

Marius PĂUN

David Cristian POPESCU

BAZELE MATEMATICII PENTRU INGINERI



Editura
Universității
Transilvania
din Brașov

2025

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa: Str. Iuliu Maniu nr. 41A

500091 Brașov

Tel.: 0268 476 050

Fax: 0268 476 051

E-mail: editura@unitbv.ro

Editură acreditată de CNCSIS

Adresa nr. 1615 din 29 mai 2002

ISBN 978-606-19-1808-9 (ebook)

Copyright © Autorii, 2025

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Matematică și Informatică al Facultății de Matematică și Informatică, Universitatea Transilvania din Brașov.

*Domnului Cristi Irimia pentru încurajări,
pentru suport, pentru răbdare,
pentru grijă, pentru tot.*

Prefață

Am decis să scriem această carte pornind de la faptul că mulți studenți de la profilurile inginerști au dificultăți în a promova examenele de matematică din primul an de studiu. Aceste dificultăți sunt datorate faptului că lor le lipsesc cunoștințe de matematică elementară. Pentru majoritatea elevilor de liceu studiul matematicii se rezumă la rezolvarea unor modele de subiecte de bacalaureat. Acest lucru contravine esenței învățării matematicii care trebuie să fie înțelegerea noțiunilor și abilitatea de a le aplica în diverse contexte.

Problema nivelului scăzut al cunoștințelor matematice necesare tinerilor care doresc să urmeze studii de inginerie este una la nivel european. Societatea SEFI, *European Society for Engineering Education* cu sediul la Bruxelles a elaborat studiul *A Framework for Mathematics Curricula in Engineering Education*, în care, pe trei nivele, s-au structurat cunoștințele de matematică necesare unui inginer. Deși pare ciudat dar Nivelul 0, cel al cunoștințelor fundamentale, elementare, este cel pe care nu s-a încumetat nimeni încă să îl transpună într-un manual. Prezentul manual face acest lucru și este elaborat respectând cadrul și indicațiile studiului anterior menționat. Cartea are atât o versiune tipărită cât și una electronică pentru a oferi rapid accesul la o anumită informație. Fără a avea pretenția unui caracter exhaustiv ea conține noțiunile de matematică studiate pornind cu clasele elementare și terminând cu ultima clasă de liceu, având însă și subiecte mai puțin elementare prezentate însă la un nivel la care să poată fi receptate de elevi.

Cartea este structurată pe patru capitole:

- GEOMETRIE, incluzând geometrie sintetică, geometrie analitică, trigonometrie, calcul vectorial;
- ALGEBRĂ, care cuprinde aritmetică, algebră elementară și spații vectoriale;
- CALCUL DIFERENȚIAL și CALCUL INTEGRAL;
- STATISTICĂ și PROBABILITĂȚI.

În fiecare secțiune a ei cartea urmează același model:

- o parte teoretică cu definiții, teoreme, unele chiar cu demonstrații acolo unde este necesar pentru înțelegere, cu explicații detaliate, urmate de aplicații și exemple rezolvate,
- un set de exerciții și probleme pentru consolidarea cunoștințelor iar, acolo unde a fost posibil și necesar, sunt prezentate și aplicații în

MATLAB.

Obişnuinţa de a utiliza softuri dedicate este esenţială în munca viitorilor ingineri.

Dorim să adresăm mulţumiri domnului prof.univ.dr. Radu Păltănea pentru indicaţiile şi observaţiile pertinente făcute la capitolul Calcul diferenţial şi calcul integral.

Mulţumim deasemenea studentei Teodora Boboc pentru ajutorul esenţial acordat la corectura manuscrisului redactat.

Publicarea acestei cărţi este finanţată de *Siemens Industry Software SRL* căreia îi suntem recunoscători.

Autorii

Cuprins

I	Geometrie	3
1	Geometrie sintetică	5
1.1	Unghiuri	5
1.2	Unghiuri formate de o secantă și două drepte paralele	8
1.3	Triunghiuri	9
1.4	Suma unghiurilor unui poligon convex	11
1.5	Linii importante în triunghi	11
1.6	Congruența triunghiurilor	14
1.7	Triunghiul dreptunghic	16
1.7.1	Teorema lui Pitagora	17
1.7.2	Congruența triunghiurilor dreptunghice	18
1.8	Asemănarea triunghiurilor	20
1.9	Cazuri de asemănare a triunghiurilor	21
1.10	Formule pentru calculul ariei unui triunghi	23
1.11	Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea	27
1.12	Formule pentru calculul ariilor unor figuri plane particulare	27
1.13	Formule de arii și volume pentru unele corpuri	28
1.13.1	Cub	28
1.13.2	Paralelipiped dreptunghic	29
1.13.3	Prismă dreaptă	30
1.13.4	Piramidă	30
1.13.5	Tetraedru regulat	31
1.13.6	Cilindru	31
1.13.7	Con	32
1.13.8	Sfera și calota sferică	33
1.13.9	Regula lui Kepler pentru determinarea aproximativă a volumelor unor solide	33
1.14	Transformări geometrice	34
1.14.1	Simetria față de un punct	34
1.14.2	Simetria față de o dreaptă	36

1.14.3	Translația	37
1.14.4	rotația	38
1.14.5	Omotetia	39
1.14.6	Inversiunea	40
2	Geometrie analitică	45
2.1	Coordonate cartezienne în plan	45
2.2	Diverse ecuații ale unei drepte în plan	48
2.2.1	Ecuția unei drepte care trece prin origine și are panta dată	48
2.2.2	Ecuția unei drepte determinată de panta ei și intersecția la O_y	49
2.2.3	Ecuția unei drepte care trece printr-un punct dat și are panta m	50
2.2.4	Ecuția unei drepte determinate de două puncte	52
2.2.5	Ecuția dreptei prin tăieturi	54
2.2.6	Ecuția generală a unei drepte în plan	55
2.2.7	Condiția de paralelism a două drepte	56
2.2.8	Condiția de perpendicularitate a două drepte .	57
2.3	Împărțirea planului în regiuni	59
2.3.1	Rezolvarea grafică a sistemelor de două inecuații liniare	60
2.3.2	Rezolvarea geometrică a sistemelor liniare de două ecuații cu două necunoscute	64
2.4	Cercul	66
2.4.1	Diverse forme ale ecuației unui cerc	66
2.4.2	Lungimea unui arc de cerc, aria cercului, aria sectorului și a segmentului de cerc	70
2.4.3	Ecuațiile tangentelor la cerc	72
2.5	Conice pe formă redusă	76
2.5.1	Elipsa	77
2.5.2	Hiperbola	84
2.5.3	Hiperbola conjugată a unei hiperbole date . . .	89
2.5.4	Parabola	90
2.5.5	Exerciții:	94
2.6	Prezentare sumară a suprafețelor cuadrice	95
2.6.1	Elipsoidul	95
2.6.2	Hiperboloidul cu o pânză	96
2.6.3	Hiperboloidul cu două pânze	96
2.6.4	Paraboloidul eliptic	97
2.6.5	Paraboloidul hiperbolic	98

3	Calcul vectorial	101
3.1	Vectori legați, vectori liberi	101
3.1.1	Vectori legați	102
3.1.2	Vectori liberi	102
3.2	Operații fundamentale cu vectorii liberi	103
3.2.1	Adunarea vectorilor liberi.	103
3.2.2	Înmulțirea unui vector cu un scalar	104
3.3	Expresia analitică a unui vector liber	104
3.3.1	Vector de poziție	104
3.3.2	Expresia analitică a unui vector determinat de două puncte	105
3.4	Produse de doi vectori	106
3.4.1	Produsul scalar	106
3.4.2	Produsul vectorial	108
3.5	Produse de trei vectori	112
3.5.1	Produsul mixt	112
3.5.2	Dublu produs vectorial	113
3.6	Probleme	114
4	Trigonometrie	121
4.1	Sinus, cosinus, tangentă în triunghiul drept-unghic . .	121
4.1.1	Definiția sinusului și cosinusului în triunghiul drept-unghic	125
4.1.2	Definiția tangentei în triunghiul dreptunghic .	127
4.1.3	Definiția cosecantei, secantei și cotangentei în triunghiul dreptunghic	128
4.2	Cercul trigonometric	129
4.2.1	Sens de parcurgere a cercului trigonometric . .	129
4.2.2	Măsurarea unghiurilor	129
4.2.3	Sinusul definit pe cercul trigonometric	131
4.2.4	Cosinusul definit pe cercul trigonometric	134
4.2.5	Definiția tangentei și a cotangentei pe cercul unitate	138
4.3	Rezolvarea triunghiurilor	142
4.3.1	Teorema sinusurilor	142
4.3.2	Teorema cosinusului	145
4.3.3	Aria unui triunghi când se cunosc două laturi și unghiul dintre ele	150
4.3.4	Rezolvarea triunghiurilor oarecare	151
4.3.5	Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice	154
4.3.6	Cazul special L.L.U.	154
4.4	Identități trigonometrice	156

4.4.1	Formule pentru sume și diferențe de unghiuri	157
4.4.2	Formule pentru transformarea produselor în sume 161	
4.4.3	Formule pentru transformarea sumelor în produse	162
4.5	Funcții trigonometrice	164
4.5.1	Funcții periodice, perioadă principală	164
4.5.2	Funcția sinus	165
4.5.3	Funcția cosinus	167
4.5.4	Funcția tangentă	168
4.5.5	Reciprocele funcțiilor sinus, cosinus, tangentă	170
4.5.6	Graficele funcțiilor $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, $\operatorname{tg}(ax)$	173
4.5.7	Graficele funcțiilor $\sin(x+a)$, $\cos(x+a)$, $\operatorname{tg}(x+a)$	174
4.6	Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice fundamentale	175
4.6.1	Rezolvarea ecuației $\sin(x) = c$	175
4.6.2	Rezolvarea ecuației $\cos(x) = c$	179
4.6.3	Rezolvarea ecuațiilor de forma $\operatorname{tg}(x) = c$	182
4.7	Miscări oscilatorii	184
4.7.1	Oscilații de forma $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$	184
4.7.2	Oscilații de tipul $f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$	185
4.7.3	Exerciții:	186

II Aritmetică și algebră 189

5 Aritmetică 191

5.1	Mulțimi de numere	191
5.1.1	Cardinalul unei mulțimi	191
5.1.2	Sistem pozițional de notare	192
5.2	Numere naturale	193
5.3	Numere întregi	194
5.3.1	Operații cu numere naturale și numere întregi	194
5.3.2	Teorema împărțirii cu rest	196
5.3.3	Criterii de divizibilitate	197
5.3.4	Numere prime	197
5.3.5	Algoritmul lui Euclid	201
5.4	Numere raționale	201
5.4.1	Operații cu numere raționale	203
5.4.2	Forma zecimală a unui număr rațional	204
5.4.3	Scrierea unei fracții zecimale sub formă de număr rațional	205
5.4.4	Împărțirea a două numere zecimale	205
5.5	Numere reale	207

