

Analog, $sin\, x \cdot cos^3 x = \frac{1}{2^4 i}\left(e^{4ix} + 3e^{2ix} + 3 + e^{-2ix} - e^{2ix} - 3 - 3e^{-2ix} - e^{-4ix}\right).$

Rezultă $sin\, x\, cos^3 x = \frac{1}{8} \cdot sin\, 4\,x + \frac{1}{4} sin\, 2\,x.$

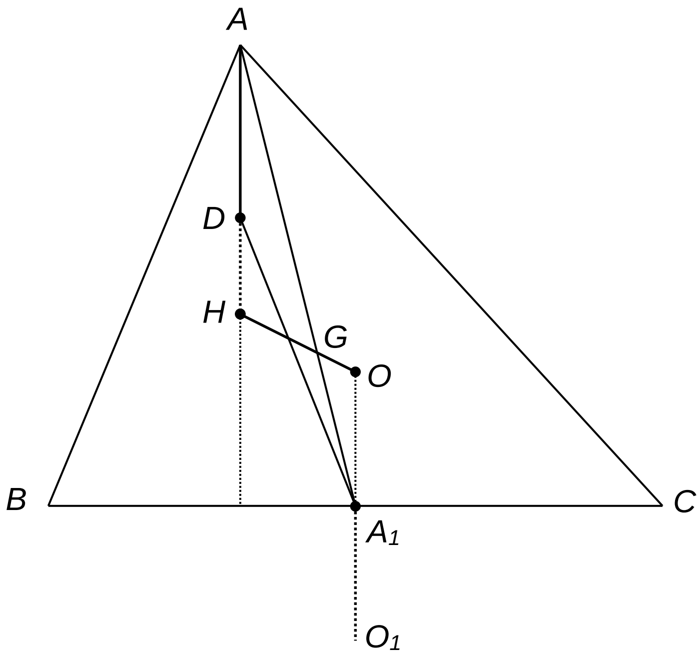
5.3 Aplicații ale numerelor complexe în geometrie

5.3.1 Geometria triunghiului

Considerăm triunghiul ABC, în care notăm cu O centrul cercului circumscris, cu H ortocentrul, cu G centrul de greutate.

Luăm în O originea axelor şi notăm cu a, b, c afixele punctelor A, B, C.

a) Deci cercul circumscris are ecuaţia: $z\overline{z} = 1$. Atunci $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$ (1)



b) Fie O_1 simetricul lui O în raport cu latura BC. Din faptul că $BOCO_1$ este paralelogram, deci mijloacele diagonalelor sale coincid rezultă relaţia $b + c = o_1$.

Cum dreapta OH este diagonală în paralelogramul AOO_1H, afixul ortocentrului H este:

$h = a + b + c.$ (2)

c) Punctul G, centrul de greutate al triunghiului ABC este situat pe fiecare mediană la $\frac{2}{3}$ de vârf şi $\frac{1}{3}$ de bază. Deci $\frac{AG}{GA_1} = 2 \Leftrightarrow \frac{g-a}{a_1-g} = 2 \Rightarrow$ $g = \frac{a+2a_1}{1+2}$.

Afixul punctului A_1, mijlocul lui BC este $a_1 = \frac{b+c}{2}$. Atunci

$g = \frac{a+2\frac{b+c}{2}}{1+2} = \frac{a+b+c}{3}$ (3)

Comparând cu relaţia (2) observăm că centrul de greutate G este situat pe segmentul OH pe care îl divide în raportul 1:2.

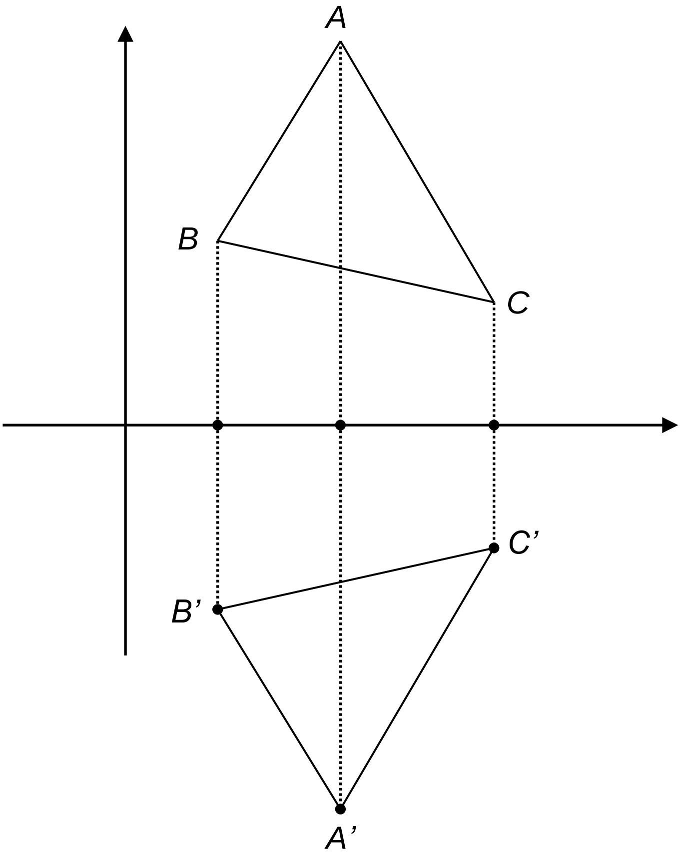
d) Fie D mijlocul segmentului AH şi O' mijlocul segmentului A_1D. Avem: $d = \frac{a+h}{2} = \frac{a+a+b+c}{2} = a + \frac{b+c}{2}$ şi $a_1 = \frac{b+c}{2}$. Atunci afixul lui O' este $o' = \frac{d+a_1}{2} = \frac{a+b+c}{2}$. (4)

Regăsim astfel proprietatea descoperită de Euler: mijloacele laturilor unui triunghi, picioarele înălţimilor, mijloacele segmentelor dintre vârfuri şi ortocentru sunt 9 puncte situate pe un cerc cu centrul în mijlocul segmentului OH şi raza $\frac{1}{2}DA_1 = \frac{1}{2}AO$ egală cu jumătate din raza cercului circumscris. Deci o' este afixul centrului cercului lui Euler.

Demonstraţia sintetică. Arătăm că $A' = pr_{BC}A$ aparţine cercului ce trece prin mijloacele A_1, B_1, C_1 ale laturilor BC, AC, respectiv AB. Deoarece $B_1C_1 \| A'A_1$, rezultă că patrulaterul $A_1B_1C_1A'$ este trapez. Din faptul că A_1B_1 este linie mijlocie în triunghiul ABC, rezultă $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. În triunghiul dreptunghic $AA'B$, $A'C_1$ este mediană, deci $A'C_1 = \frac{1}{2}AB$. Rezultă că $A'C_1 = A_1B_1$, adică $A_1B_1C_1A'$ este trapez isoscel. Prin urmare, A' aparţine cercului determinat de A_1, B_1, C_1.

Demonstrăm că punctul D, mijlocul segmentului $[AH]$ aparţine cercului determinat de punctele A_1, B_1, C_1. Pentru aceasta vom demonstra că patrulaterul $DC_1A_1B_1$ este inscriptibil. Este suficient să arătăm că $m(\widehat{DC_1A_1}) = 90$, analog dovedindu-se că $m(\widehat{DB_1A_1}) = 90$. Cum C_1D este linie mijlocie în triunghiul ABH, rezultă că $C_1D \| DH$. Dar $BH \perp AC$ şi $A_1C_1 \| AC$, rezultă $C_1D \perp A_1C_1$. Prin urmare, patrulaterul $DC_1A_1B_1$ este inscriptibil. ■

e) Aria triunghiului ABC



Notăm cu A', B', C' simetricele punctelor A, B, C în raport cu axa Ox. Triunghiurile ABC şi $A'B'C'$ vor avea deci aceeaşi arie.
Fie $a = x_1 + iy_1,\ b = x_2 + iy_2,\ c = x_3 + iy_3$ afixele punctelor A, B, C. Calculăm mai întâi ariile trapezelor isoscele $ABB'A'$, $BCC'B'$ şi $ACC'A'$:
aria $ABB'A' = \frac{(AA'+BB')\cdot(x_1-x_2)}{2} = \frac{(|a'-a|+|b'-b|)(x_1-x_2)}{2} = (y_1 + y_2)(x_1 - x_2)$.
aria $BCC'B' = (y_2 + y_3)(x_2 - x_3)$
aria $ACC'A' = (y_3 + y_1)(x_3 - x_1)$.
Atunci $2aria(ABC) = y_1(x_3 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_1)$, adică

$$aria(ABC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Adunând şi scăzând relaţiile: $a = x_1 + iy$ şi $\overline{a} = x_1 - iy_1$ obţinem $2x_1 = a + \overline{a}$, respectiv $2iy_1 = a - \overline{a}$. Ţinând seama de acestea, formula (5) devine:

$$aria(ABC) = \frac{1}{8i}\begin{vmatrix} a+\overline{a} & a-\overline{a} & 1 \\ b+\overline{b} & b-\overline{b} & 1 \\ c+\overline{c} & c-\overline{c} & 1 \end{vmatrix} \text{ sau}$$

$$aria(ABC) = \frac{1}{8i}\begin{vmatrix} a & -\overline{a} & 1 \\ b & -\overline{b} & 1 \\ c & -\overline{c} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{8i}\begin{vmatrix} \overline{a} & a & 1 \\ \overline{b} & b & 1 \\ \overline{c} & c & 1 \end{vmatrix}$$

$$aria(ABC) = -\frac{1}{8i}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} - \frac{1}{8i}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4i}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{i}{4}\begin{vmatrix} a & \overline{a} & 1 \\ b & \overline{b} & 1 \\ c & \overline{c} & 1 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

5.3.2 Aplicaţii ale numerelor complexe în probleme legate de poligoane regulate

1) Aşa cum am văzut la I.3.2,$z^n - 1 = 0 \Rightarrow z_k = cos\frac{2k\pi}{n} + i\,sin\frac{2k\pi}{n}$, $0 \le k \le n-1$, z_k fiind afixele punctelor $A_0, A_1, \dots, A_{n-1}$, vârfurile unui poligon regulat cu n laturi înscris în cercul unitate.

Dacă z este o rădăcină a ecuaţiei $z^n = 1$, atunci $z^k \cdot \overline{z^k} = 1 \Rightarrow \overline{z^k} = \frac{1}{z^k} = \frac{z^n}{z^k} = z^{n-k}$

Pentru $n = 2k \Rightarrow z^k = -1$ şi vârfurile poligonului regulat sunt $1, z, \dots, z^{k-1}, -1, -z, \dots, -z^{k-1}$, iar $z^{-m} = \frac{1}{z^m} = -z^{k-m}$.