5.5.1	Operații cu numere reale, ordinea operațiilor . . .	208
5.6	Modulul unui număr real	210
5.7	Forma științifică a unei fracții zecimale	210
5.8	Proporții	210
5.8.1	Proporții derivate	211
5.9	Rezolvarea problemelor de aritmetică	212
5.9.1	Metoda figurativă	212
5.9.2	Metoda reducerii la unitate	213
5.9.3	Metoda comparației	213
5.9.4	Metoda falsei ipoteze	214
5.9.5	Metoda retrogradă	215
5.10	Reguli de trei	215
5.10.1	Proportionalitate directă și inversă	215
5.10.2	Regula de trei simplă	216
5.10.3	Reguli de trei compuse	217
5.11	Aproximarea unui număr zecimal	219
5.11.1	Aproximarea prin lipsă la un anumit ordin de mărime	219
5.11.2	Aproximarea la un anumit ordin prin adaos . .	220
5.11.3	Rotunjirea fracțiilor zecimale	220
5.11.4	Calculule aproximative	221
5.11.5	Operații cu aproximări ale numerelor, propa- garea erorilor	221
5.11.6	Eroare relativă	223
6	Numere complexe	225
6.1	Definiția numerelor complexe	225
6.1.1	Egalitatea a două numere complexe	226
6.1.2	Operații cu numere complexe	226
6.2	Planul complex	227
6.2.1	Conjugatul și modulul unui număr complex . .	228
6.3	Proprietăți ale numerelor complexe	229
6.4	Forma trigonometrică a unui număr complex	230
6.4.1	Exemple	231
6.4.2	Operații cu numere complexe sub formă trigono- metrică	233
6.5	Rezolvarea ecuațiilor binome $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$	235
6.5.1	Rădăcinile de ordin 3 ale unității	236
6.6	Formulele lui Euler	238

7	Elemente de teoria mulțimilor	239
7.1	Apartenența și incluziunea	239
7.2	Operații cu mulțimi	241
7.2.1	Reuniunea a două mulțimi	241
7.2.2	Intersecția a două mulțimi	241
7.2.3	Diferența a două mulțimi	242
7.2.4	Mulțimea părților unei mulțimi și complemen- tara unei mulțimi	242
7.2.5	Diferența simetrică a două mulțimi	243
7.2.6	Produsul cartezian de mulțimi	244
7.3	Diagrame Venn	246
7.4	Exerciții	247
8	Funcții	249
8.1	Definiția noțiunii de funcție	249
8.2	Egalitatea a două funcții	252
8.3	Operații cu funcții	252
8.3.1	Operații aritmetice cu funcții reale	252
8.3.2	Compunerea a două funcții	253
8.4	Graficul unei funcții	257
8.4.1	Acțiunea unei translații asupra graficului unei funcții	258
8.4.2	Acțiunea unei transformări multiplicative asupra reprezentării grafice a unei funcții	259
8.5	Simetricile unei funcții față de axe și origi-ne	260
8.5.1	Simetrica funcției $f(x)$ față de axa Ox	260
8.5.2	Simetrica funcției $f(x)$ față de axa Oy	262
8.5.3	Simetrica unei funcții față de origine	263
8.6	Funcții injective, surjective, bijective	263
8.6.1	Funcții injective	263
8.6.2	Metode de a demonstra că o funcție este injectivă	263
8.6.3	Funcții monotone	266
8.6.4	Funcții surjective	267
8.6.5	Metode de a determina mulțimea pe care f este surjectivă	267
8.6.6	Exerciții:	269
8.6.7	Funcții bijective	269
8.7	Inversa unei funcții	270
9	Permutări	273
9.0.1	Transpoziții	274
9.0.2	Inversiuni, semnul unei permutări	275

9.0.3	Ciclurile unei permutări	277
10	Funcții polinomiale elementare	281
10.1	Funcția și ecuația de gradul al doilea	281
10.1.1	Graficul funcției de gradul al doilea	281
10.1.2	Forma canonică a unei funcții de gradul al doilea	284
10.1.3	Intersecția cu axele de coordonate	286
10.2	Semnul funcției de gradul al doilea	289
10.3	Intervale de monotonie	290
10.4	Relațiile lui Viète	291
10.5	Aplicații la formulele lui Viète	293
10.6	Poziția rădăcinilor ecuației de grad doi	300
10.6.1	O rădăcină în intervalul (p, q)	301
10.6.2	Rădăcină dublă în (p, q)	301
10.6.3	Două rădăcini în (p, q)	302
10.6.4	Două rădăcini în afara lui (p, q)	302
10.7	Funcția și ecuația polinomială de grad trei	304
10.7.1	Relațiile lui Viète pentru ecuația de gradul al treilea	306
10.7.2	Natura rădăcinilor unei ecuații de gradul al treilea	306
10.8	Funcția și ecuația polinomială de grad patru	306
10.8.1	Relațiile lui Viète pentru ecuația de gradul al patrulea	308
10.9	Teorema împărțirii cu rest	308
10.9.1	Restul împărțirii unui polinom prin $x-a$	308
10.9.2	Schema lui Horner	309
10.9.3	Restul împărțirii unui polinom prin $(x-a)(x-b)$.	310
11	Funcții putere, exponențiale, logaritmice	315
11.1	Funcția de tip putere	315
11.1.1	Funcția putere cu exponent număr natural	315
11.1.2	Funcția radical de ordin par	316
11.1.3	Funcția radical de ordin impar	316
11.1.4	Funcții putere de exponent negativ	317
11.1.5	Scurt istoric	318
11.2	Funcții exponențiale	318
11.2.1	Reguli de calcul cu exponențiale care au aceeași bază	319
11.2.2	Exponențiale care au baza subunitară	319
11.2.3	Exponențiale cu bază supraunitară	320
11.2.4	Funcția exponențială $f(x) = e^x$	321
11.3	Funcția logaritmică	323

11.3.1	Proprietăți ale funcției logaritmice	323
11.3.2	Funcția logaritmică de bază subunitară	324
11.3.3	Logaritmi cu bază supraunitară	325
11.3.4	Formule de schimbare a bazei pentru logaritmi	326
11.4	Ecuatii exponențiale, ecuații logaritmice	327
11.4.1	Tipuri de ecuații exponențiale	327
11.4.2	Ecuatii logaritmice	329
11.4.3	Inegalități cu logaritmi	331
12	Progresii, dezvoltări binomiale, medii	333
12.1	Progresii	333
12.1.1	Progresia aritmetică	333
12.1.2	Exerciții	335
12.1.3	Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice	336
12.1.4	Progresii geometrice	340
12.2	Dezvoltări binomiale	352
12.3	Media aritmetică, geometrică și armonică	355
12.3.1	Media aritmetică	355
12.3.2	Media geometrică	358
12.3.3	Media armonică	360
13	Matrici, determinanți, sisteme liniare	367
13.1	Matrici	367
13.1.1	Matricile definite ca tablouri dreptunghiulare	367
13.1.2	Câteva tipuri particulare de matrici	367
13.2	Operații cu matrici	369
13.2.1	Adunarea a două matrici	369
13.2.2	Înmulțirea unei matrici cu un scalar	369
13.2.3	Înmulțirea a două matrici	370
13.3	Transpusa unei matrici	371
13.4	Determinanți	371
13.4.1	Calculul determinanților de ordin 1, 2 și 3	372
13.4.2	Proprietăți ale determinanților	375
13.5	Interpretarea geometrică a determinanților de ordinul al doilea și al treilea	376
13.6	Complementul algebric al unui element	377
13.7	Dezvoltarea unui determinant după o linie sau o coloană	377
13.8	Operații fundamentale cu liniile unei matrici	378
13.8.1	Schimbarea a două linii între ele	379
13.8.2	Înmulțirea unei linii cu un scalar	379
13.8.3	Adunarea la linia j a liniei i înmulțită cu un scalar	380

13.9 Reducerea în treaptă relativ la coloane	381
13.10 Inversa unei matrici	385
13.11 Inversarea matricilor de ordin doi și trei	385
13.11.1 Inversa unei matrici de ordin 2	385
13.11.2 Inversa unei matrici de ordin 3	386
13.12 Alte metode de aflare a inversei unei matrici	387
13.12.1 Inversarea folosind teorema Hamilton Cayley	387
13.12.2 Inversarea prin partiționare pentru o matrice de ordin doi	389
13.12.3 Inversarea prin partiționare pentru o matrice de ordin trei	391
13.13 Inversarea matricilor prin RTC	394
13.14 Linii, coloane liniar independente	396
13.15 Rangul unei matrici oarecare	397
13.16 Sisteme liniare	399
13.16.1 Rezolvarea sistemelor liniare	402
13.16.2 Metode de rezolvare și discuția sistemelor liniare	403
13.16.3 Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda Gauss	408
13.16.4 Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda Gauss- Jordan	410
13.17 Interpretare geometrică a sistemelor liniare	416
13.18 Acțiunea unei matrici de permutare	421
13.19 Exerciții și probleme	422
13.20 Calcul matricial cu MATLAB	424
14 Spații vectoriale	431
14.1 Legi de compoziție interne	432
14.2 Grupuri, inele, corpuri	435
14.2.1 Noțiunea de grup	435
14.2.2 Noțiunea de inel	435
14.2.3 Noțiunea de corp	436
14.3 Spații vectoriale	436
14.3.1 Acțiune, lege de acțiune	436
14.3.2 Noțiunea de spațiu vectorial	438
14.3.3 Sisteme de generatori, sisteme liniar independente	439
14.3.4 Bază și dimensiune a unui spațiu vectorial	441
14.3.5 Matricea schimbării de baze, schimbări de coor- donate	442
14.3.6 Izomorfisme de spații vectoriale	444
14.3.7 Spațiul polinoamelor de grad cel mult unu cu coeficienți reali	449
14.4 Produs scalar, normă, metrică	450

14.4.1	Produsul scalar	450
14.4.2	Normă	452
14.4.3	Metrică	454
14.5	Unghi dintre doi vectori, ortogonalitate	454
14.6	Procedeu de ortonormalizare Gram-Schmidt	457
14.7	Transformări liniare	459
14.7.1	Imaginea unei transformări liniare	461
14.7.2	Nucleul unei aplicații liniare	462
14.7.3	Matricea asociată unei transformări liniare	464
14.7.4	Endomorfisme	466
14.7.5	Izometrii	467
14.8	Transformări ortogonale	468
14.8.1	Matrici ortogonale	468
14.8.2	Transformări ortogonale în $\mathbb{R}^2$	470
14.8.3	Endomorfisme ortogonale în $\mathbb{R}^3$	472
14.9	Elemente de teoria aproximării	473
14.10	Regresia liniară	477
14.11	Rezolvarea sistemelor supradeterminate	482
III	Calcul diferențial și integral	485
15	Elemente de calcul diferențial	487
15.1	Derivabilitate	487
15.1.1	Panta secantei la graficul unei funcții	487
15.1.2	Panta tangentei la graficul funcției într-un punct dat	488
15.1.3	Viteză medie	489
15.1.4	Viteză instantanee într-un punct	490
15.1.5	Rata de variație medie și rata de variație instan- tanee	491
15.2	Derivabilitatea unei funcții într-un punct	492
15.3	Ecuatiile tangentei și normalei într-un punct la graficul unei funcții derivabile	493
15.4	Reguli de derivare	494
15.5	Formule de derivare	500
15.6	Diferențiabilitatea și diferențiala	504
15.7	Teoremele lui Fermat, Rolle, Cauchy, Lagrange	506
15.7.1	Puncte de extrem local	506
15.7.2	Teorema lui Fermat	508
15.7.3	Funcții monotone pe un interval	509
15.7.4	Teorema lui Rolle	510

15.7.5	Teorema lui Cauchy	511
15.7.6	Teorema lui Lagrange	511
15.8	Puncte staționare, puncte de extrem local	512
15.9	Derivate de ordin superior	515
15.10	Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor	517
15.10.1	Interiorul și sensul direct de parcurgere a unei curbe plane	517
15.10.2	Convexitatea și concavitata unei funcții	518
15.10.3	Rolul derivatei a doua în determinarea convexității sau concavității unei funcții	519
15.10.4	Rolul derivatei a doua în studiul punctelor cri- tice ale unei funcții de două ori derivabile	520
16	Calcul integral	523
16.1	Primitiva, integrala nedefinită	523
16.1.1	Notăția cu diferențiale a integralei nedefinite	525
16.1.2	Legătura dintre integrala nedefinită și diferențială	525
16.2	Integrarea	526
16.2.1	Proprietăți ale integralei nedefinite	527
16.2.2	Formule de calcul al integralei nedefinite pentru funcții elementare	530
16.2.3	Aplicații ale formulelor 1, 2	532
16.2.4	Aplicații ale formulelor 3, 4	534
16.2.5	Aplicații ale formulelor 5-12	536
16.2.6	Aplicații ale formulelor 13-15	539
16.3	Calculul primitivelor unor funcții raționale	542
16.3.1	Determinarea constantei C pentru condiții inițiale date	553
16.4	Integrala definită	554
16.4.1	Proprietăți ale integralei definite	556
16.4.2	Calculul integralei definite	558
16.4.3	Formula de integrare prin părți și schimbarea de variabilă pentru integrala definită	559
16.5	Aplicații ale integralei definite	562
16.5.1	Aria unei suprafețe mărginită de dreptele $x =$ a , $x = b$, axa Ox și graficul funcției continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$	564
16.5.2	Aplicații la calculul de arii	566
16.5.3	Volumul unui corp de rotație	568
16.5.4	Calculul ariei suprafețelor de rotație	569
16.5.5	Determinarea cu calcul integral a lucrului mecanic	570
16.5.6	Lungimea unui arc de curbă	571

16.5.7	Determinarea centrului de greutate al unui fir .	575
16.6	Metode de integrare numerică	577
16.6.1	Metoda trapezelor	577
16.6.2	Metoda Simpson	578
16.7	Aplicații ale calculului integral în MATLAB	579
IV	Statistică și probabilități	589
17	Elemente de statistică	591
17.1	Noțiuni fundamentale utilizate în statistică	591
17.2	Date statistice, prelucrarea lor primară	593
17.3	Frecvențe și serii statistice	594
17.3.1	Frecvențe cumulate	594
17.3.2	Reprezentarea grafică a datelor statistice	596
17.3.3	Tipuri de diagrame structurate	596
17.3.4	Evaluări pe subclase folosind histograme	599
17.4	Medie, mediană, modul	601
17.4.1	Medie	602
17.4.2	Mediană	602
17.4.3	Modulul	604
17.5	Dispersia, abaterea medie pătratică	604
18	Elemente de teoria probabilităților	605
18.1	Noțiuni fundamentale în teoria probabilităților	605
18.2	Evenimente incompatibile	608
18.3	Noțiunea de probabilitate a unui eveniment	610
18.3.1	Definiția probabilității cu ajutorul numărului de cazuri favorabile	610
18.3.2	Definiția probabilității ca funcție	612
18.3.3	Proprietăți ale funcției probabilitate	612

I

Geometrie

Capitolul 1

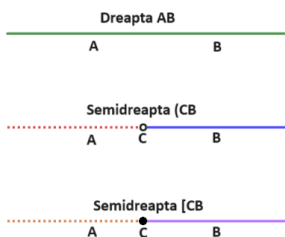
Geometrie sintetică

1.1 Unghiuri

Noțiunile de punct și dreaptă sunt elemente de bază ale geometriei euclidiene.

- O dreaptă conține o infinitate de puncte.
- Punctele situate pe aceeași dreaptă se numesc coliniare.
- Două puncte distincte A și B determină în mod unic o dreaptă. Dreapta determinată de aceste puncte o vom nota AB sau $(d)(AB)$.
- Între oricare două puncte distincte situate pe o dreaptă există un alt punct situat pe acea dreaptă.

Noțiunea de semidreaptă



Considerăm o dreaptă determinată de punctele distincte A , B și fie C un punct situat între A și B . Numim semidreapta determinată de C și B mulțimea punctelor de pe dreaptă care sunt situate de aceeași

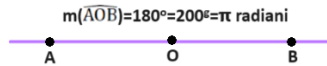
parte a lui C cu B . Dacă punctul C aparține semidreptei spunem că semidreapta este închisă și o notăm $[CB$. Dacă punctul C nu aparține semidreptei, spunem că este deschisă și o notăm cu $(CB$. Punctul C se numește **originea** semidreptei.

Noțiunea de unghi

Definiția 1.1. Numim unghi figura geometrică determinată de două semidrepte închise care au originea comună.

Dacă cele două semidrepte sunt $[OA$ și $[OB$ unghiul îl vom nota cu $\angle AOB$ sau $\widehat{AOB}$.

- Semidreptele $[OA$ și $[OB$ se numesc laturile unghiului, iar O se numește vârful unghiului. În notația unui unghi litera care desemnează vârful este întotdeauna la mijloc.
- Dacă $[OA$ și $[OB$ formează dreapta AB spunem că unghiul $\widehat{AOB}$ este unghi cu laturile în prelungire.
- Unghiurile se măsoară în grade sexagesimale, grade centezimale sau în radiani. Gradele sexagesimale se numesc simplu grad și au simbolul $^\circ$. Un unghi cu laturile în prelungire are 180° . Gradele centezimale se notează cu ^{g} . Un unghi cu laturile în prelungire are 200^g . Măsurarea unghiurilor în grade centezimale se folosește în general în topografie. În Analiza Matematică măsurarea unghiurilor se face în radiani. Măsura unui unghi cu laturile în prelungire este de π radiani. Acest lucru înseamnă că unghiul de un grad are măsura egală cu $\frac{\pi}{180}$ radiani.

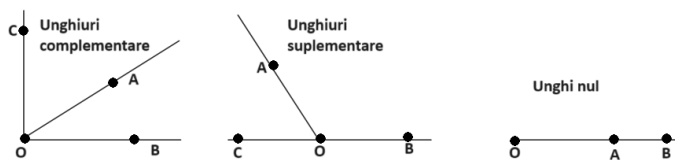
$$m(\widehat{AOB}) = 180^\circ = 200^g = \pi \text{ radiani}$$


- Numim unghi drept un unghi a cărui măsură este de 90° . În acest caz spunem că laturile unghiului sunt perpendiculare.

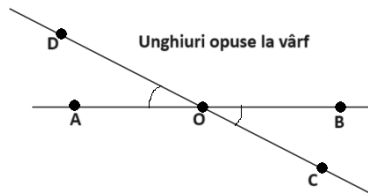
Teorema 1.1. Într-un punct al unei drepte putem ridica o singură perpendiculară pe dreaptă. Dintr-un punct exterior unei drepte putem să coborâm o singură perpendiculară pe dreaptă.

- Numim unghi ascuțit un unghi mai mic strict decât un unghi drept.

- Numim unghi obtuz un unghi strict mai mare decât un unghi drept.
- Unghiurile $\widehat{BOA}$ și $\widehat{COA}$ sunt adiacente dacă semidreptele închise $[OB$ și $[OC$ sunt situate de o parte și de cealaltă a semidreptei închise $[OA$.
- Dacă suma mărimilor a două unghiuri adiacente este de 90° cele două unghiuri se numesc complementare. În general, orice două unghiuri a căror sumă a măsurilor este de 90° sunt complementare.
- Dacă suma măsurilor a două unghiuri adiacente este de 180° unghiurile se numesc suplementare. În general, dacă suma măsurilor a două unghiuri este de 180° unghiurile se numesc suplementare.
- Dacă semidreptele închise $[OA$ și $[OB$ coincid atunci măsura unghiului $\widehat{AOB}$ este de 0° iar unghiul se numește unghi nul.



- Considerăm două drepte AB și CD concurente în O . Unghiurile $\widehat{AOD}$ și $\widehat{COB}$ se numesc opuse la vârf și sunt congruente.



1.2 Unghiuri formate de o secantă și două drepte paralele

În plan, două drepte care nu se intersectează se numesc drepte paralele. Considerăm două drepte paralele, (d_1) și (d_2) tăiate de secanta AB . Se formează astfel 8 unghiuri.

Unghiuri alterne interne. Unghiurile formate între cele două paralele de o parte și de cealaltă a secantei se numesc unghiuri alterne interne și sunt congruente două câte două. Mai mult, dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri alterne interne congruente atunci cele două drepte sunt paralele. Unghiurile alterne interne,

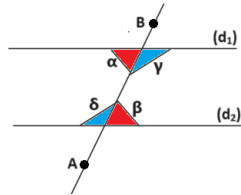


Fig. 1.1: Unghiuri alterne interne

fig. 1.1, sunt $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}$. La fel și unghiurile $\hat{\gamma}$ și $\hat{\delta}$. Între ele avem relațiile:

$$\hat{\alpha} \equiv \hat{\beta}; \quad \hat{\gamma} \equiv \hat{\delta}; \quad \hat{\alpha} + \hat{\delta} = \hat{\gamma} + \hat{\beta} = 180^\circ;$$

Unghiuri alterne externe. Unghiurile formate în exteriorul celor două paralele, de o parte și de cealaltă parte a secantei se numesc alterne externe

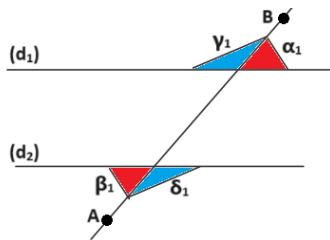


Fig. 1.2: Unghiuri alterne externe

și sunt congruente două câte două. Dacă două drepte tăiate de o secantă formează unghiuri alterne externe congruente atunci cele două

drepte sunt paralele. Unghiurile alterne externe, fig 1.2, sunt $\hat{\alpha}_1$ și $\hat{\beta}_1$. La fel și unghiurile $\hat{\gamma}_1$ și $\hat{\delta}_1$. Între ele avem relațiile:

$$\hat{\alpha}_1 \equiv \hat{\beta}_1; \quad \hat{\gamma}_1 \equiv \hat{\delta}_1; \quad \hat{\alpha}_1 + \hat{\delta}_1 = \hat{\gamma}_1 + \hat{\beta}_1 = 180^\circ;$$

Unghiuri corespondente Unghiurile formate de aceeași parte a secantei și care sunt de același tip (simultan ascuțite sau simultan obtuze) se numesc unghiuri corespondente. Unghiurile corespondente, fig. 1.3, sunt $\hat{\alpha}_1$ și $\hat{\beta}$, $\hat{\alpha}$ și $\hat{\beta}_1$, $\hat{\gamma}$ și $\hat{\delta}_1$, $\hat{\gamma}_1$ și $\hat{\delta}$.

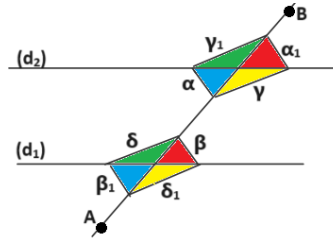


Fig. 1.3: Unghiuri corespondente

Între ele avem relațiile:

$$\hat{\alpha}_1 \equiv \hat{\beta}; \quad \hat{\gamma}_1 \equiv \hat{\delta}; \quad \hat{\alpha} \equiv \hat{\beta}_1; \quad \hat{\gamma} \equiv \hat{\delta}_1$$

1.3 Triunghiuri

Cel mai simplu poligon este cel format cu trei laturi și se numește triunghi. Laturile unui triunghi trebuie să respecte inegalitatea:

Suma lungimilor a două laturi trebuie să fie mai mare strict decât lungimea celei de a treia laturi.