2) Calculul laturilor şi lungimilor diagonalelor

$\overline{A_0A_k^2} = |z_k - 1|^2 = (z_k - 1)(\overline{z_k} - 1) = 2 - (z_k + \overline{z_k}) = 2 - 2\,cos\frac{2k\pi}{n}$.

Cum z_k satisface ecuaţia $z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$, care în cazul n impar devine:

$\overline{z} + \overline{z^2} + \ldots + \overline{z}^{\frac{n-1}{2}} + z^{\frac{n-1}{2}} + \ldots + z^2 + z + 1 = 0 \Rightarrow \left(\overline{z}^{\frac{n-1}{2}} + z^{\frac{n-1}{2}}\right) + \ldots + \left(\overline{z}^2 + z^2\right) + (\overline{z} + z) + 1 = 0.$

Notând $z + \overline{z} = t \Rightarrow \overline{z}^2 + z^2 = t^2 - 2, \overline{z}^3 + z^3 = t^3 - 3t.$

În cazul n par, $n = 2p \Rightarrow z^n - 1 = (z^p - 1)(z^p + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow z^p - 1 = 0$, ecuaţie ale cărei rădăcini corespund vârfurilor pare, sau $z^p + 1 = 0$, ale cărei rădăcini corespund vârfurilor impare.

Exemple: $\underline{n = 3}$:

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow z_k^2 + z_k + 1 = 0 \Rightarrow \overline{z_k} + z_k = -1 \Rightarrow \overline{A_0A_k^2}$$
$$= 2 - 2\cos\frac{2k\pi}{3} =$$
$$= 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 3 \Rightarrow A_0A_k = \sqrt{3}$$

$\underline{n = 4}$:

$z^4 - 1 = 0 \Rightarrow z_k^3 + z_k^2 + z_k + 1 = 0 \Rightarrow \overline{z_k} + \overline{z_k}^2 + z_k + 1 = 0.$

Dar $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$

$$z^2 - 1 = 0 \Rightarrow \overline{z_k} = z_k$$
$$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = -\frac{1}{z} - \overline{z}$$

Rezultă că

$\overline{A_0A_1^2} = (z_1 - 1)(\overline{z_1} - 1) = (z_1 - 1)(-z_1 - 1) = 1 - z_1^2 = 1 - i^2 = 2 \Rightarrow A_0A_1 = \sqrt{2}.$■

Vom prezenta în continuare mai multe teoreme de geometrie datorate în mare parte matematicianului român D. Pompeiu şi care rezultă din identităţi între numerele complexe şi inegalităţi între modulele lor. Vom arăta cum teorema lui Pompeiu se poate deduce foarte simplu dintr-o teoremă a lui Ptolemeu, demonstrată tot cu ajutorul numerelor complexe. Deşi atât de simplă, teorema lui Pompeiu a dat naştere multor lucrări. Cel care a încheiat cercetările făcute în legătură cu ea a fost Theodor Angheluţă, care a dat generalizarea ei.

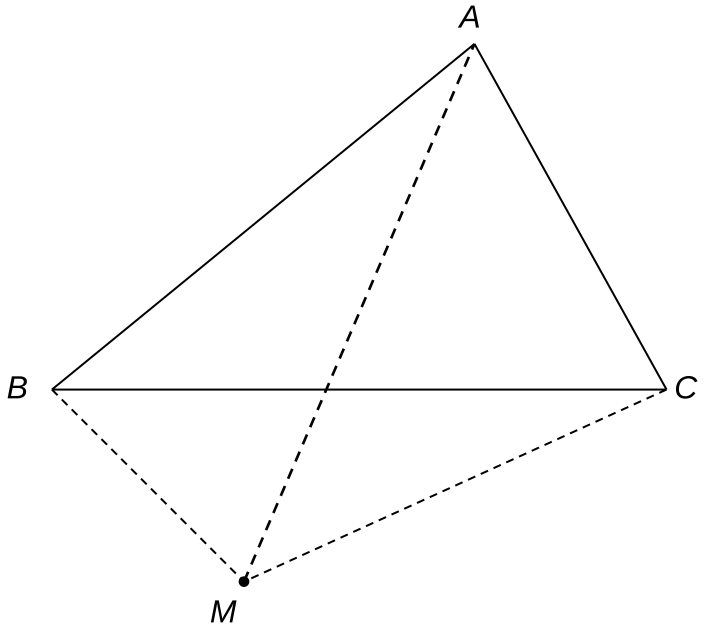
1) Inegalitatea lui Ptolemeu:

Dacă M este un punct oarecare în planul triunghiului ABC, atunci avem: $AM \cdot BC \leq BM \cdot CA + CM \cdot AB$

Fie a, b, c, z afixele punctelor A, B, C, M. Avem identităţile:

$$a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$$

$$z(b-c)+z(c-a)+z(a-b)=0$$



Scăzându-le membru cu membru, obţinem:
$(a-z)(b-c)+(b-z)(c-a)+(c-z)(a-b)=0$,
adică:
$(a-z)(b-c)=(b-z)(a-c)+(c-z)(b-a)$.
Aplicând inegalitatea referitoare la modulul unei sume, avem: $|(a-z)(b-c)| \leq |(b-z)(a-c)|+|(c-z)(b-a)|$. (1)
Cum $|(a-z)(b-c)|=AM\cdot BC$, $|(b-z)(a-c)|=MB\cdot CA$, $|(c-z)(b-a)|=CM\cdot AB$ inegalitatea este demonstrată. ■

2) În cazul particular când triunghiul ABC este echilateral, deci $|a-c|=|b-c|=|c-a|$, relaţia (1) devine: $|z-a|\leq|z-b|+|z-c|$, deci $MA\leq MB+MC$ şi se obţine astfel teorema Pompeiu:
Cu distanţele unui punct la vârfurile unui triunghi echilateral din acelaşi plan, putem să formăm un triunghi.

3) Th. Angheluţă a generalizat teorema lui D. Pompeiu: Fiind dat un poligon regulat $A_1A_2\ldots A_n$ înscris în cercul cu centrul în W şi O un punct oarecare în planul lui, cu segmentele OA_1, OA_2,…,OA_n se

poate construi o linie poligonală închisă ale cărei laturi să fie $OA_1, OA_2, \ldots, OA_n$.

Fie $z_0, z_1, \ldots, z_n$ afixele punctelor $W, A_1, A_2, \ldots, A_n$ şi $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ rădăcinile de ordinul n ale unităţii, adică rădăcinile ecuaţiei $z^n - 1 = 0$:

$$e_0 = 1$$

$$e_1 = cos\frac{2\pi}{n} + i\,sin\frac{2\pi}{n}$$

$$e_2 = cos\frac{4\pi}{n} + i\,sin\frac{4\pi}{n}$$

………

$e_{n-1} = cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\,sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$.

Poligonul $A_1A_2\ldots A_n$ fiind regulat, putem scrie relaţiile:

$$z_1 - z_0 = e_0(z_1 - z_0)$$

$$z_2 - z_0 = e_1(z_1 - z_0)$$

$$z_3 - z_0 = e_2(z_1 - z_0)$$

………

$$z_n - z_0 = e_{n-1}(z_1 - z_0)$$

Înmulţind aceste relaţii cu $e_0, e_1, \ldots, e_{n-1}$ şi adunând, obţinem: $e_0z_1 + e_1z_2 + \ldots + e_{n-1}z_n = (e_0 + e_1 + \ldots + e_{n-1})z_0 + (e_0^2 + e_1^2 + \ldots + e_{n-1}^2)(z_1 - z_0)$

Din $z^n - 1 = 0$ deducem că: (rel. Viéte)

$$e_0 + e_1 + \ldots + e_{n-1} = 0$$

$e_0e_1 + e_0e_2 + \ldots + e_{n-2}e_{n-1} = 0$, deci

$$e_0^2 + e_1^2 + \ldots + e_{n-2}^2 = (e_0 + e_1 + \ldots + e_{n-1})^2 - 2(e_0e_1 + \ldots + e_{n-2}e_{n-1}) = 0$$

Rezultă relaţia: $e_0z_1 + e_1z_2 + \ldots + e_{n-1}z_n = 0$, analoagă cu cea obţinută în cazul triunghiului echilateral: $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$, ceea ce arată că se poate construi o linie poligonală închisă ale cărei laturi sunt egale cu $|z_1| = OA_1$, $|z_2| = OA_2, \ldots |z_n| = OA_n$.

Scriind $e_0z_1 = -(e_1z_2 + \ldots + e_{n-1})z_n$ şi aplicând la modulul sumei din al doilea membru inegalitatea cunoscută, obţinem că o latură oarecare a liniei poligonale este mai mică sau cel mult egală cu suma celorlalte laturi.

5.3.3 Geometrie analitică în planul complex

1) Distanţa între două puncte $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ este dată de $M_1M_2 = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, formulă care devine pentru $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$:
$|M_1M_2|^2 = \left(\frac{z_1+\bar{z}_1}{2} - \frac{z_2+\bar{z}_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{z_1-\bar{z}_1}{2i} - \frac{z_2-\bar{z}_2}{2i}\right) = \frac{(z_1-z_2+\bar{z}_1-\bar{z}_2)^2}{4} - \frac{[z_1-z_2-(\bar{z}_1-\bar{z}_2)]^2}{4} == (z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)$.

2) a) Ecuaţia generală a dreptei $ax+by+c=0$ devine pentru $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ şi $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$:
$a(z+\bar{z}) - bi(z-\bar{z}) + 2c = 0$ sau $(a-bi)z + (a+bi)\bar{z} + 2c = 0$ sau $\alpha z + \overline{\alpha z} + a = 0$ (1)

b) Ecuaţia dreptei determinată de două puncte distincte
$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$ devine $\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \end{vmatrix} = 0$

(2)

şi condiţia de colinearitate a trei puncte $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$, $M_3(x_3,y_3)$: $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ se scrie $\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix} = 0$

(3)

c) Coeficientul unghiular al dreptei $ax+by+c=0$, $m = tg\theta = -\frac{a}{b}$ devine în complex pentru dreapta $\alpha z + \overline{\alpha z} + a = 0$:
$m = -\frac{\alpha}{\bar{\alpha}} = \frac{\cos\theta + i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta} = \cos 2u + i\sin 2u = e^{2iu}$.
Pentru ecuaţia dreptei scrisă sub forma (2) echivalentă cu $(\overline{z_1} - \overline{z_2})z + (z_1-z_2)\bar{z} + z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2 = 0$ panta se scrie $m = -\frac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1-z_2}$.