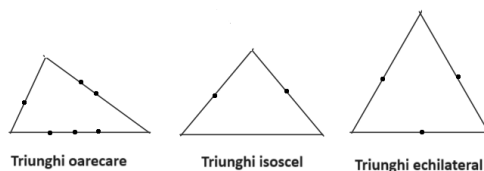
Într-un triunghi, relativ la unghiuri, avem că:

Suma unghiurilor unui triunghi este 180° .

În funcție de lungimile laturilor un triunghi poate fi:

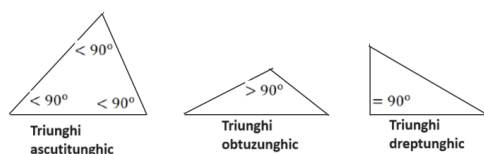
- *Oarecare sau scalen.* Un astfel de triunghi are laturile de lungimi diferite.

- *Isoscel*. Triunghiul are două laturi egale. Într-un astfel de triunghi unghiurile formate de laturile egale cu cea de a treia latură sunt congruente.
- *Echilateral*. Triunghiul are toate laturile egale și toate unghiurile egale.

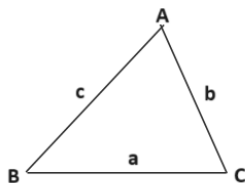


În funcție de unghiurile sale triunghiul poate fi:

- *Ascuțitunghic*, toate unghiurile sale sunt ascuțite.
- *Obtuzunghic*, are un unghi mai mare strict decât 90° .
- *Dreptunghic*, are un unghi de 90° .



Convenția de notație pentru un triunghi este:



Laturile unui triunghi se notează cu litere mici iar unghiurile opuse fiecărei laturi cu aceeași literă dar majusculă. Laturile se mai pot nota și ca segmente având capetele în vârfuri, de exemplu latura a poate fi notată și BC .

1.4 Suma unghiurilor unui poligon convex

Considerăm un poligon convex cu n laturi, cu vârfurile notate $A_1, A_2, \dots, A_n$ și O un punct în interiorul poligonului. Putem descompune poligonul în n triunghiuri care au toate un vârf în O . Cele n triunghiuri $A_1OA_2, A_2OA_3, \dots, A_{n-1}OA_n, A_nOA_1$ au fiecare suma unghiurilor 180° (sau π radiani). Suma unghiurilor poligonului este suma unghiurilor celor n triunghiuri minus suma unghiurilor în jurul punctului O care este 360° (2π în radiani). Astfel deducem că

Suma unghiurilor unui poligon convex cu n laturi este

$$\pi(n - 2).$$

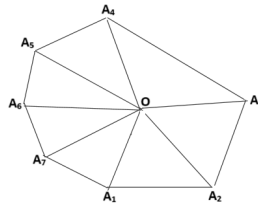


Fig. 1.4: Suma unghiurilor unui poligon convex cu 7 laturi este 5π .

1.5 Linii importante în triunghi

1. **Înălțimile.** Perpendiculara coborâtă dintr-un vârf al unui triunghi pe latura opusă se numește înălțime. Înălțimile unui triunghi sunt concurente iar punctul de concurență se numește ortocentru. Notăția pentru ortocentru este, în general, H .
2. **Mediane.** Segmentul care unește un vârf al unui triunghi cu mijlocul laturii opuse se numește mediană. Medianele unui triunghi sunt concurente. Punctul lor de concurență este centrul de greutate al triunghiului și, în general, se notează cu G .

Câteva proprietăți legate de mediane și centrul de greutate al triunghiului

- Centrul de greutate G se găsește pe mediane la o treime de bază și două treimi de vârf. Dacă AM este mediană atunci $AG = 2GM$.
- Punctul din plan pentru care suma pătratelor distanțelor de la el la vârfurile triunghiului ABC este minimă este G , centrul de greutate al triunghiului.
- Mediana împarte triunghiul dat în două triunghiuri de arii egale.
- **Teorema medianei** Fie triunghiul ABC cu laturile a, b, c și m_a, m_b, m_c medianele corespunzătoare laturilor a, b, c . Atunci:

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} \quad m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4}$$

$$m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

3. **Bisectoarele.** Dreapta care împarte un unghi în două unghiuri congruente se numește bisectoarea unghiului. Bisectoarele unui triunghi sunt concurente. Notăția pentru acest punct este, în general, I .

Câteva proprietăți legate de bisectoare

- Bisectoarea unui unghi poate fi definită și ca locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de laturile unghiului.
- Punctul în care se întâlnesc bisectoarele unghiurilor unui triunghi este centrul cercului înscris în triunghi.
- Considerăm în figura 1.5 unghiurile adiacente suplementare $\widehat{BAC}$ și $\widehat{CAD}$. Fie AP bisectoarea unghiului $\widehat{BAC}$ și AQ

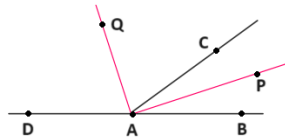


Fig. 1.5: Bisectoarea interioară și cea exterioară a unui unghi.

bisectoarea unghiului $\widehat{CAD}$. Atunci $AP \perp AQ$.

Pentru unghiul $\widehat{BAC}$ semidreapta AP se numește bisectoare interioară iar semidreapta AQ se numește bisectoare exterioară.

- Considerăm triunghiul ABC , bisectoarea interioară a unghiului A și bisectoarele exterioare ale unghiurilor B și C .

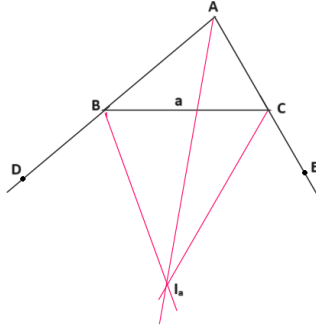


Fig. 1.6: Centrul unui cerc exînscriș triunghiului ABC

Cele trei bisectoare sunt concurente în punctul I_a care este centrul cercului tangent la latura BC și la prelungirile BD și CE ale laturilor AB și AC . Acest cerc se numește cerc exînscriș triunghiului ABC corespunzător laturii a .

4. **Mediatoarele.** Fie segmentul $[AB]$ și punctul M mijlocul său. Perpendiculara ridicată în M pe $[AB]$ se numește mediatoarea segmentului dat.

Fie triunghiul ABC . Mediatoarele laturilor triunghiului sunt concurente. Punctul lor de concurență se notează, uzual, cu O .

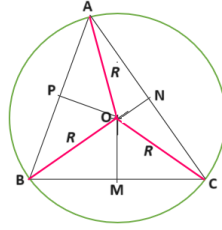


Fig. 1.7: Centrul cercului circumscris triunghiului ABC

Câteva proprietăți legate de mediatoare

- Mediatoarea unui segment $[AB]$ este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de capetele A și B ale segmentului.
- Punctul O este centrul cercului circumscris triunghiului ABC . În figura 1.7 avem MO , NO , PO mediatoarele laturilor BC , CA , AB și OA , OB , OC raze ale cercului circumscris.

1.6 Congruența triunghiurilor

Două triunghiuri sunt congruente dacă printr-o transformare care nu modifică unghiurile și lungimile pot fi suprapuse unul peste altul și coincid.

Propoziția 1.1. *În oricare două triunghiuri congruente la unghiuri congruente se opun laturi congruente și la laturi congruente se opun unghiuri congruente.*

Pentru a demonstra că două triunghiuri sunt congruente este suficient să demonstrăm că ele se încadrează în unul dintre cele trei cazuri:

LUL - latură - unghi - latură

Două triunghiuri care au două laturi și unghiul dintre ele congruente sunt congruente.

ULU - unghi - latură - unghi

Două triunghiuri care au două unghiuri congruente și latura comună lor congruentă sunt congruente.

LLL - latură - latură - latură

Două triunghiuri care au laturile congruente două câte două sunt congruente.

Aplicație

Considerăm segmentele AC și BD care se intersectează în punctul O .

1. Dacă cele două segmente, AC și BD se înjumătățesc (adică $AO = OC$ și $BO = OD$) atunci segmentele AD și BC sunt paralele și congruente.
2. Dacă segmentele AD și BC sunt paralele și congruente atunci și segmentele AB și CD sunt paralele și congruente.
3. Două drepte paralele care intersectează alte două drepte paralele determină două perechi de segmente congruente.

Demonstrație:

1. Triunghiurile AOD și BOC sunt congruente pentru că

$$AO \equiv OC, \quad BO \equiv OD, \quad \text{din ipoteză}$$

$$\widehat{AOD} \equiv \widehat{BOC}, \text{ unghiuri opuse la vârf.}$$

deci cele două triunghiuri sunt congruente (caz LUL). Unghiurile

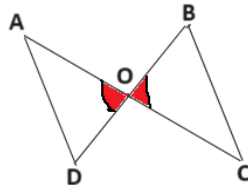
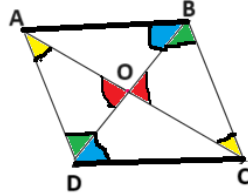


Fig. 1.8: Congruență LUL

$\widehat{OAD}$ și $\widehat{OCB}$ sunt congruente pentru că se opun în două triunghiuri congruente la laturi congruente. Rezultă că dreptele AD și BC tăiate de secanta AC formează unghiuri alterne interne congruente deci $AD \parallel BC$. Segmentele AD și BC se opun în triunghiuri congruente la unghiuri congruente, deci sunt la rândul lor congruente. Rezultă că ele sunt paralele și congruente.

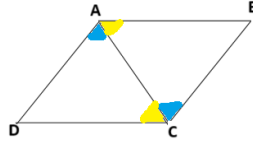
2. Plecăm de la ipoteza că $AD \parallel BC$ și $AD \equiv BC$. Din paralelismul celor două segmente rezultă că $\widehat{DAC} \equiv \widehat{ACB}$ ca unghiuri alterne

interne și similar $\widehat{ADB} \equiv \widehat{DBC}$. Triunghiurile AOD și BOC sunt astfel congruente (caz ULU). Din congruența triunghiurilor avem că $AO \equiv OC$ și $DO \equiv OB$. Cum $\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD}$ ca opuse la vârf rezultă că triunghiurile AOB și COD sunt congruente deci și $AB \equiv CD$.



Dar unghiurile $\widehat{ABO} \equiv \widehat{CDO}$ ca unghiuri care se opun în triunghiuri congruente la laturi congruente. Deci dreptele AB și DC tăiate de secanta BD formează unghiuri alterne interne congruente de unde rezultă că sunt drepte paralele.

3. Considerăm secanta AC . Aceasta formează cu paralelele AB și CD unghiurile alterne interne $\widehat{BAC} \equiv \widehat{DAC}$. La fel, secanta AC formează



cu dreptele paralele AD și BC unghiurile congruente $\widehat{CAD} \equiv \widehat{ACB}$. Rezultă că triunghiurile ADC și CBA sunt congruente (AC latură comună, caz ULU). De aici avem că $AB \equiv CD$ și $AD \equiv BC$.

1.7 Triunghiul dreptunghic

Un triunghi care are un unghi drept poartă numele de triunghi dreptunghic. Laturile care formează unghiul drept se numesc catete iar cea de a treia latură se numește ipotenuză.

1.7.1 Teorema lui Pitagora

Teorema 1.2. (Pitagora) Într-un triunghi dreptunghic suma ariilor pătratelor construite pe catete este egală cu aria pătratului construit pe ipotenuză.

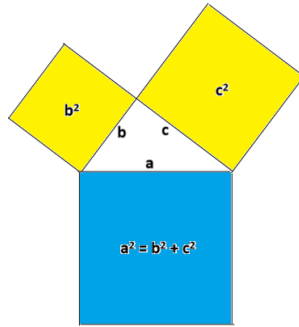


Fig. 1.9: Teorema lui Pitagora

Dacă notăm cu a ipotenuza și cu b, c catetele, teorema se poate enunța și sub forma

"Suma pătratelor catetelor este egală cu pătratul ipotenuzei"

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Aplicație: Fie ABC un triunghi isoscel cu $AB = AC$ și BD înălțimea dusă din B pe AC . Să se arate că

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = CD^2 + 2DA^2 + 3BD^2.$$

Rezolvare: Scriem teorema lui Pitagora în triunghiurile dreptunghice BDC și BDA . Avem:

$$AB \equiv AC,$$

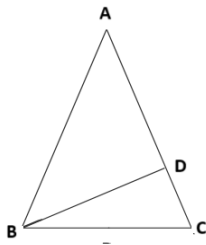
$$BC^2 = CD^2 + BD^2,$$

$$AB^2 = BD^2 + AD^2,$$

$$AC^2 = AB^2 = BD^2 + AD^2.$$

Adunăm cele trei relații și obținem:

$$AB^2 + BC^2 + AC^2 = CD^2 + 2AD^2 + 3BD^2. \quad q.e.d.$$



1.7.2 Congruența triunghiurilor dreptunghice

Două triunghiuri dreptunghice sunt congruente dacă laturile și unghiurile lor satisfac unul dintre cele patru cazuri:

1. **CC** - cele două triunghiuri au catetele congruente două câte două.

Din teorema lui Pitagora rezultă că ele au și ipotenuzele congruente deci acest caz este de forma **LLL**.

2. **IC** - cele două triunghiuri au congruente ipotenuza și o catetă.

Din teorema lui Pitagora rezultă că ele au congruente și cealaltă catetă și în concluzie și acesta este un caz de tip **LLL**.

3. **IU** - cele două triunghiuri au congruente ipotenuzele și un unghi ascuțit.

Suma unghiurilor unui triunghi este de 180° și cunoscând două unghiuri îl determinăm în mod unic pe al treilea, deci avem cazul de congruență **ULU**.

4. **CU** - cele două triunghiuri au congruente o catetă și un unghi ascuțit.

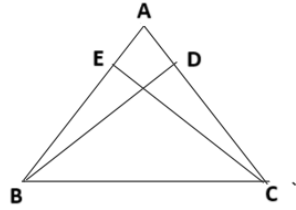
Aceeași motivare ca la cazul 3. Acest caz se încadrează tot la **ULU**.

Aplicație: Fie triunghiul ABC în care $AB \equiv AC$. Arătați că:

1. Înălțimile triunghiului duse din B și C sunt congruente.
2. Dacă M este un punct interior segmentului BC atunci suma distanțelor de la M la laturile AB și AC este constantă și egală cu lungimea înălțimii duse din C pe AB .

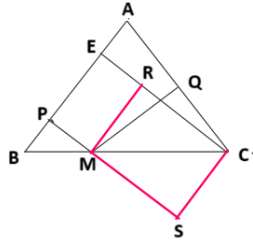
Demonstrație:

1. Fie BD și CE înălțimile din B și C . Să arătăm că triunghiurile



BDC și CEB sunt congruente. Dacă în triunghiul ABC avem că $AB \equiv AC$ rezultă că triunghiul este isoscel deci vom avea și unghiurile opuse laturilor egale congruente, $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$. Triunghiurile BDC și CEB sunt dreptunghice, au ipotenuza comună și unghiurile $\widehat{DCB} \equiv \widehat{ECB}$, deci sunt congruente (caz **IU**). Rezultă că $BD \equiv CE$ pentru că în două triunghiuri congruente ele se opun la unghiuri congruente.

2. În triunghiul ABC considerăm CE înălțimea din C , M un punct interior al segmentului BC , $MP \perp AB$, $MQ \perp AC$.



Trebuie să arătăm că

$$MP + MQ = CE.$$

Pentru aceasta ducem $MR \perp CE$ și $CS \perp PM$. Știm că două drepte perpendiculare pe o a treia sunt paralele, astfel $PM \parallel CE$ și $MR \parallel CS$. La fel avem și că $MR \parallel PE$. Am arătat în aplicația anterioară că două drepte paralele intersectează alte două drepte paralele după segmente congruente, deci

$$MR \equiv CS, \quad MS \equiv RC, \quad PM \equiv ER, \quad PE \equiv MR.$$

Rezultă că triunghiurile MRC și MSC sunt congruente și

$$PM + MS = ER + RC = EC.$$

Arătăm în continuare că triunghiurile dreptunghice MQC și MSC sunt congruente. Unghiurile $\widehat{SMC}$ și $\widehat{PMB}$ sunt congruente ca opuse la vârf și au măsura $90^\circ - \text{măs}(\widehat{PBM})$. Triunghiul ABC este isoscel și are $\widehat{ABC} \equiv \widehat{ACB}$. Triunghiul MQC este dreptunghic, deci

$$\text{măs}(\widehat{QMC}) = 90^\circ - \text{măs}(\widehat{QCM}) = 90^\circ - \text{măs}(\widehat{ACB}) = \text{măs}(\widehat{CMS})$$

De aici rezultă că triunghiurile dreptunghice CMS și CMQ sunt congruente (IU) și $MS \equiv MQ$. Am demonstrat că

$$PM + MQ = PM + MS = ER + RC = EC.$$

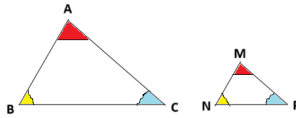
1.8 Asemănarea triunghiurilor

Două triunghiuri sunt asemenea dacă au laturile respectiv proporționale și unghiurile opuse lor congruente. Fiind date triunghiurile ABC și MNP ele sunt asemenea dacă

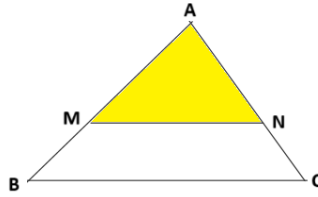
$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}$$

și

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{MNP}, \quad \widehat{BCA} \equiv \widehat{NPM}, \quad \widehat{CAB} \equiv \widehat{PMN}.$$



Teorema 1.3. (Teorema fundamentală a asemănării) *O paralelă dusă la o latură a unui triunghi determină pe celelalte două laturi un triunghi asemenea cu cel dat.*



1.9 Cazuri de asemănare a triunghiurilor

1. **UUU** - Triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea dacă

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{MNP}, \quad \widehat{BCA} \equiv \widehat{NPM}, \quad \widehat{CAB} \equiv \widehat{PMN}.$$

2. **LLL** - Triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea dacă au laturile proporționale, adică

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{AC}{MP}.$$

3. **LUL** - Triunghiurile ABC și MNP sunt asemenea dacă au două laturi respectiv proporționale și unghiurile dintre ele congruente.

$$\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP}, \quad \widehat{ABC} \equiv \widehat{MNP}.$$

Aplicație:

Fie triunghiul ABC dreptunghic în A și P un punct pe ipotenuza BC . Perpendiculara în P pe BC taie catetele AB și AC în M și N . Să se arate că

$$PM \cdot PN = BP \cdot PC.$$

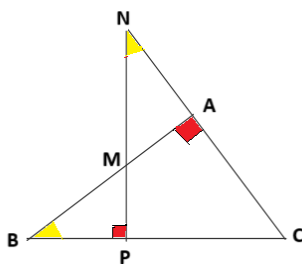
Rezolvare:

Unghiurile $\widehat{BMP} \equiv \widehat{NMA}$ ca opuse la vârf, deci unghiurile $\widehat{MBP}$ și $\widehat{MNA}$ sunt congruente ca având același complement. La fel $\widehat{NMA} \equiv \widehat{NCP}$ pentru că au același complement. De aici rezultă că triunghiurile BPM și NCP sunt asemenea (caz UUU) și avem

$$\frac{BP}{PN} = \frac{MP}{PC}.$$

Înmulțind în ultima relație mezii și extremii și obținem

$$BP \cdot PC = PM \cdot PN, \quad q.e.d.$$



Teorema 1.4. *Fie triunghiurile ABC și DEF asemenea având raportul laturilor proporționale egal cu k . Atunci rapoartele înălțimilor corespondente, al medianelor corespondente și al bisectoarelor corespondente este tot k .*

Notăm laturile triunghiurilor ABC , DEF cu a, b, c respectiv d, e, f și unghiurile cu $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ respectiv $\hat{D}$, $\hat{E}$, $\hat{F}$. Pentru mediane, înălțimi și bisectoare vom folosi notațiile

$$m_a, m_b, m_c; \quad h_a, h_b, h_c; \quad b_A, b_B, b_C$$

respectiv

$$m_d, m_e, m_f; \quad h_d, h_e, h_f; \quad b_D, b_E, b_F.$$

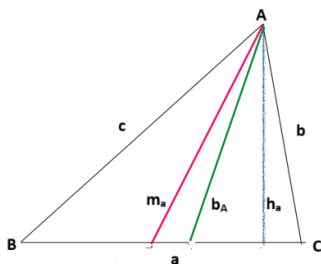


Fig. 1.10: Mediana, bisectoarea și înălțimea corespunzătoare vârfului A

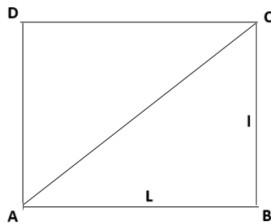
Teorema anterioară ne spune că dacă

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$$

atunci avem și

$$\frac{m_a}{m_d} = \frac{m_b}{m_e} = \frac{m_c}{m_f} = k, \quad \frac{h_a}{h_d} = \frac{h_b}{h_e} = \frac{h_c}{h_f} = k, \quad \frac{b_A}{b_D} = \frac{b_B}{b_E} = \frac{b_C}{b_F} = k$$

1.10 Formule pentru calculul ariei unui triunghi



Considerăm un dreptunghi $ABCD$ cu lungimea $L = AB$ și lățimea $l = BC$. Aria sa este dată de produsul $L \cdot l$.

$$\mathcal{A}_{ABCD} = L \cdot l = AB \cdot BC.$$

Dacă ducem diagonala AC obținem triunghiul ABC dreptunghic în B și triunghiul CDA dreptunghic în D . Cele două triunghiuri sunt congruente deci au aceeași arie și anume jumătate din aria dreptunghiului $ABCD$.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2} \mathcal{A}_{ABCD} = \frac{L \cdot l}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2}.$$

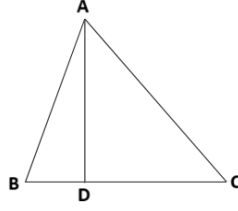
Dar AB și BC sunt catetele triunghiului ABC , deci am obținut că aria unui triunghi dreptunghic este dată de jumătate din produsul catetelor.

Fie triunghiul oarecare ABC cu baza BC . Ducem AD înălțimea din A . Se formează astfel două triunghiuri dreptunghice ADB și ADC . Avem

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{ABC} &= \mathcal{A}_{ADB} + \mathcal{A}_{ADC} = \frac{BD \cdot AD}{2} + \frac{AD \cdot DC}{2} = \frac{AD \cdot (BD + DC)}{2} = \\ &= \frac{BC \cdot AD}{2}. \end{aligned}$$

Dacă notăm laturile cu a, b, c și înălțimile corespunzătoare cu h_a, h_b, h_c , atunci formula de arie o putem scrie:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}. \quad (1.1)$$



Astfel formula de arie pentru un triunghi este ”baza ori înălțimea supra doi.”