3) Ecuaţia cercului

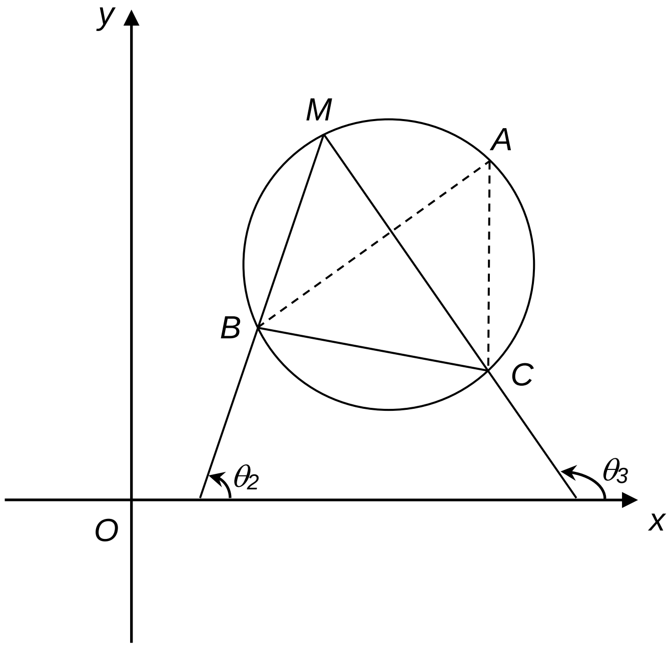
a) Fiind dat punctul A de afix a, ecuaţia pe care trebuie s-o verifice numărul complex z astfel încât imaginea lui M să fie pe cercul de centru A şi rază R este: $|z-a|^2 = R^2$.
Ecuaţia se mai scrie: $(z-a)(\bar{z}-\bar{a}) - R^2 = 0 \Leftrightarrow z\bar{z} - \bar{a}z - a\bar{z} + c = 0$, unde $c = a\bar{a} - R^2 \in R$

(4)

b) Condiţia ca punctul M de afix z să se afle pe cercul ABC, punctele A, B, C având afixele egale cu z_1, z_2, z_3 este:

$\frac{z-z_3}{z-z_2} = k\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}, k \in R.$ (5)

Demonstraţie: Fie M un punct oarecare din planul xOy. Considerăm



numărul complex $\frac{z-z_3}{z-z_2}$. Argumentul său este diferenţa dintre $Arg(z-z_3)$ şi $Arg(z-z_2)$, adică diferenţa dintre unghiul θ_3 făcut de vectorul $\overrightarrow{CM}$ cu axa Ox şi unghiul θ_2 pe care-l face vectorul $\overrightarrow{BM}$ cu axa Ox, deci unghiul $\widehat{BMC}$ este egal cu unghiul $\widehat{BAC}$, deci numerele complexe $\frac{z-z_3}{z-z_2}$ şi $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$ au acelaşi argument $\widehat{BAC}$.

Când punctul M se află pe arcul BC, opus punctului A, unghiul $\widehat{BMC}$ este $-\pi + \widehat{BAC}$. În acest caz argumentele numerelor complexe $\frac{z-z_3}{z-z_2}$ şi $\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$ diferă prin π.■

c) Centrul cercului ABC, O' are afixul α dat de formula:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & z_1\overline{z_1} & 1 \\ z_2 & z_2\overline{z_2} & 1 \\ z_3 & z_3\overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}} \qquad (6)$$

Într-adevăr, cum $O'B = O'C = O'A$ rezultă că $|\alpha - z_2| = |\alpha - z_3| = |\alpha - z_1|$. Prima egalitate se mai scrie $(\alpha - z_2)(\overline{\alpha} - \overline{z_2}) = (\alpha - z_3)(\overline{\alpha} - \overline{z_3})$, iar a doua $(\alpha - z_3)(\overline{\alpha} - \overline{z_3}) = (\alpha - z_1)(\overline{\alpha} - \overline{z_1})$. Dezvoltând calculele obţinem sistemul de ecuaţii liniare:

$$\alpha(\overline{z_3} - \overline{z_2}) + \overline{\alpha}(z_3 - z_2) = z_3\overline{z_3} - z_2\overline{z_2}$$

$$\alpha(\overline{z_1} - \overline{z_3}) + \overline{\alpha}(z_1 - z_3) = z_1\overline{z_1} - z_3\overline{z_3},$$

a cărui soluţie este $\alpha = \frac{z_1\overline{z_1}(z_2-z_3)+z_2\overline{z_2}(z_3-z_1)+z_3\overline{z_3}(z_1-z_2)}{z_1\overline{z_3}-z_3\overline{z_1}+z_2\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}+z_3\overline{z_2}-z_2\overline{z_3}}$.■

d) Raza cercului ABC este dată de formula: $R^2 = |z_1 - \alpha|^2 = (z_1 - \alpha)(\overline{z_1} - \overline{\alpha})$.

Folosind relaţia (6) deducem că:

$$z_1 - \alpha = z_1 - \frac{\begin{vmatrix} z_1 & z_1\overline{z_1} & 1 \\ z_2 & z_2\overline{z_2} & 1 \\ z_3 & z_3\overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\overline{z_2}(z_1-z_3)(z_1-z_2)-\overline{z_3}(z_1-z_2)(z_1-z_3)}{\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}},$$

adică:

$$z_1 - \alpha = \frac{(z_1-z_2)(z_1-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}}.$$

Conjugatul lui $z_1 - \alpha$ este $\overline{z_1} - \overline{\alpha} = \frac{(\overline{z}_1-\overline{z}_2)(\overline{z_1}-\overline{z_3})(z_2-z_3)}{-\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}}$ şi obţinem $R^2 = \frac{(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})(z_2-z_3)(\overline{z}_2-\overline{z_3})(z_3-z_1)(\overline{z}_3-\overline{z}_1)}{-\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}^2}$, adică $R^2 = \frac{\overline{AB^2BC^2CA^2}}{-\begin{vmatrix} z_1 & \overline{z_1} & 1 \\ z_2 & \overline{z_2} & 1 \\ z_3 & \overline{z_3} & 1 \end{vmatrix}}$ (7)

Ţinând seama de formula (6) de la II.3.1, relaţia (7) se mai scrie: $R^2 = \frac{\overline{AB^2BC^2CA^2}}{(4S_{\Delta ABC})^2}$, formulă care se reduce la una binecunoscută din geometria elementară: $R = \frac{abc}{4S}$, unde S este aria triunghiului ABC, iar a, b, c sunt lungimile laturilor lui.

4) Ecuaţia unei conice
$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$ devine în complex: $\alpha z^2 + 2az\overline{z} + \overline{\alpha z^2} + 2\beta z + 2\overline{\beta}\overline{z} + b = 0,\, a, b \in R,$

(8)

unde $4\alpha = a_{11} - 2ia_{12}$
$2\beta = a_{13} - ia_{23}$
$4a = a_{11} + a_{22}$
$b = a_{33}.$

Deoarece ecuaţia (8) se poate scrie sub forma: $k\left(lz + \overline{l}\overline{z} + \lambda\right)^2 = (z - \gamma)\left(\overline{z} - \overline{\lambda}\right)$, ea descrie locul geometric al punctelor pentru care raportul distanţelor la focarul $F(\gamma)$ şi la directoarea $lz + \overline{l}\overline{z} + \lambda = 0$ este constant.

Conica (8) este un cerc dacă $\alpha = 0$. Este hiperbolă echilaterală dacă $a = 0$.

Centrul conicei este dat de:

$$\alpha z + a\overline{z} + \beta = 0,$$
$$az + \overline{\alpha z} + \overline{\beta} = 0.$$

Rezolvări

Forma algebrică a numerelor complexe

1. $(4+3i)^2 = 16+2i-9 = 7+24i \Rightarrow Re\,z = 7, Im\,z = 24$

2. $(2+i)^2 + (1-2i)^2 = 4+4i-1+1-4i-4 = 0 \Rightarrow Re\,z = 0,\ Im\,z = 0$

3. $(2+i)(1-2i) = 2-4i+i-2i^2 = 4-3i \Rightarrow Re\,z = 4,\ Im\,z = 3$

4. $(1+i)^2 - (1-i)^2 = 2i - (-2i) = 4i \Rightarrow Re\,z = 0,\ Im\,z = 4$

5. $(4+3i)^3 = (4+3i)^2(4+3i) = (7+24i)(4+3i) =$
$= 28+21i+96i+72i^2 = -44+117i \Rightarrow Re\,z = -44,\ Im\,z = 117$

6. $(2+i)^3 + (1-2i)^3 = (3+4i)(2+i) + (-3-4i)(1-2i) =$
$= 2+11i-3+6i-4i-8 = -9+13i \Rightarrow Re\,z = -9,\ Im\,z = 13$

7. Fie $z_1 = 1$ şi $z_2 = 5+3i$. Atunci:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{5-3i}{(5+3i)(5-3i)} = \frac{5-3i}{25+9} = \frac{5}{34} - \frac{3}{34}i \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Re\,z = \frac{5}{34},\ Im\,z = -\frac{3}{34}$$

8. Amplificăm fracţia cu conjugatul numitorului şi obţinem:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{1+1} = \frac{2i}{2} = i \Rightarrow Re\,z = 0,\ Im\,z = 1$$

9. Amplificăm fracţia cu $3+2i$:

$$\frac{3+2i}{3-2i} = \frac{9+12i-4}{9+4} = \frac{5}{13} + \frac{12}{13}i \Rightarrow Re\,z = \frac{5}{13},\ Im\,z = \frac{12}{13}$$

10. $\frac{3+i}{2-i} + \frac{2-i}{3+i} = \frac{(3+i)(2+i)}{4+1} + \frac{(2-i)(3-i)}{9+1} =$

$$= \frac{5+5i}{5} + \frac{5-5i}{10} = 1+i+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i = \frac{3}{2}+\frac{1}{2}i \Rightarrow Re\,z = \frac{3}{2},\ Im\,z = \frac{1}{2}$$

11. $\frac{i-7}{1+7i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(i-7)(1-7i)}{1+49} + \frac{(1-i)^2}{1+1} = \frac{i+7-7+49i}{50} + \frac{-2i}{2} =$

$$= i - i = 0 \Rightarrow Re\,z = 0,\ Im\,z = 0$$

12. $\frac{1+18i}{3+4i} + \frac{7-26i}{3-4i} = \frac{(1+18i)(3-4i)}{9+16} + \frac{(7-26i)(3+4i)}{9+16} =$

$$= \frac{3+72-4i+54i}{25} + \frac{21+104+28i-78i}{25} = 8 \Rightarrow Re\,z = 8,\ Im\,z = 0$$