Alte formule pentru calculul ariei unui triunghi

Fie triunghiul ABC cu laturile a, b, c și unghiurile $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$. Cercul determinat de vârfurile A, B, C îl numim cerc circumscris triunghiului, raza acestui cerc o notăm cu R . Cercul care este tangent la toate cele trei laturi ale triunghiului îl numim cerc înscris în triunghi, iar raza sa o notăm cu r . Perimetrul triunghiului este dat de suma laturilor $a + b + c$ iar semiperimetrul triunghiului îl notăm cu p .

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

Formulele pe care le menționăm sunt:

1. Formulă de arie folosind două laturi și unghiul dintre ele

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot \sin(\hat{C})}{2} = \frac{b \cdot c \cdot \sin(\hat{A})}{2} = \frac{c \cdot a \cdot \sin(\hat{B})}{2}. \quad (1.2)$$

2. Formulă de arie folosind o latură și unghiurile alăturate

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a^2 \sin(\hat{B}) \sin(\hat{C})}{2 \sin(\hat{B} + \hat{C})} = \frac{b^2 \sin(\hat{A}) \sin(\hat{C})}{2 \sin(\hat{A} + \hat{C})} = \frac{c^2 \sin(\hat{A}) \sin(\hat{B})}{2 \sin(\hat{A} + \hat{B})}. \quad (1.3)$$

3. Formulă de arie folosind cele trei laturi (formula lui Heron)

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. \quad (1.4)$$

4. Formula de arie folosind cele trei laturi și raza cercului circumscris

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}. \quad (1.5)$$

5. Formula de arie folosind laturile și raza cercului înscris în triunghi

$$\mathcal{A}_{ABC} = p \cdot r. \quad (1.6)$$

Observația 1.1. Formula 1.3 este echivalentă cu

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a^2 \sin(\widehat{B}) \sin(\widehat{C})}{2 \sin(\widehat{A})} = \frac{b^2 \sin(\widehat{A}) \sin(\widehat{C})}{2 \sin(\widehat{B})} = \frac{c^2 \sin(\widehat{A}) \sin(\widehat{B})}{2 \sin(\widehat{C})} \quad (1.7)$$

care rezultă din faptul că $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$.

Aplicații:

1. Să se determine aria și razele cercurilor înscris și circumscris triunghiului de laturi $a = 13m$, $b = 14m$, $c = 15m$.
2. Să se determine aria unui triunghi ascuțitunghic în care $a = 5m$ și $\sin(B) = 0,6$, $\cos(C) = 0,8$.
3. Să se afle aria patrulaterului convex $ABCD$ și sinusul unghiului C dacă $AB = 7m$, $BC = 6m$, $CD = 3m$, $DA = 4m$ și $m(\widehat{D}) = 90^\circ$.

Rezolvare:

1. Pentru că știm cele trei laturi, $a = 13m$, $b = 14m$, $c = 15m$ putem aplica formula lui Heron 1.4. Pentru aceasta calculăm

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21, \quad p - a = 8, \quad p - b = 7, \quad p - c = 6;$$

Aria va fi:

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 3 \cdot 7 \cdot 4 = 84m^2.$$

Cunoscând aria și laturile vom folosi formula 1.5 pentru a determina raza cercului circumscris.

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R} \Rightarrow R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4\mathcal{A}} = \frac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8,125m$$

Cunoaștem semiperimetrul și aria deci din formula 1.6 putem determina raza cercului înscris în triunghi.

$$\mathcal{A}_{ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{\mathcal{A}_{ABC}}{p} = \frac{84}{21} = 4m.$$

2. Formula 1.3 ne dă

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a^2 \sin(\widehat{B}) \sin(\widehat{C})}{2 \sin(\widehat{B} + \widehat{C})}$$

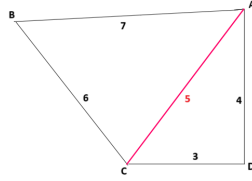
Trebuie să calculăm întâi $\cos \widehat{B} = \sqrt{1 - \sin^2(\widehat{B})}$,
 $\sin(\widehat{C}) = \sqrt{1 - \cos^2(\widehat{C})}$ și $\sin(\widehat{B} + \widehat{C})$.

$$\cos(\widehat{B}) = 0,8; \quad \sin(\widehat{C}) = 0,6$$

$$\sin(\widehat{B} + \widehat{C}) = \sin \widehat{B} \cos \widehat{C} + \sin \widehat{C} \cos \widehat{B} = 0,6 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{25 \cdot 0,6 \cdot 0,6}{2(0,6 \cdot 0,8 + 0,8 \cdot 0,6)} = 4,6875m^2.$$

3. Ducem diagonala AC, iar lungimea ei o determinăm știind că triunghiul ADC este dreptunghic în D . Rezultă că $AC = 5$.



Aria patrulaterului va fi dată de suma ariilor triunghiului ACD și ABC .

$$\mathcal{A}_{ACD} = \frac{CD \cdot DA}{2} = \frac{12}{2} = 6m^2$$

Pentru ca să calculăm aria triunghiului ABC aplicăm formula lui Heron 1.4

$$p = \frac{5 + 6 + 7}{2} = 9, \quad p - a = 4, \quad p - b = 3, \quad p - c = 2.$$

$$\mathcal{A}_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 6\sqrt{6}m^2$$

Având aria triunghiului și laturile putem din formula 1.2 să aflăm sinusul unghiului B .

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\widehat{B})}{2} \Rightarrow \sin(\widehat{B}) = \frac{2\mathcal{A}_{ABC}}{a \cdot c} = \frac{2 \cdot 6\sqrt{6}}{7 \cdot 6} = \frac{2\sqrt{6}}{7}.$$

1.11 Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea

Fie triunghiurile ABC , DEF de laturi a, b, c și d, e, f , asemenea. Presupunem că raportul de asemănare este k .

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k.$$

Știm că și raportul înălțimilor corespunzătoare este tot k . Atunci, cu notațiile obișnuite avem

$$\frac{h_a}{h_d} = \frac{h_b}{h_e} = \frac{h_c}{h_f} = k.$$

Scriind pentru fiecare triunghi aria cu formula 1.1 obținem:

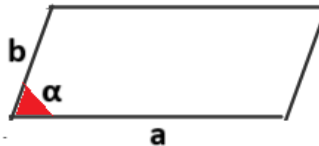
$$\frac{\mathcal{A}_{ABC}}{\mathcal{A}_{DEF}} = \frac{\frac{a \cdot h_a}{2}}{\frac{d \cdot h_d}{2}} = \frac{a}{d} \cdot \frac{h_a}{h_d} = k \cdot k = k^2.$$

Putem astfel enunța următoarea propoziție

Propoziția 1.2. *Două figuri asemenea al căror raport de asemănare este k au raportul ariilor egal cu k^2 .*

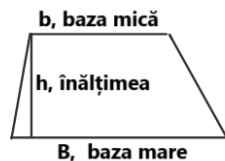
1.12 Formule pentru calculul ariilor unor figuri plane particulare

1. Aria paralelogramului de laturi a , b și unghiul dintre ele α .



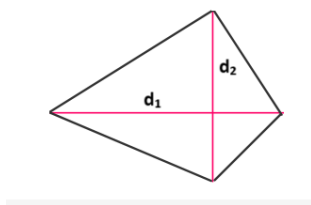
$$\mathcal{A}_{para} = a \cdot b \cdot \sin(\alpha)$$

2. Aria trapezului de baze B , b și înălțime h



$$\mathcal{A}_{trap} = \frac{(B + b)h}{2}$$

3. Aria unui patrulater cu diagonalele perpendiculare



$$\mathcal{A}_{diaperp} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

4. Aria rombului. De menționat că pentru calculul ariei unui romb ne folosim de faptul că acesta este un paralelogram cu toate laturile egale sau un patrulater cu diagonale perpendiculare și care se înjumătățesc. În consecință aria unui romb cu latura l și un unghi α sau cu diagonalele d_1 , d_2 este

$$\mathcal{A}_{romb} = l^2 \sin(\alpha) \quad \text{sau} \quad \mathcal{A}_{romb} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}.$$

5. Aria cercului de rază r și aria elipsei de semiaxe a , b

$$\mathcal{A}_{cerc} = \pi r^2, \quad \mathcal{A}_{elipsei} = \pi ab$$

1.13 Formule de arii și volume pentru unele corpuri

1.13.1 Cub

Cubul este un solid cu 6 fețe, toate părate de latură l . Pătratul $ABCD$ se numește bază. Fețele care au o latură comună cu baza se

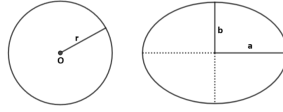


Fig. 1.11: Cerc de centru O și rază r, elipsă de semiaxe a și b.

numesc fețe laterale. Suma ariilor fețelor laterale poartă numele de arie laterală pe care o notăm cu $\mathcal{A}_L$. Aria totală o vom nota $\mathcal{A}_{tot}$ iar volumul îl vom nota cu $\mathcal{V}_{cub}$.

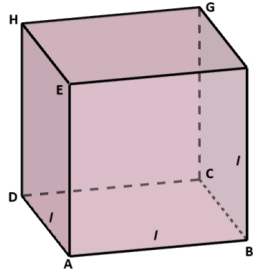


Fig. 1.12: Cub de latură l

$$\mathcal{A}_L = 4l^2; \quad \mathcal{A}_{tot} = 6l^2; \quad \mathcal{V}_{cub} = l^3.$$

1.13.2 Paralelipiped dreptunghic

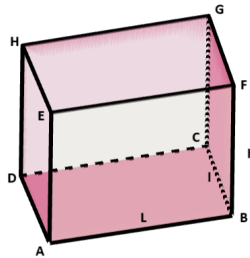


Fig. 1.13: Paralelipiped dreptunghic

Paralelipipedul dreptunghic este un solid cu toate fețele dreptunghiuri. Cu notațiile din figura 1.13, baza $ABCD$ este un dreptunghi cu laturile de lungime $AB = L$, $BC = l$. Muchia laterală este înălțimea paralelipipedului și lungimea ei o notăm cu h . Suprafața laterală este formată din două dreptunghiuri de laturi L și h și două dreptunghiuri de laturi l și h . Avem:

$$\mathcal{A}_b = Ll, \quad \mathcal{A}_L = 2Lh + 2lh, \quad \mathcal{A}_{tot} = 2Ll + 2Lh + 2lh, \quad \mathcal{V}_{para} = Ll h.$$

1.13.3 Prismă dreaptă

Prisma dreaptă este un solid cu baza un poligon și cu muchiile laterale egale și perpendiculare pe bază.