13. $\frac{(-3+4i)(5-4i)}{3-2i}=\frac{(-3+4i)(5-4i)(3+2i)}{9+4}=$

$$=\frac{(-15+12i+20i+16)(3+2i)}{13}=\frac{(1+32i)(3+2i)}{13}=$$

$$=\frac{-61+98i}{13}\Rightarrow Re\,z=-\frac{61}{13},\ Im\,z=\frac{98}{13}$$

14. $\frac{(4-3i)(2+3i)}{5-3i}=\frac{(8+12i-6i+9)(5+3i)}{25+9}=\frac{(17+6i)(5+3i)}{34}=$

$$=\frac{85+51i+30i-18}{34}=\frac{67+81i}{34}\Rightarrow Re\,z=\frac{67}{34},\ Im\,z=\frac{81}{34}$$

15. $\frac{(1+i)^3}{1-i}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}=\frac{(1+i)^3(1+i)}{(1-i)(1+i)}+\frac{(1-i)^4}{(1+i)^2}=$

$$=\frac{(1+i)^4}{1+1}+\frac{(1-i)^4}{2i}=\frac{(2i)^2}{2}+\frac{(-2i)(-2i)^2}{4}=$$

$$=\frac{-4}{2}+\frac{8i}{4}=-2+2i\Rightarrow Re\,z=-2,\ Im\,z=2$$

16. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{15}=i^{15}=-i\Rightarrow Re\,z=0,\ Im\,z=-1$

17. $1+j+j^2=1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=$

$$=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=0$$

18. $(1+j)^3+(1+j^2)^3=\left(1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(1+\frac{1}{4}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}\right)^3=$

$$=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3=$$

$$=\frac{1}{8}+3\cdot\frac{1}{4}\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}-i\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{4}\cdot i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}+i\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8}=$$

$$=\frac{1}{4}-\frac{9}{4}=-2$$

19. $\frac{1+j}{1+j^2}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=$

$=\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=j$

20. $\frac{1+j}{(1-i)^2}+\frac{1-j}{(1+i)^2}=\frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-2i-1}+\frac{\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+2i-1}=$

$=\frac{\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2i}{4}+\frac{\left(\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-2i)}{4}=\frac{i-\sqrt{3}-3i-\sqrt{3}}{4}=$

$=\frac{-2\sqrt{3}-2i}{4}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$

21. Două numere complexe sunt egale dacă părţile lor reale coincid şi părţile lor imaginare de asemenea coincid.

$a+bi-2(a-bi)=2+9i\Rightarrow -a+3bi=2+9i\Rightarrow a=-2,\quad b=3\Rightarrow$

$\Rightarrow z=-2+3i$

22. $3(a+bi)=7-(a-bi)\Rightarrow 3a+3bi-7+a-bi=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow 4a=7,\ 2b=0\Rightarrow a=\frac{7}{4},\ b=0\Rightarrow z=\frac{7}{4}$$

23. $\overline{(a-bi-2i)}=2(a+bi)\Rightarrow \overline{a-(b+2)i}=2a+2bi\Rightarrow$
$\Rightarrow a+(b+2)i=2a+2bi\Rightarrow a=2a,\quad b+2=2b\Rightarrow a=0,\ b=2\Rightarrow z=2i$

24. $\overline{(1+i)(a-bi)-1+i}=a-bi-i\Rightarrow$

$$\Rightarrow \overline{a-bi+ai+b-1+i}=a-(b+1)i\Rightarrow$$

$$\overline{a+b-1+(a-b+1)i}=a-(b+1)i\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b-1-(a-b+1)i=a-(b+1)i\Rightarrow\begin{cases}a+b-1=a\\a-b+1=b+1\end{cases}$$

$$\Rightarrow a=2,\ b=1$$

$\Rightarrow z=2+i$

25. $z-2z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z-2z=\overline{z-2z}=\bar{z}-2\bar{z}$. Fie $z=a+bi\Rightarrow z-2z=-a-bi$ şi $\bar{z}-2\bar{z}=a-bi-2(a-bi)=-a+bi$. Egalând ultimele două relaţii, obţinem:

$$-a-bi=-a+bi\Rightarrow 2bi=0\Rightarrow b=0\Rightarrow z=a,\quad a\in\mathbb{R}$$

26. $z - iz \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z - iz = -(\overline{z - iz})$. Fie
$z = a + bi \Rightarrow z - iz = a + bi - i(a + bi) = a + b + (b - a)i$, iar
$-\left(\bar{z} - \overline{iz}\right) = -[a - bi - (-b - ai)] = -[a + b + (a - b)i] = -a - b + (b - a)i$.
Egalând ultimele două relaţii, obţinem:
$a + b + (b - a)i = -a - b + (b - a)i \Rightarrow a + b = -a - b \Rightarrow a + b = 0$.adică:
$z = a - ai, \quad a \in \mathbb{R}$.

27. $|17 + 51i| = \sqrt{289 + 2601} = \sqrt{2890} = 17\sqrt{10}$

28. $|(7 + 35i)(3 + 2i)| = |7 + 35i| \cdot |3 + 2i| = \sqrt{49 + 1225} \cdot \sqrt{9 + 4} =$

$$= \sqrt{1274} \cdot \sqrt{13} = 7\sqrt{26} \cdot \sqrt{13} = 91\sqrt{2}$$

29. $\left|\frac{7-35i}{3-2i}\right| = \frac{|7-35i|}{|3-2i|} = \frac{\sqrt{49+1225}}{\sqrt{9+4}} = \frac{7\sqrt{26}}{\sqrt{13}} = 7\sqrt{2}$

30. $\left|\frac{(5+3i)(1+i)}{4+i}\right| = \frac{\sqrt{25+9}\sqrt{1+1}}{\sqrt{16+1}} = \frac{\sqrt{34}\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = 2$

31. Folosind faptul că $\forall u \in \mathbb{C}$ avem $|u|^2 = u\bar{u}$, relaţia din ipoteză devine:
$(z_1 - z_2)(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + (z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3}) + (z_3 - z_1)(\overline{z_3} - \overline{z_1}) == 3(z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_3\overline{z_3}) \Leftrightarrow \quad -(z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 + z_3\overline{z_1} + \overline{z_1}z_3) = z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} \Leftrightarrow \quad z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_3\overline{z_3} + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 + z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 + z_3\overline{z_1} + \overline{z_1}z_3 = 0 \Leftrightarrow (z_1 + z_2 + z_3)\left(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$$(z_1 + z_2 + z_3)\left(\overline{z_1 + z_2 + z_3}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$\left|z_1 + z_2 + z_3\right|^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (1).

Folosind faptul că $Im\, u = \frac{u-\bar{u}}{2i}$, condiţia din enunţ devine:

$$\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} = \overline{z_2}z_3 - z_2\overline{z_3} = \overline{z_3}z_1 - z_3\overline{z_1} \neq 0 \Leftrightarrow$$

$\overline{z_1}z_2 + \overline{z_1}z_3 = z_1\overline{z_2} + z_1\overline{z_3}$ (2)
$\overline{z_2}z_3 + \overline{z_2}z_1 = z_2\overline{z_3} + z_2\overline{z_1}$ (3)
$\overline{z_3}z_1 + \overline{z_3}z_2 = z_3\overline{z_1} + z_3\overline{z_2}$ (4)
Dacă la (2) adunăm $z_1\overline{z_1}$, la (3) $z_2\overline{z_2}$, iar la (4) adunăm $z_3\overline{z_3}$, obţinem:
$(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})z_1 = (z_1 + z_2 + z_3)\overline{z_1}$ (5)
$(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})z_2 = (z_1 + z_2 + z_3)\overline{z_2}$ (6)
$(\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3})z_3 = (z_1 + z_2 + z_3)\overline{z_3}$ (7)
Notând $z = z_1 + z_2 + z_3$, relaţiile (5), (6), (7) devin respectiv: $\bar{z}z_1 = z\overline{z_1}$, $\bar{z}z_2 = z\overline{z_2}$, $\bar{z}z_3 = z\overline{z_3}$. Înmulţind primele două egalităţi, obţinem: $z\bar{z}(\overline{z_1}z_2) = z\bar{z}(z_1\overline{z_2}) \Rightarrow |z|^2(\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2}) = 0$. Cum $\overline{z_1}z_2 - z_1\overline{z_2} \neq 0$,

deducem că $|z|^2 = 0 \Rightarrow z = z_1 + z_2 + z_3 = 0$ (8). Deoarece condiţia din enunţ implică relaţia (8) şi (8) este echivalentă cu relaţia din enunţ, aceasta este demonstrată.

32. Fie $z_1 = 1 + i\sqrt{a}$, $z_2 = 1 - i\sqrt{a}$. Se observă că $S_n = \frac{1}{2}(z_1^n + z_2^n)$. Dar z_1 şi z_2 sunt soluţiile ecuaţiei $z^2 - 2z + 1 + a = 0 \Rightarrow \Rightarrow z^n - 2z^{n-1} + (1+a)^{n-2} = 0 \Rightarrow\Rightarrow z_1^n + z_2^n = 2(z_1^{n-1} + z_2^{n-1}) - (1+a)(z_1^{n-2} + z_2^{n-2})$.

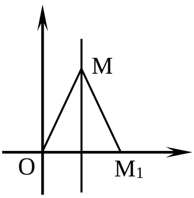
Prin împărţire cu 2, rezultă $S_n = 2S_{n-1} - (1+a)S_{n-2}$. Demonstrăm proprietatea din enunţ prin inducţie după *n*. Avem $S_1 = 1 \vdots 2^{1-1}$, iar dacă $S_k \vdots 2^{k-1}$, $\forall k \leq n-1$, atunci

$S_k = 2S_{n-1} - (1+a)S_{n-2} = 2(2^{n-2}q_1) - (4k)(2^{n-3}q_2) = 2^{n-1}(q_1 - kq_2)$,

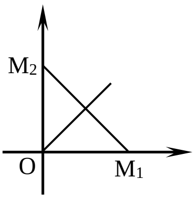
deci S_n se divide cu 2^{n-1}.

Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

1. Modulul diferenţei numerelor complexe z şi $z_1 = 1$ reprezintă distanţa dintre imaginile lor geometrice $M(z)$ şi respectiv $M_1(1,0)$. Relaţia din ipoteză reprezintă faptul că distanţa de la un punct variabil *M* la punctul fix $M_1(1,0)$ este egală cu lungimea segmentului *OM*. Mulţimea punctelor aflate la egală distanţă de *O* şi *M* este mediatoarea segmentului *OM*.

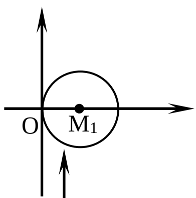


2. Această egalitate reprezintă faptul că distanţa de la punctul variabil $M(z)$ la $M_1(1,0)$ este egală cu distanţa de la $M_2(0,1)$. Mulţimea punctelor de afix *z* pentru care $|z-1| = |z-i|$ este mediatoarea segmentului de extremităţi $M_1(1,0)$ şi $M_2(0,1)$, adică exact prima bisectoare ($x = y$).



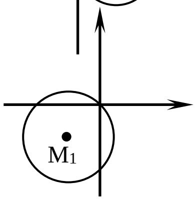
3. $z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$. Punctul de afix *z* descrie axa *Ox*

4. $|z-1| = 1$ reprezintă faptul că distanţa de la *M*, punct variabil, la punctul de afix $M_1(1,0)$ este egală cu 1. Punctul *M* descrie cercul de centru M_1 şi de rază 1.



5. $z\bar{z} - z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z}(z-1) - (z-1) - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$(z-1)(\bar{z}-1) = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Rightarrow |z| = 1$.



Punctul de afix z descrie cercul de rază 1, având centrul în originea axelor de coordonate.

6. $|z+1+i| \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow |z-(-1-i)| \leq \sqrt{2}$. Semnificaţia geometrică este aceea că distanţa de la $M(z)$ la punctul fix $M_1(-1,-1)$ este mai mică sau egală cu $\sqrt{2}$. Mulţimea de puncte căutată o reprezintă interiorul cercului $C(M_1, \sqrt{2})$ cu centrul în M_1 şi de rază $\sqrt{2}$.

7. Fie $z = x + yi$. Din $|z-\varepsilon| \leq 1$ rezultă că z se găseşte în interiorul cercului de centru $\left(cos\frac{2\pi}{3},\ sin\frac{2\pi}{3}\right)$ şi raza egală cu 1. Din $|z-\varepsilon^2| \leq 1$ rezultă că z se găseşte în interiorul cercului de centru $\left(cos\frac{4\pi}{3},\ sin\frac{4\pi}{3}\right)$ şi raza egală cu 1. Deoarece intersecţia interioarelor celor două cercuri se găseşte în interiorul cercului cu centrul în origine şi de rază 1, rezultă că $|z| \leq 1$.

Forma trigonometrică a numerelor complexe

Numărului complex $z = a + bi$ i se asociază în planul complex punctul $M(a,b)$. *Forma trigonometrică* a lui z este $z = r(cos\,\phi + i\,sin\,\phi)$, unde $r = \sqrt{a^2+b^2}$, iar $\phi = m(\widehat{XOM})$ (măsurat în sens trigonometric).

1. $z = -3 \Rightarrow M(-3,0) \in Ox;\ |z| = |-3| = 3,\ \phi = m(\widehat{XOM}) = \pi \Rightarrow$
$$\Rightarrow z = 3(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$$

2. $z = i\sqrt{2} \Rightarrow M(0,\sqrt{2}) \in Oy;\ |z| = \sqrt{2},\ \phi = m(\widehat{XOM}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{2} + i\,sin\frac{\pi}{2}\right)$$

3. $z = -2i \Rightarrow M(0,-2) \in y'O;\ |z| = 2,\ \phi = m(\widehat{XOM}) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$
$$\Rightarrow z = 2\left(cos\frac{3\pi}{2} + i\,sin\frac{3\pi}{2}\right)$$

4. $z = -1 + i \Rightarrow M(-1,1)$ este situat în cadranul II;
$$|z| = \sqrt{2},\ \phi = m(\widehat{XOM}) \text{ cu } \mathrm{tg}\phi = \frac{b}{a} = -1 \Rightarrow \phi = \mathrm{arctg}(-1) = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

5. $z = \sqrt{3} + i \Rightarrow M(\sqrt{3},1)$ este situat în cadranul I; $|z| = \sqrt{2}$,
$$\phi = \mathrm{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow z = 2\left(cos\frac{\pi}{6} + i\,sin\frac{\pi}{6}\right)$$

6. $z = \frac{3}{1-i} = \frac{3+3i}{2} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i \Rightarrow$

$$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) \text{ este situat în cadranul I; } |z| = \sqrt{\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2},$$

$$\phi = \text{arctg } 1 = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\, sin\frac{\pi}{4}\right)$$

7. $z = \frac{\sqrt{2}}{1+i} = \frac{\sqrt{2}(1-i)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \Rightarrow$

$$\Rightarrow M\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ este situat în cadranul IV; } |z| = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 1,$$

$$\phi = \text{arctg(-1)} = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow z = cos\frac{7\pi}{4} + i\, sin\frac{7\pi}{4}$$

8. $z = \frac{1}{1+i\sqrt{3}} = \frac{1-i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow$

$$\Rightarrow M\left(\frac{1}{4},-\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \text{ este situat în cadranul IV; } |z| = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}} = \frac{1}{2},$$

$$\phi = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{5\pi}{3} \Rightarrow z = \frac{1}{2}\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\, sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

9. $z = \frac{1+3i-3-i}{1-i} + \frac{(-2i)^2}{2i} = \frac{-2(1-i)}{1-i} + 2i = -2 + 2i \Rightarrow$

$$\Rightarrow M(-2{,}2) \text{ este situat în cadranul II; } |z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2},$$

$$\phi = \text{arctg(-1)} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z = 2\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\, sin\frac{3\pi}{4}\right),\ z = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

10. $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i} = \frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)(1+i)}{1+1} = \frac{1+i+i\sqrt{3}-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow |z| = \sqrt{\frac{1-2\sqrt{3}+3}{4}+\frac{1+2\sqrt{3}+3}{4}} = \sqrt{2},$$

$$\phi = \text{arctg}\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \text{arctg}\frac{4+2\sqrt{3}}{-2} = \text{arctg}\left(\text{-2-}\sqrt{3}\right) \Rightarrow z = \sqrt{2}e^{i\phi}$$

11. $z = \frac{5+11i\sqrt{3}}{7-4i\sqrt{3}} = \frac{\left(5+11i\sqrt{3}\right)\left(7+4i\sqrt{3}\right)}{49+48} =$

$$= \frac{35+20\sqrt{3}i+77\sqrt{3}i-44\cdot 3}{97} = \frac{-97+97\sqrt{3}i}{97} = -1+\sqrt{3}i;$$

$$|z| = \frac{\sqrt{25+121\cdot 3}}{\sqrt{49+48}} = \frac{2\sqrt{97}}{\sqrt{97}} = 2;\ \phi = \text{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\, sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

12. $z=\frac{(3+7i)(2+5i)}{4+25}=\frac{6+15i+14i-35}{29}=\frac{-29+29i}{29}=-1+i\Rightarrow$

$$\Rightarrow M(-1{,}1) \text{ este situat în cadranul II; } |z|=\sqrt{2},$$

$$\phi=\text{arctg(-1)}=\frac{3\pi}{4}\Rightarrow z=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

13. $z=\frac{(9\sqrt{3}+3i)(2-i\sqrt{3})}{4+3}=\frac{18\sqrt{3}-27i+6i+3\sqrt{3}}{7}=\frac{21\sqrt{3}-21i}{7}\Rightarrow$

$z=3\sqrt{3}-3i\Rightarrow M(3\sqrt{3},-3)$ este situat în cadranul IV; $|z|=\sqrt{27+9}$

$$=6,\phi=\text{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{11\pi}{6}\Rightarrow z$$

$$=6\left(cos\frac{11\pi}{6}+i\,sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

14. $z=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})(1+i)^2}{2}=\frac{(\sqrt{6}-i\sqrt{2})\cdot 2i}{2}=\sqrt{2}+\sqrt{6}i\Rightarrow$

$$\Rightarrow M(\sqrt{2},\sqrt{6}) \text{ este situat în cadranul I; } |z|=\sqrt{2+6}=2\sqrt{2},$$

$$\phi=\text{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}\Rightarrow z=2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right)$$

15. *Metoda I*. Fiez $z=\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$. Atunci $z=\frac{(1+i\sqrt{3})^2}{1+3}\Rightarrow$

$$z=\frac{1+2i\sqrt{3}-3}{4}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\ \ |z|=1,\ \phi=arctg(-\sqrt{3})=\frac{2\pi}{3}\Rightarrow$$

$$z=cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}\Rightarrow z^3=cos\left(3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)+i\,sin\left(3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$z^3=cos\,2\,\pi+i\,sin\,2\,\pi$$

Metoda II. Scriem sub formă trigonometrică următoarele numere: $z_1=1+i\sqrt{3}$, $z_2=1-i\sqrt{3}$. Apoi efectuăm împărţirea $\frac{z_1}{z_2}$.

$$z_1=2\left(cos\frac{\pi}{3}+i\,sin\frac{\pi}{3}\right),\ z_2=2\left(cos\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)+i\,sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{5\pi}{3}\right)\right]=$$

$$cos\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)+i\,sin\left(2\pi-\frac{4\pi}{3}\right)=cos\frac{2\pi}{3}+i\,sin\frac{2\pi}{3}=z$$

Metoda III. Scrierea exponenţială este:

$$z=e^{i\frac{2\pi}{3}}\Rightarrow z^3=\left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=e^{2\pi i}$$

16. Scriem:

$$z_1=\sqrt{3}-i=2\left(cos\frac{11\pi}{6}+i\,sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

şi

$z_2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Rezultă:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left[cos\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right) + i\,sin\left(\frac{11\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left(cos\frac{19\pi}{12} + i\,sin\frac{19\pi}{12}\right) \Rightarrow \left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{2004}$$

$$= \sqrt{2}^{2004}\left(cos\left(2004\cdot\frac{19\pi}{12}\right) + i\,sin\left(2004\cdot\frac{19\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 2^{1002}(cos(167\cdot 19\pi) + i\,sin(167\cdot 19\pi)) =$$

$$= 2^{1002}(cos(2\cdot 1586\pi + \pi) + i\,sin(2\cdot 1586\pi + \pi)) = -2^{1002}.$$

17. $\left(-1 + i\sqrt{3}\right)^{12} = 2^{12}\left(cos\frac{2\pi}{3} + i\,sin\frac{2\pi}{3}\right)^{12} =$

$= 2^{12}(cos\,8\,\pi + i\,sin\,8\,\pi) = 2^{12}$;

$(1 + i)^{20} = \sqrt{2}^{20}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)^{20} = 2^{10}(cos\,5\,\pi + i\,sin\,5\,\pi) =$

-2^{10};

$$\left(-1 - i\sqrt{3}\right)^{12} = 2^{12}\left(cos\frac{4\pi}{3} + i\,sin\frac{4\pi}{3}\right)^{12} = 2^{12}$$

$$(1 - i)^{20} = \sqrt{2}^{20}\left(cos\frac{7\pi}{4} + i\,sin\frac{7\pi}{4}\right)^{20} = 2^{10}(cos\,3\,5\pi + i\,sin\,3\,5\pi)$$
$$= -2^{10}$$

$\Rightarrow \frac{\left(-1+i\sqrt{3}\right)^{12}}{(1+i)^{20}} - \frac{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{12}}{(1-i)^{20}} = \frac{2^{12}}{-2^{10}} - \frac{2^{12}}{-2^{10}} = -2^2 + 2^2 = 0.$

18. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^p} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n\left(cos\frac{n\pi}{4}+i\,sin\frac{n\pi}{4}\right)}{\left(\sqrt{2}\right)^p\left(cos\left(-\frac{p\pi}{4}\right)+i\,sin\left(-\frac{p\pi}{4}\right)\right)} =$

$\left(\sqrt{2}\right)^{n-p}\left[cos\frac{(n+p)\pi}{4} + i\,sin\frac{(n+p)\pi}{4}\right]$,

deci $|z| = \left(\sqrt{2}\right)^{n-p}$ şi $\phi = (n + p)\frac{\pi}{4}$.