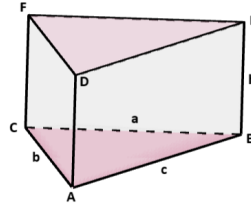


Fig. 1.14: Prismă dreaptă triunghiulară

$$\mathcal{A}_{lat} = (a + b + c)h, \quad \mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABC}h.$$

1.13.4 Piramidă

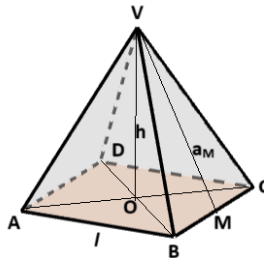


Fig. 1.15: Piramidă patrulateră dreaptă

Piramida este un solid care are ca bază un poligon și fețele laterale triunghiuri cu un vârf comun. De exemplu *piramida patrulateră dreaptă* are baza un dreptunghi cu înălțimea ei picând în punctul de intersecție al diagonalelor. *Piramida patrulateră regulată* este o piramidă patrulateră dreaptă cu baza un pătrat, fig.1.15. Înălțimea unei fețe laterale dusă din vârful piramidei pe o latură a bazei se numește *apotemă*. În cazul piramidei patrulateră regulate fețele laterale sunt triunghiuri congruente deci și apotemele sunt congruente. Dacă latura pătratului este l și apotema este a_M și înălțimea ei este h , avem formulele:

$$\mathcal{A}_{ABCD} = l^2 \quad \mathcal{A}_{lat} = 2la_M \quad \mathcal{V} = \frac{l^2 h}{3}.$$

1.13.5 Tetraedru regulat

Tetraedrul regulat este un solid cu patru fețe triunghiuri echilaterale. Pentru tetraedrul regulat de latură l , avem următoarele formule:

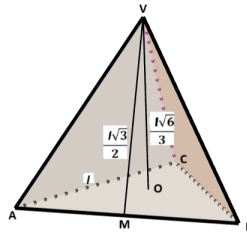


Fig. 1.16: Tetraedru regulat

$$VM = \frac{l\sqrt{3}}{2}, \quad h = VO = \frac{l\sqrt{6}}{3}, \quad \mathcal{A}_{lat} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{4},$$

$$\mathcal{A}_{tot} = l^2\sqrt{3}, \quad \mathcal{V} = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}.$$

1.13.6 Cilindru

Suprafața cilindrică este o suprafață generată drepte paralele care se sprijină pe o curbă plană. Dreptele se numesc *generatoare* iar curba se numește *curbă directoare*. Dacă curba directoare este un cerc, suprafața se numește cilindru circular iar dacă în plus generatoarele sunt perpendiculare pe planul în care se află curba directoare avem

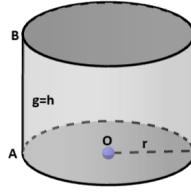


Fig. 1.17: Cilindru

un cilindru circular drept. Solidul numit cilindru se obține secționând suprafața cilindrică circulară dreaptă cu 2 plane paralele cu planul în care se află cercul director. Pentru solidul cilindru avem înălțimea paralelă și congruentă cu generatoarea. Dacă r este raza cercului director și g generatoarea solidului avem formulele:

$$\mathcal{A}_{\text{bază}} = \pi r^2, \quad \mathcal{A}_{\text{lat}} = 2\pi r g, \quad \mathcal{A}_{\text{tot}} = 2\pi r(r + g), \quad \mathcal{V} = \pi r^2 g.$$

1.13.7 Con

Suprafața conică este generată de drepte care trec printr-un punct fix și se sprijină pe o curbă plană. Curbă se numește *curbă directoare*, drepte se numesc *generatoare*, punctul fix este *vârful conului*. Dacă curbă directoare este un cerc conul se numește con circular iar dacă dreapta care unește vârful conului cu centrul cercului director este perpendiculară pe planul cercului atunci conul este un con circular drept. Solidul con este solidul mărginit de vârf, suprafața conică circulară dreaptă și planul în care se află cercul director.

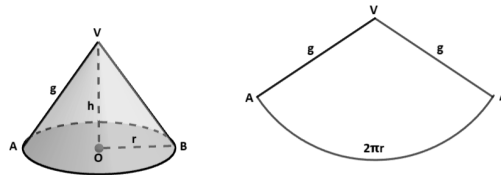


Fig. 1.18: Con și desfășurarea în plan a suprafeței sale laterale.

Un segment de dreaptă care unește vârful conului cu un punct de pe cercul director îl numim *generatoarea conului*, notată cu g , segmentul care unește vârful conului cu centrul cercului este *înălțimea*

conului, notată cu h , Raza cercului director o vom nota cu r . Avem următoarele formule:

$$\mathcal{A}_{\text{bază}} = \pi r^2, \quad \mathcal{A}_{\text{lat}} = \pi r g, \quad \mathcal{A}_{\text{tot}} = \pi r(r + g), \quad \mathcal{V} = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

1.13.8 Sfera și calota sferică

Sfera este solidul generat de locul geometric al punctelor din spațiu egal depărtate de un punct fix numit centrul sferei. Un plan care

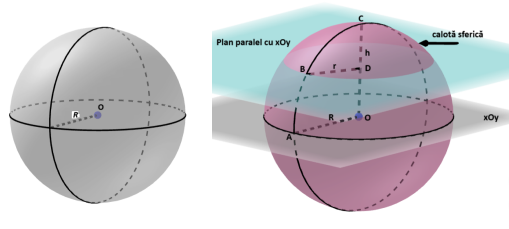


Fig. 1.19: Sfera și calota sferică

intersectează sfera o taie după un cerc. Dacă planul trece prin centrul sferei intersecția se numește *cerc mare*. Raza acestui cerc este egală cu raza sferei și o notăm cu R . Pentru sferă avem următoarele formule:

$$\mathcal{A}_{\text{sferă}} = 4\pi R^2, \quad \mathcal{V}_{\text{sferă}} = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

O calotă sferică este unul dintre solidele obținute prin secționarea unei sfere cu un plan. În figura 1.19 avem pentru calotă următoarele notații O centrul sferei, $OA = R$ raza cercului mare situat într-un plan paralel cu planul de secțiune, $OC = R$ raza sferei perpendiculară pe planul de secțiune, $DC = h$ înălțimea calotei alese, $DB = r$ raza cercului de secțiune. Avem următoarele formule:

$$\mathcal{A}_{\text{calotă}} = 2\pi R h, \quad \mathcal{V}_{\text{calotă}} = \frac{\pi h^2 (3R - h)}{3} = \frac{\pi h (3r^2 + h^2)}{6}.$$

1.13.9 Regula lui Kepler pentru determinarea aproximativă a volumelor unor solide

În practica inginerescă este adeseori nevoie de determinarea aproximativă a volumelor unor solide, în special cele mărginite de suprafețe de rotație dar nu numai. Una dintre aceste formule care dau o aproximare bună în variate probleme este regula lui Kepler. Este formulată

la începutul secolului al XVII-lea când aparatul matematic nu era dezvoltat așa de mult dar este utilizată și acum datorită simplității și eficienței ei. Concepută pentru calculul volumelor butoaielor, aplicabilitatea ei se extinde pe domenii mult mai mari. Formula dă valori exacte pentru piramidă și trunchi de piramidă, sferă, elipsoid, zonă sferică, zone cu secțiuni perpendiculare pe axa de simetrie pentru parabolizi eliptici, hiperboloizi cu o pânză, conoizi circulari drepți, prismoizi. Formula dă valori cu bună aproximare pentru butoaie și trunchiuri de arbore nu prea lungi.

$$\mathcal{V}_{corp} = \frac{h(B_0 + 4B_1 + B_2)}{6}. \quad (1.8)$$

În general, B_0 este aria bazei, B_1 este aria unei secțiuni medii și B_2 este aria suprafeței superioare. În cazul unui butoi sunt aria bazei, aria unei secțiuni medii și aria capacului.

1.14 Transformări geometrice

Dacă privim planul ca pe o mulțime de puncte este natural ca transformările geometrice să le privim ca pe niște funcții. Cum toate tipurile de transformări au același domeniu de definiție și același codomeniu este firesc să avem și compuneri de transformări. Există posibilitatea ca anumite transformări, în raport cu compunerea funcțiilor, să aibă niște proprietăți algebrice astfel încât să formeze o anumită structură algebrică.

Transformările pe care le vom aminti în această secțiune sunt simetriile, translațiile, rotațiile, omotetiile și inversiunile. Le vom descrie sumar, vom scoate în evidență câteva proprietăți ale lor și vom da exemple.

1.14.1 Simetria față de un punct

Considerăm într-un plan (π) , un punct fix O și un punct oarecare M . Simetricul lui M față de O este punctul M' pentru care O este mijlocul segmentului MM' . În notație condensată, convențională, putem scrie că M' este simetricul lui M față de O astfel: $M' = 2O - M$.

Considerăm acum un segment AB și dorim să determinăm simetricul său față de punctul O . Determinăm întâi simetricul lui A față de O care va fi A' . Avem $AO \equiv OA'$. Similar, dacă B' este simetricul lui B față de O atunci $BO \equiv OB'$. Rezultă că în patrulaterul $ABA'B'$ diagonalele se înjumătățesc deci $ABA'B'$ este un paralelogram. De

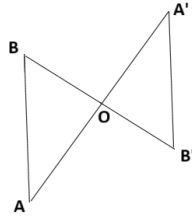


Fig. 1.20: Simetricul unui segment față de un punct

aici tragem concluzia că simetricul unui segment față de un punct este un segment paralel și congruent cu cel dat. Dacă se lucrează cu segmente orientate, atunci simetricul are sens invers față de original. Extrapolând avem că simetrica unei drepte față de un punct este o dreaptă paralelă cu cea dată, situată de cealaltă parte a punctului O și la aceeași distanță față de punctul O ca dreapta inițială.

Spunem că simetria față de un punct este o izometrie . Izometriile sunt transformări care păstrează unghiurile și distanțele. Astfel:

1. Simetricul unui triunghi față de un punct este un triunghi congruent cu cel dat. De remarcat că simetria față de un punct, pen-

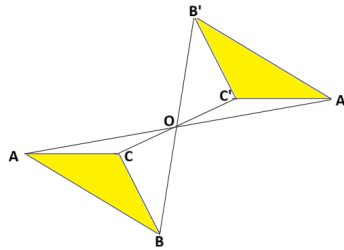


Fig. 1.21: Simetricul unui triunghi față de un punct

tru un triunghi, duce înălțimile în înălțimile corespunzătoare, la fel bisectoarele în bisectoare, medianele în mediane, mediatoarele în mediatoare. Același lucru și pentru punctele importante din triunghi.

2. Ca o consecință, pentru că orice poligon poate fi descompus în triunghiuri, simetricul unui poligon față de un punct este un poligon congruent cu cel dat.

3. Simetricul unui cerc de centru C și rază r față de un punct O este un cerc congruent cu cel dat și care are centrul C' simetricul lui C față de O .

1.14.2 Simetria față de o dreaptă

Considerăm în plan o dreaptă (d) .

1. Simetricul unui punct care nu aparține lui (d) față de (d) este punctul A' ales astfel încât dreapta (d) să fie mediatoarea segmentului AA' . Putem determina simetricul lui A față de (d) și

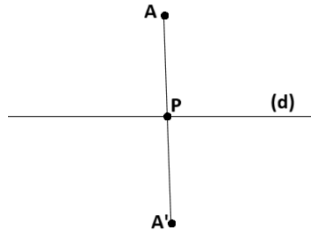


Fig. 1.22: Simetricul punctului A față de dreapta (d) .

reducând problema la simetricul unui punct față de un punct. Astfel, determinăm punctul P proiecția lui A pe (d) și simetricul lui A față de (d) va fi simetricul lui A față de P . Simetricul unui punct de pe dreaptă față de dreaptă este evident același punct.