19. Avem de rezolvat ecuaţia $z^3 = -8$.

Metoda I. Scriem forma trigonometrică a numărului complex -8, a cărui parte reală este $a = -8$, iar partea imaginară este $b = 0$. Avem $-8 = 8(cos\,\pi + i\,sin\,\pi)$. Atunci rădăcinile de ordinul 3 ale lui –8 sunt date de $z_k = \sqrt[3]{8}\left(cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)$, $k = 0,1,2$:

$$z_1 = 2\left(cos\frac{\pi}{3} + i\,sin\frac{\pi}{3}\right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$z_2 = 2(cos\,\pi + i\,sin\,\pi) = -2$$

$z_3 = 2\left(cos\frac{5\pi}{3} + i\,sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i.$

Metoda II. Dacă 8 este modulul şi π este argumentul numărului complex –8, atunci numărul $b = 8^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}$ verifică $b^3 = -8$. Ecuaţia propusă este echivalentă, deci cu $\left(\frac{z}{b}\right)^3 = 1$. Rădăcinile sale sunt 3 numere de forma $be^{i\frac{2k\pi}{3}}$, cu $0 \le k \le 2$:

$$z_1 = 8^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$
$$z_2 = 8^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = 2e^{i\pi}$$
$$z_3 = 8^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{i\frac{4\pi}{3}} = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$$

20. Avem de rezolvat ecuaţia $z^3 = -1 + i$.

Metoda I. $-1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4} + i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$ sau $-1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} \Rightarrow$ $b = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{4}}$ verifică $b^3 = -1 + i$. Ecuaţia propusă este echivalentă cu $\left(\frac{z}{b}\right)^3 = 1$ cu rădăcinile $be^{i\frac{2k\pi}{3}}$, $0 \le k \le 2$: $z_1 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{11\pi}{12}}$, $z_3 = \sqrt[6]{2}e^{i\frac{19\pi}{3}}$

Metoda II. Deoarece $\sqrt{2}$ este modulul şi $\frac{3\pi}{4}$ este argumentul numărului complex $-1 + i$, atunci rădăcinile ecuaţiei sunt de forma $z^3 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $k = 0,1,2$: $z_1 = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$, $z_2 = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{11\pi}{12} + i\,sin\frac{11\pi}{12}\right)$ şi

$$z_3 = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{19\pi}{3} + i\,sin\frac{19\pi}{3}\right)$$

21. Avem de rezolvat ecuaţia $z^3 = \sqrt{3} + i$. Atunci $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow b = 2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{\pi}{18}}$ verifică $b^3 = \sqrt{3} + i$. Rezultă că $\left(\frac{z}{b}\right)^3 = 1$ are rădăcinile $z_1 = \sqrt[3]{2}e^{i\frac{\pi}{18}}$, $z_2 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{18}+\frac{2\pi}{3}\right)}$ şi $z_3 = \sqrt[3]{2}e^{i\left(\frac{\pi}{18}+\frac{4\pi}{3}\right)}$.

22. Trebuie să rezolvăm ecuaţia $z^3 = \frac{3+7i}{2-5i}$. Avem $\frac{3+7i}{2-5i} = \frac{6+14i+15i-35}{4+25} = \frac{-29}{29} + i = -1 + i$ şi rădăcinile sunt aceleaşi cu cele de la exerciţiul 2.

23. $z^4 = -1$. Avem $-1 = \cos\pi + i\sin\pi = e^{i\pi} \Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{4}}$. Rezultă că $\left(\frac{z}{b}\right)^4 = 1$ are rădăcini de forma $be^{i\frac{3\pi}{4}}$, $0 \le k \le 3$: $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ şi $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$.

24. $z^4 = 1 + i$. Scriem: $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow b = \left(\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{8}}$ Atunci soluţiile ecuaţiei sunt $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$, $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{5\pi}{8}}$, $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{9\pi}{8}}$ şi $z_4 = \sqrt[8]{2}e^{i\frac{13\pi}{8}}$.

25. $z^4 = \sqrt{3} + i$. Obţinem: $\sqrt{3} + i = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow b = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$ şi rădăcinile ecuaţiei sunt $z_1 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{\pi}{24}}$, $z_2 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{13\pi}{24}}$, $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{25\pi}{24}}$ şi $z_3 = \sqrt[4]{2}e^{i\frac{37\pi}{24}}$.

26. $\dfrac{-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4} - i\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} = -1 \Rightarrow z^4 = -1$ şi soluţiile sunt cele de la exerciţiul 5.

27. Notăm $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$. Atunci $|z| = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$; $\phi = \text{arctg}(-1) = \frac{7\pi}{4}$.

Rezultă $z = e^{i\frac{7\pi}{4}} \Rightarrow z^{2005} = \left(e^{i\frac{7\pi}{4}}\right)^{2005} = e^{i\cdot 2005\cdot\frac{7\pi}{4}} \Rightarrow$

$$z^{2005} = \cos\left(2\cdot 1754\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\cdot 1754\pi + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

28. Scriem $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{7\pi}{4}} \Rightarrow z^{2004} = e^{i\cdot 2004\cdot\frac{7\pi}{4}} = e^{i\cdot 501\cdot 7\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow z^{2004} = \cos(2\cdot 1753\pi + \pi) + i\sin(2\cdot 1753\pi + \pi) = -1$$

29. a) Putem scrie $z_1 = -\sqrt{2} = \sqrt{2}(\cos\pi + i\sin\pi) = \sqrt{2}e^{i\pi}$, $z_2 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_3 = 1 - i = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{4}}$. Astfel, relaţia din ipoteză devine: $\sqrt{2}e^{i\pi} = e^{i\theta}\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow e^{i\pi} = e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} \Rightarrow \pi = \theta + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow z_1 = e^{i\frac{3\pi}{4}}\cdot z_2$

care înseamnă că z_1 este o rotaţie de centru 0 şi unghi $\frac{3\pi}{4}$ a lui z_2.

b) Avem $z_2 - z_1 = \dfrac{\sqrt{2}e^{i\pi}}{e^{i\frac{3\pi}{4}}} - \sqrt{2}e^{i\pi} = \sqrt{2}e^{i\pi}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}} - 1\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow z_1 - z_2 = z_1\left(\frac{1}{e^{i\theta}} - 1\right)$ şi $z_3 - z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi}e^{i\frac{3\pi}{4}} - \sqrt{2}e^{i\pi} = \sqrt{2}e^{i\pi}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}} - 1\right)$

$$\Rightarrow z_3 - z_1 = z_1\left(e^{i\theta} - 1\right)$$

c) $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi}\left(e^{-i\frac{3\pi}{4}}-1\right)}{\sqrt{2}e^{i\pi}\left(e^{i\frac{3\pi}{4}}-1\right)} = \frac{z_1\frac{1-e^{i\theta}}{e^{i\theta}}}{z_1\left(e^{i\theta}-1\right)} = \frac{1-e^{i\theta}}{e^{i\theta}} \cdot \frac{1}{-\left(1-e^{i\theta}\right)} = \frac{1}{-e^{i\theta}} \Rightarrow$

$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = -e^{-i\theta} \Rightarrow arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1} = arg\left(-e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4}$.

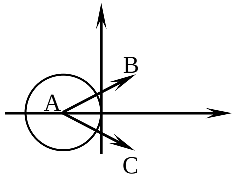
Putem calcula măsura acestui unghi şi printr-o a doua metodă. Scriem:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{1 + i + \sqrt{2}}{1 - i + \sqrt{2}} = \frac{\left(1 + \sqrt{2} + i\right)^2}{\left(1 + \sqrt{2}\right)^2 - i^2}$$

$$= \frac{1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2\left(1 + \sqrt{2}\right)i - 1}{3 + 2\sqrt{2} + 1} =$$

$= \frac{2+2\sqrt{2}+\left(2+2\sqrt{2}\right)i}{4+2\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}+\left(1+\sqrt{2}\right)i}{2+\sqrt{2}} = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}i$. Atunci

$$arg\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} + \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}i\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$



30. Fie a, b, c, d afixele respective ale punctelor A, B, C, D şi p, q, r, s afixele punctelor P, Q, R, S. Triunghiul APB fiind dreptunghic isoscel cu $m\left(\widehat{APB}\right) = 90°$, $PB = PA$. Cum $\overrightarrow{PA}$ este imaginea lui $\overrightarrow{PB}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, avem: $a - p = i(b - p) \Leftrightarrow p(1 - i) = a - ib \quad \Rightarrow 2p = (a - ib)(1 + i) \quad \Rightarrow p = \frac{1}{2}[a(1 + i) + b(1 - i)]$ (1).

Analog:

$\overrightarrow{QC}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{QB}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, deci

$q = \frac{1}{2}\left[c\left(1+i\right)+b\left(1-i\right)\right]$ (2)

$\overrightarrow{RC}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{RD}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, deci $r = \frac{1}{2}[c(1 + i) + d(1 - i)]$ (3)

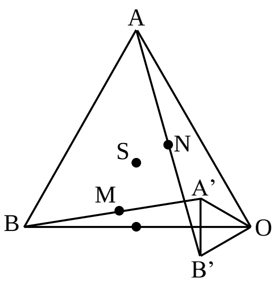
$\overrightarrow{SA}$ este imaginea vectorului $\overrightarrow{SD}$ în rotaţia de unghi $\frac{\pi}{2}$, deci $s = \frac{1}{2}[a(1 + i) + d(1 - i)]$ (4).

Adunând relaţiile (1) şi (3) obţinem $p+r=\frac{1}{2}[(a+c)(1+i)+(b+d)(1-i)]$. Adunând relaţiile (2) şi (4) obţinem $q+s=\frac{1}{2}[(a+c)(1+i)+(b+d)(1-i)]$. Deci $p+r=q+s$, ceea ce înseamnă că diagonalele *PR* şi *QS* au acelaşi mijloc, deci *PQRS* este paralelogram.

31. Prezentăm o soluţie care foloseşte numere complexe. Alegem ca axă reală dreapta *BC*, iar ca axă imaginară dreapta *AD*. Fie *ai*, *b*, *c* afixele punctelor *A*, *B*, *C* şi *xi* afixul punctului *H*. Notăm cu z_1, z_2, z_3, z_4 afixele proiecţiilor punctului *D* pe dreptele *BA*, *BH*, *CA* şi *CH*. Ecuaţia dreptei *AB* este $ax+by-ab=0$. Cu $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, înlocuind x, y, obţinem: $a\cdot\frac{z+\bar{z}}{2}+b\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}-ab=0 \Leftrightarrow a(z+\bar{z})-bi(z-\bar{z})=2ab \Leftrightarrow z(a-bi)+\bar{z}(a+bi)-2ab=0$. Piciorul perpendicularei duse din $D(z_0)$pe dreapta *AB* este dat de formula $z_1=\frac{z_0(a-bi)+\overline{z_0}(a+bi)+2ab}{2(a-bi)}$. Cum $z_0=0$, rezultă că $z_1=\frac{ab}{a-bi}$. Analog, determinăm $z_2=\frac{bx}{x-bi}$, $z_3=\frac{ac}{a-ci}$ şi $z_4=\frac{cx}{x-ci}$.

Ţinând cont că $a, b, c, x \in \mathbb{R}$, observăm că $\frac{z_3-z_1}{z_3-z_2}:\frac{z_4-z_1}{z_4-z_2}=\frac{a^2x^2(c-b)^2}{a^2x^2(c-b)^2+b^2c^2(a-x)^2}\in\mathbb{R}$ de unde rezultă că punctele $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, $M_4(z_4)$ sunt conciclice.

32. Alegem pe *S* ca origine şi fie *z* afixul lui *O*. Atunci afixele lui *A* şi *B* sunt εz şi $\varepsilon^2 z$, unde $\varepsilon^3=1$ şi $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Deoarece $\overrightarrow{SB'}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB'}$, atunci putem lua pe $z+t$ afixul lui B' ;i, cum triunghiul $A'B'O$ este echilateral, afixul lui A' va fi $z-\varepsilon t$. Afixul x al mijlocului N al segmentului AB' este $x=\frac{\varepsilon z+z+t}{2}=\frac{(\varepsilon+1)z+t}{2}=\frac{-\varepsilon^2 z+t}{2}=\frac{z-\varepsilon t}{-2\varepsilon}$. Afixul y al mijlocului M al segmentului $A'B$ este $y=\frac{\varepsilon^2 z+z-\varepsilon t}{2}=\frac{(\varepsilon^2+1)z-\varepsilon t}{2}=\frac{-\varepsilon z-\varepsilon t}{2}=\frac{-\varepsilon(z+t)}{-2\varepsilon}$.



Deci $SM=\frac{|-\varepsilon(z+t)|}{2}=\frac{|z+t|}{2}$; $SB'=z+t$; $SN=\left|\frac{z-\varepsilon t}{-2\varepsilon}\right|=\frac{|z-\varepsilon t|}{2}$; $SA'=|z-\varepsilon t|$. Rezultă, deci, că: $\frac{SM}{SB'}=\frac{SN}{SA'}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{SM}{SN}=\frac{SB'}{SA'}$ (1). În continuare, avem: $B'M=$

$\left|z + t - \frac{\varepsilon(z+t)}{2}\right| = |z + t| \cdot \left|\frac{2-\varepsilon}{2}\right| = |z + t| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ şi $A'N = \left|z - \varepsilon t + \frac{z-\varepsilon t}{2\varepsilon}\right| = \frac{|(2\varepsilon+1)(z-\varepsilon t)|}{2\varepsilon} = |z - \varepsilon t| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$. Rezultă, deci, că $\frac{SM}{SN} = \frac{B'M}{A'N}$ (2). Din (1) şi (2) rezultă că triunghiurile $SB'M$ şi $SA'N$ sunt asemenea, dar invers orientate.

Teste

Testul 1

1. $\frac{(1+i)^2}{2-i} + \frac{(1-i)^2}{2+i} = \frac{2i(2+i)}{4+1} + \frac{-2i(2-i)}{4+1} = \frac{4i-2-4i-2}{5} = -\frac{4}{5}$

2. $z = \frac{2}{1+i} = \frac{2(1-i)}{1+1} = 1 - i$. Imaginea geometrică a lui z este $M(1, -1)$ aflat în cadranul IV, de unde rezultă $\phi = \operatorname{arctg}(-1) = \frac{7\pi}{4}$

3. $z^2 = 7 - 24i$. Fie $z = a + bi \Rightarrow (a + bi)^2 = 7 - 24i \Leftrightarrow$ $\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ ab = -12 \end{cases}$.

Dar $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ şi $|7 - 24i| = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} \Rightarrow$
$\Rightarrow a^2 + b^2 = 25$.

Sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = 7 \\ ab = -12 \\ a^2 + b^2 = 25 \end{cases}$ are soluţiile $a = 4,\ b = -3$ şi $a = 4,\ b = -3$.

Numerele complexe căutate sunt $z_1 = 4 - 3i$ şi $z_2 = -4 + 3i$.

Altfel: se pot verifica toate variantele propuse, prin ridicare la pătrat. Se observă că doar numerele complexe propuse la răspunsul a) sunt rădăcini pătrate pentru numărul complex din enunţ.

4. $(z - 2)(\bar{z} - i) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (z - 2)(\bar{z} - i) = \overline{(z - 2)(\bar{z} - i)}$. Fie $z = a + bi$, atunci $(a-2+bi)[a-(b+1)i] = (a-2-bi)[a+(b+1)i] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (a - 2)a - (a - 2)(b + 1)i + abi + b(b + 1) =$$
$$= (a - 2)a + (a - 2)(b + 1)i - abi + b(b + 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow -abi - ai + 2bi + 2i + abi = abi + ai - 2bi - 2i - abi \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2ai - 4bi - 4i = 0 \Rightarrow a - 2b = 2 \Rightarrow a = 2b + 2$. Numerele complexe care îndeplinesc condiţia dată sunt $z = 2b + 2 + 2bi,\ b \in \mathbb{R}$.
Răspunsul corect este b)

5. $AB = |1 + 1 - 2i| = |2 - 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$,
$BC = |-1 + 2i + 1 + 2i| = |4i| = \sqrt{16} = 4$,
$AC = |1 + 1 + 2i| = |2 + 2i| = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$.

Cum $AB = AC$, rezultă că ΔABC este isoscel. Dar $AB^2 + AC^2 = BC^2$, de unde rezultă, conform reciprocei teoremei lui Pitagora că ΔABC este dreptunghic. Răspunsul corect este b).

Testul 2

1. $(2+i)^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 \cdot i + 3\cdot 2\cdot i^2 + i^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i$

2. Se ştie că rădăcinile cubice complexe ale unităţii sunt 1, j şi j^2, cu $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Fiind dat un număr complex a nenul, dacă b este o rădăcină cubică a lui a, atunci cele trei rădăcini cubice ale lui a sunt b, bj şi bj^2.

$2+i$ este o rădăcină cubică a lui $2+11i$, deci celelalte două sunt $j(2+i)$ şi $j^2(2+i)$.

$z_1 = 2+i,\ z_2 = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i) = \left(-1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2}+\sqrt{3}\right),$

$z_3 = \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(2+i) = \left(-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(-\frac{1}{2}-\sqrt{3}\right)$

3. $z_1 = 3z_2 \Leftrightarrow x - 4 + i(y+5) = 3(x+4) + 3i(1-y) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x-4 = 3x+12 \\ y+5 = 3-3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -16 \\ 4y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-8, -\frac{1}{2}\right)$$

4. $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$; $M(\sqrt{3}, -1)$ este în cadranul IV, deci $\phi = arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{11\pi}{6}$.

Altfel: $z = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\,sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$, de unde rezultă $arg\, z = -\frac{\pi}{6}$. Răspunsul corect este c).

5. Ecuaţia $2iz + 3 + i = z - iz$ este echivalentă cu $z(1-3i) = 3+i$, de unde rezultă că $z = \frac{3+i}{1-3i}$. Îl scriem pe z în formă algebrică amplificând fracţia cu expresia conjugată a numitorului, astfel:

$z = \frac{(3+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{3-3+9i+i}{1+9} = \frac{10i}{10} = i.$

Ecuaţia are, deci, soluţie unică. Răspunsul corect este b).

Testul 3

1. Fie $z = a + bi,\ |z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ecuaţia devine:

$\sqrt{a^2+b^2} - a - bi = 1 + 2i.$

Egalitatea numerelor complexe din cei doi membri ai ecuaţiei ne conduce la sistemul:

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+b^2}-a=1\\ -b=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{a^2+4}=1+a\\ b=-2\end{cases}.$$

Din prima ecuaţie, prin ridicare la pătrat, obţinem $a^2+4=1+2a+a^2$, de unde $a=\frac{3}{2}$; $z=\frac{3}{2}-2i$. Răspunsul corect este b).

Altfel: se pot înlocui în expresia dată toate variantele, pe rând.

2. $\frac{1+i\sqrt{3}}{\alpha-(\alpha+1)i}\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1-i\sqrt{3}}{\alpha-(\alpha+1)i}=\frac{1+i\sqrt{3}}{\alpha+(\alpha+1)i}$, unde am folosit proprietatea $z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$. Atunci:

$$\alpha+\alpha i\sqrt{3}-(\alpha+1)i+\sqrt{3}(\alpha+1)$$
$$=\alpha-\alpha i\sqrt{3}+(\alpha+1)i+\sqrt{3}(\alpha+1)\Rightarrow$$
$$\left(2\alpha\sqrt{3}-2\alpha-2\right)i=0\Rightarrow\alpha\left(2\sqrt{3}-2\right)=2\Rightarrow$$

$\Rightarrow\alpha=\frac{2}{2\left(\sqrt{3}-1\right)}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$. Răspunsul corect este d)

3. $z=-1+i\Rightarrow|z|=\sqrt{2}$. $M(-1,1)$ se află în cadranul II, deci $\phi=\operatorname{arctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$. Forma trigonometrică este $z=\sqrt{2}\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\,sin\frac{3\pi}{4}\right)$. Răspuns corect a).

4. $z=\sqrt{-2i}\Rightarrow z^2=-2i$. Fie $z=a+bi$. Atunci $(a+bi)^2=-2i\Rightarrow$ $\Rightarrow\begin{cases}a^2-b^2=0\\ ab=-1\\ a^2+b^2=2\end{cases}$. Din $|z|^2=|-2i|\Rightarrow a^2+b^2=2$. Sistemul are soluţiile $a=1$, $b=-1$ şi $a=-1$, $b=1$, de unde rezultă că soluţiile sunt $z_1=1-i$, $z_2=-1+i$. Răspuns corect b).

5. Notăm $z^4=y\Rightarrow y^2-(1-i)y-i=0$ cu $\Delta=(1-i)^2+4i\Rightarrow$

$$\Rightarrow\Delta=-2i+4i=2i=(1+i)^2\Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1=\frac{1-i+1+i}{2}=1$, $y_2=\frac{1-i-1-i}{2}=-i$.

Ecuaţia $z^4=1$ are rădăcinile $z_k=cos\frac{2k\pi}{4}+i\,sin\frac{2k\pi}{4}$, $0\le k\le 3$, dintre care numai două sunt reale: $z_1=1$ şi $z_3=-1$. Ecuaţia $z^4=-i$ are rădăcinile $z_k=cos\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\,sin\frac{\frac{3\pi}{2}+2k\pi}{4}$, $0\le k\le 3$, complexe. Răspunsul corect este b).

Testul 4

1. Din a doua ecuaţie rezultă $z=\frac{-1-z'}{2i}$ care înlocuit în prima ecuaţie ne conduce la:

$$\frac{1+i}{2i}(-1-z')+z'-iz'=0 \Leftrightarrow \frac{-i+1}{2}(-1-z')+z'-iz'=0 \Rightarrow$$
$\frac{i}{2}+\frac{iz'}{2}-\frac{1}{2}-\frac{z'}{2}+z'-iz'=0 \Rightarrow z'-1=0 \Rightarrow z'=1.$ Atunci $z=\frac{-1-1}{2i}=i$. Răspunsul corect este b)

2. Dacă $u\in\mathbb{C}$, $Im\,u=0 \Leftrightarrow u=\bar{u}$. Dacă $u\in\mathbb{C}$ şi $|u|=1 \Rightarrow \bar{u}=\frac{1}{u}$.
Calculăm conjugatul numărului complex dat:

$$\frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1z_2}+\overline{z_2z_3}+\overline{z_1z_3}}{1+\overline{z_1z_2z_3}}=$$
$$=\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}}{1+\frac{1}{z_1}\frac{1}{z_2}\frac{1}{z_3}}=$$
$$=\frac{z_1+z_2+z_3+z_1z_2+z_2z_3+z_1z_3}{1+z_1z_2z_3}.$$ Răspunsul corect este a).

3. Scriind sub formă trigonometrică numerele propuse şi folosind formula lui Moivre, obţinem:

$$\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^n=2 \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \cos n\frac{2\pi}{3}+ i\sin n\frac{2\pi}{3}+\cos n\frac{4\pi}{3}+i\sin n\frac{4\pi}{3}=2$$

şi folosind transformarea sumelor de funcţii trigonometrice în produs avem:

$$2\cos\frac{n\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}\cos\frac{n\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)}{2}+$$
$$+2i\sin\frac{n\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)}{2}\cos\frac{n\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{4\pi}{3}\right)}{2}=2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos n\pi\cos n\frac{\pi}{3}+i\sin n\pi\cos n\frac{\pi}{3}=1 \Rightarrow$$
$\cos n\pi\cos n\frac{\pi}{3}=1 \Rightarrow n=3k,\ k\in\mathbb{N}$. Răspunsul corect este c).

4. Afixele punctelor considerate sunt $z_A=1+2i$, $z_B=5-i$, $z_D=5+5i$. Calculăm lungimile laturilor trunghiului *ABD*:

$$AB=|z_A-z_B|=|1+2i-5+i|=\sqrt{16+9}=5$$
$$AD=|z_A-z_D|=|1+2i-5-5i|=\sqrt{16+9}=5$$
$$BD=|z_B-z_D|=|5-i-5-5i|=\sqrt{36}=6$$

$AB=AD \Rightarrow \Delta ABD$ isoscel. Răspuns corect a)

5. Arătăm că mijloacele diagonalelor patrulaterului *ABCD* coincid, adică $z_A + z_C = z_B + z_D$. Fie $z_C = x + yi$.
$1 + 2i + x + yi = 5 - i + 5 + 5i \Rightarrow x + yi = 9 + 2i \Rightarrow C(9,2)$.
Raspuns: b).

Testul 5

1. $(z^4 + 4)(z^2 - 2z + 5) = 0 \Leftrightarrow z^2 = -4$ sau $z^2 - 2z + 5 = 0$. Rădăcinile pătrate ale lui –4 se află rezolvând sistemul $\begin{cases} a^2 - b^2 = -4 \\ ab = 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases}$, unde $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$. Soluţiile sistemului sunt $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$. Ecuaţia de gradul II propusă are discriminantul $\Delta = 4 - 20 = -16 = (4i)^2$ şi soluţiile $z_3 = \frac{2-4i}{2} = 1 - 2i$, $z_4 = 1 + 2i$. Imaginile geometrice ale numerelor complexe z_1, z_2, z_3, sunt, respectiv $A(0,2)$, $B(0,-2)$, $C(1,-2)$, $D(1,2)$. Verificăm dacă mijloacele diagonalelor coincid: $z_A + z_C = 2i + 1 - 2i = 1$, $z_B + z_D = -2i + 1 + 2i = 1 \Rightarrow$ *ABCD* este paralelogram. Cum $|z_A - z_C| = |2i - 1 + 2i| = \sqrt{1 + 16} = |z_B - z_D|$, deci lungimile diagonalelor sunt egale, rezultă că *ABCD* este dreptunghi. Răspuns corect a).

2. Scriem $1+i$ în formă trigonometrică: $1 + i = \sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{4} + i\,sin\frac{\pi}{4}\right)$. Atunci rădăcinile de ordinul 3 ale numărului complex $1+i$ sunt date de $z_k = \sqrt[6]{2}\left(cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\,sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right)$, $0 \le k \le 2$. Răspuns corect: c).

3. Fie $z = a + bi$, $z \neq i$ $\frac{a-1+(b-1)i}{1-b+ai} = \frac{((a-1)+(b-1)i)(1-b-ai)}{(1-b)^2+a^2} = \frac{(a-1)(1-b)-(a-1)ai+(b-1)(1-b)i+a(b-1)}{(1-b)^2+a^2} =$
$= \frac{1-ab-1+b-ai^2+ai+bi-b^2i-i+bi+ab-a}{(1-b)^2+a^2} = \frac{-1+b+(a+2b-a^2-b^2-1)i}{(1-b)^2+a^2}$, fiind real dacă $a^2 + b^2 - a - 2b + 1 = 0$ sau $\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + (b-1)^2 = \frac{1}{4}$, deci punctele căutate se află pe cercul de centru $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ şi rază $\frac{1}{2}$. Răspuns corect b).

4. Ştim că $z_k\overline{z_k} = |z_k|^2 = r^2$. Calculăm $\bar{z}$ ţinând cont că $|z_1| = \ldots = |z_n|$, deci $z_1\overline{z_1} = \ldots = z_n\overline{z_n} = r^2$, echivalent cu $\overline{z_1} = \frac{1}{z_1}$, ..., $\overline{z_n} = \frac{1}{z_n}$.

Atunci $\overline{z}=\frac{\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(\overline{z_n}+\overline{z_1}\right)}{\overline{z_1}\cdot\ldots\cdot\overline{z_n}}=\frac{r^2\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}\right)\cdot\ldots\cdot r^2\left(\frac{1}{z_n}+\frac{1}{z_1}\right)}{\frac{r^2}{z_1}\cdot\ldots\cdot\frac{r^2}{z_n}}=$ $=\frac{r^{2n}\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}\cdot\ldots\cdot\frac{z_n+z_1}{z_nz_1}}{r^{2n}\frac{1}{z_1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{z_n}}=\frac{(z_1+z_2)\cdot\ldots\cdot(z_n+z_1)}{z_1z_2\cdot\ldots\cdot z_nz_1}\cdot z_1\cdot\ldots\cdot z_n=z$.Cum $\bar{z}=z\Rightarrow z\in\mathbb{R}$.
Răspuns corect a).

5. Notăm $z=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\Rightarrow$

$\Rightarrow|z|^2=z\bar{z}=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\cdot\frac{\overline{z_1z_2}+\overline{z_2z_3}+\overline{z_3z_1}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}}=$ $=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\cdot\frac{r^4\left(\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_2z_3}+\frac{1}{z_3z_1}\right)}{r^2\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1z_2z_3}}=$ $=\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\cdot r^2\,\frac{z_1+z_2+z_3}{z_1z_2z_3}\,\frac{z_1z_2z_3}{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}=r^2\Rightarrow$ $z\in C(0,r)$. Răspuns corect a).

Bibliografie

1. A. Caţaron *Numere complexe. Culegere de probleme şi teste pentru elevii de liceu*. Ed. Ipadius, Braşov, 2003.

2. A. Caţaron *Numere complexe. Aplicații.* Lucrare metodico-științifică pentru obținerea gradului I în învățământ. Universitatea Transilvania din Braşov, 2003.

3. M. Bătineţu-Giurgiu, D.M. Bătineţu-Giurgiu, C. Ursu, J. Crînganu *Culegere de probleme de matematică pentru clasa a X-a*. Ed. Porto-Franco, 1993.

4. M. Dincă, M. Chiriţă *Numere complexe în matematica de liceu*. Ed. All Educaţional, 1996.

5. G. Gamow *Unu, doi, trei... infinit – Fapte și speculații științifice.* Editura Tineretului, 1967.

6. M. Ganga *Manual de matematică pentru clasa a X-a, vol. 2*. Ed. Mathpress, 2002.

7. C. Năstăsescu, C.Niţă, M. Brandiburu, D. Joiţa *Exerciţii şi probleme de algebră*. Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983.

8. N. Mihăileanu *Utilizarea numerelor complexe în geometrie.* Ed. Tehnică, Bucureşti, 1968.

9. L. Nicolescu, V. Boskoff *Probleme practice de geometrie*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1990.

10. N. Pascu, D. Răducanu *Funcţii complexe*. Ed. Universităţii Transilvania Braşov, 1999.

11. F. Turtoiu *Probleme de trigonometrie*. Ed. Tehnică, Bucureşti, 1986.

12. G. Ţiţeica *Probleme de geometrie*. Ed. Apollo, Craiova, 1992.

13. *Revista de matematică "Dan Barbilian"*. Ed. Paralela 45, anul 1, septembrie 1995.