2. Simetricul unui segment față de dreapta (d) se obține astfel: dacă avem capetele segmentului în punctele A și B (situate pen-

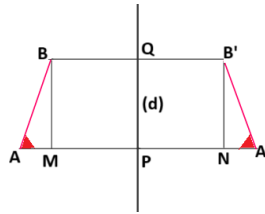


Fig. 1.23: Simetricul segmentului AB față de dreapta (d) .

tru ușurința înțelegerii de aceeași parte a drepte) determinăm A' și B' simetricele lui A și B față de (d) . Segmentul $A'B'$ este simetricul lui AB față de (d) . În figura 1.23 triunghiurile AMB

și $A'NB'$ sunt congruente de unde rezultă că segmentele AB și $A'B'$ sunt congruente și $\widehat{A} \equiv \widehat{A}'$. De aici rezultă că și simetria față de o dreaptă este o izometrie.

3. Simetricul unui triunghi față de o dreaptă este un triunghi congruent cu cel dat. Aceasta rezultă din faptul că simetria față de o dreaptă este o izometrie.
4. Simetricul unui poligon față de o dreaptă este un poligon congruent cu cel dat și aceasta rezultă din faptul că orice poligon se poate descompune în triunghiuri.
5. Simetricul unui cerc față de o dreaptă este un cerc congruent cu cel dat și care are centrul în simetricul centrului cercului dat față de dreaptă.

Compunerea unei simetrii față de o dreaptă cu o simetrie față de altă dreaptă este tot o simetrie față de o dreaptă. În figura 1.24 am con-

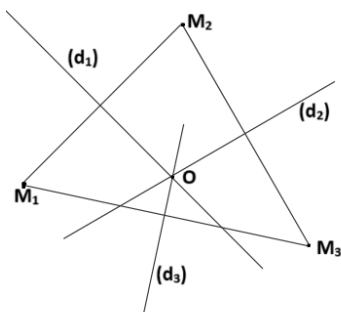


Fig. 1.24: Compunerea a două simetrii

siderat dreptele (d_1) , (d_2) concurente în punctul O și punctul M_1 . Fie M_2 simetricul lui M_1 față de (d_1) . Dreapta (d_1) devine mediatoarea segmentului M_1M_2 . Fie M_3 simetricul lui M_2 față de (d_2) . Dreapta (d_2) devine mediatoarea segmentului M_2M_3 . Dacă O este intersecția dreptelor (d_1) cu (d_2) el este centrul cercului circumscris triunghiului $M_1M_2M_3$. Perpendiculara din O pe M_1M_3 este mediatoarea segmentului M_1M_3 . Astfel punctul M_3 este simetricul punctului M_1 față de (d_3) .

1.14.3 Translația

Translația este o transformare geometrică ce "deplasează" o mulțime de puncte pe o direcție dată, într-un sens dat și pe o lungime dată. În

mod biunivoc unei translații putem să îi asociem un vector liber determinat de acea direcție, același sens și aceeași lungime. Cum mulțimea vectorilor liberi înzestrată cu adunarea vectorilor formează o structură de grup comutativ rezultă că și translațiile împreună cu operația de compunere a funcțiilor formează o structură de grup comutativ.

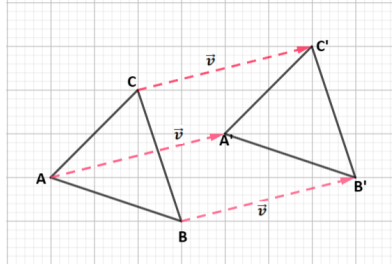


Fig. 1.25: Translație de vector $\vec{v}$.

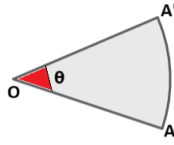
În consecință compunerea a două translații este tot o translație, este asociativă, există translația nulă și inversa unei translații are aceeași direcție cu translația dată, aceeași lungime dar are sens opus. Printr-o translație o figură geometrică se transformă într-o figură congruentă cu cea dată. Translația este o izometrie.

În figura 1.25 avem o translație de vector $\vec{v}$ a triunghiului ABC . Rezultatul translației este triunghiul $A'B'C'$. Segmentul AA' este paralel și congruent cu segmentul CC' deci $AA'C'C$ este un paralelogram, deci $AC \equiv A'C'$. Similar obținem că $AB \equiv A'B'$ și $BC \equiv B'C'$. De aici avem că $ABC \equiv A'B'C'$ (caz LLL) de unde rezultă că și unghiurile corespunzătoare sunt congruente deci translația este o izometrie.

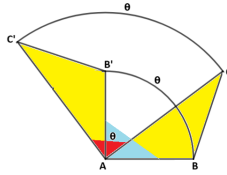
1.14.4 Rotația

Rotațiile se caracterizează printr-un centru și un unghi. Spunem că efectuăm o rotație de unghi θ în jurul unui punct numit centru de rotație. Rotația este o izometrie.

1. Rotația de unghi θ , în jurul punctului O , a unui punct A .
Punctul A se deplasează pe un arc de cerc de rază OA în punctul A' astfel încât unghiul $m(\widehat{AOA'}) = \theta$. fig. 1.26
2. Rotația de unghi θ a unui segment în jurul unui punct. Rotația de unghi θ în jurul unui punct duce un segment într-un segment congruent cu el. Dreptele suport ale celor două segmente formează între ele un unghi de măsură θ .

Fig. 1.26: Rotația de unghi θ a unui punct A în jurul punctului O .

3. Rotația de unghi θ a unui triunghi.

Fig. 1.27: Rotația triunghiului ABC în jurul lui A cu un unghi θ

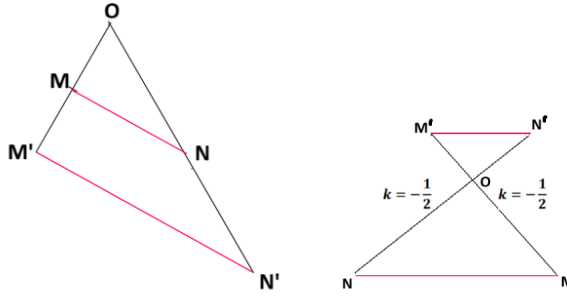
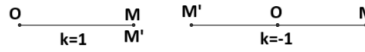
Prin rotația prezentată în figura 1.27 triunghiul ABC se rotește cu un unghi θ în jurul punctului A . Se obține astfel triunghiul $AB'C'$ congruent cu ABC . Între oricare pereche de laturi corespunzătoare este unghiul θ .

1.14.5 Omotetia

Definiția 1.2. Considerăm un plan π , un punct fix $O \in \pi$ și un număr real k . Numim omotetie de centru O și raport k o transformare care are următoarele proprietăți:

1. Punctul O este invariant la această transformare (este dus tot în el, în acest caz $k=0$).
2. Dacă $M \in \pi$, $M \neq O$ și M' este imaginea lui M prin omotetie, atunci O, M, M' sunt coliniare, dreapta pe care se află o numim dreaptă suport. Pentru $k > 0$ ordinea punctelor pe dreapta suport este O, M, M' sau M', M, O iar pentru $k < 0$ avem ordinea M, O, M' sau M', O, M .
3. Pentru orice M din plan avem relația $OM' = |k|OM$.

Observația 1.2. Pentru $k=1$ punctele M și M' coincid iar pentru $k=-1$ punctul M' este simetricul lui M față de O .

Fig. 1.28: Omotetie de centru O și raport $k \neq 1$.Fig. 1.29: Omotetie de centru O și raport $|k| = 1$.

O omotetie de centru O și raport k duce o figură geometrică într-o figură geometrică asemenea cu cea dată, raportul de asemănare fiind k . O omotetie nu este o izometrie ea păstrând numai unghiurile.

Teorema 1.5. (Thales) *O paralelă dusă la laturile unui triunghi, în interior sau în exterior, determină pe celelalte două laturi segmente proporționale.*

$$\frac{OM}{MM'} = \frac{ON}{NN'}, \quad (k > 0), \quad \frac{OM}{OM'} = \frac{ON}{ON'}, \quad (k < 0).$$

Teorema 1.6. (reciproca teoremei lui Thales) *Dacă o dreaptă taie, în interior sau în exterior, laturile unui triunghi după segmente proporționale atunci ea este paralelă cu a treia latură a triunghiului.*

1.14.6 Inversiunea

Inversiunea este tot o transformare care nu este izometrie. Ea se definește astfel:

Definiția 1.3. *Fie π un plan, O un punct fix, k un număr real nenul și punctul $M \in \pi \setminus \{O\}$. Inversiunea de pol O și putere k este o transformare geometrică*

$$I : \pi \setminus \{O\} \rightarrow \pi \setminus \{O\}, \quad I(M) = M'$$

cu proprietățile:

1. O, M, M' sunt coliniare;
2. $OM \cdot OM' = k$

Observația 1.3. Pentru $k > 0$ M și M' sunt de aceeași parte a lui O iar pentru $k < 0$ sunt de o parte și de cealaltă a lui O .

Proprietăți ale unei inversiuni:

1. Inversiunea nu este o izometrie pentru că nu păstrează distanțele.

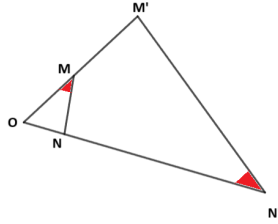


Fig. 1.30: Inversiunea de pol O și putere k nu e izometrie.

Considerăm o inversiune de pol O , putere k și punctele M, N . Din condiția de inversiune

$$OM \cdot OM' = ON \cdot ON' \Rightarrow \frac{OM}{ON'} = \frac{ON}{OM'}$$

și cum unghiul $\widehat{O}$ este comun rezultă că triunghiurile OMN și $OM'N'$ sunt invers asemenea, segmentele MN și $M'N'$ sunt antiparalele pentru că unghiurile $\widehat{OMN} \equiv \widehat{ON'M'}$. Segmentele $MN, M'N'$ au lungimi diferite.

2. Punctele M, M', N', N sunt conciclice pentru că

$$m(\widehat{NMM'}) + m(\widehat{M'N'N}) = 180^\circ.$$

3. Inversiunea de pol O și putere k transformă o dreaptă ce nu trece prin pol într-un cerc ce trece prin pol.

Fie o inversiune de pol O , putere k , o dreaptă (d) ce nu trece prin pol și un punct $M \in (d)$. Ducem $ON \perp (d)$. Imaginea

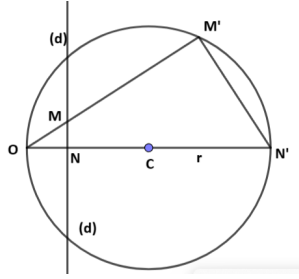


Fig. 1.31: Dreaptă ce nu trece prin pol transformată de inversiune în cerc ce trece prin pol

lui N prin transformare este punctul N' . Cum $m(\widehat{ONM}) = 90^\circ$ rezultă că avem și $m(\widehat{OM'N'}) = 90^\circ$. Punctul N este fix deci N' este fix și rezultă că oricum alegem punctul M pe (d) punctul M' se va afla pe cercul de diametru ON' . Dar

$$ON \cdot ON' = k, \quad \Rightarrow \quad ON' = \frac{|k|}{ON} \quad \text{deci} \quad r = \frac{|k|}{2ON}.$$

4. Un cerc ce trece prin polul O al inversiunii este transformat într-o dreaptă perpendiculară pe diametrul cercului ce trece prin O dusă la distanța $ON = \frac{2r}{|k|}$.
5. O inversiune transformă o dreaptă ce trece prin pol în ea însăși.
6. Un cerc ce nu trece prin pol este transformat de inversiune într-un cerc.

Transformări plane, aplicații

Teorema 1.7. (Teorema lui Pompeiu) *Fie triunghiul echilateral ABC și M un punct exterior triunghiului și care nu aparține cercului circumscris triunghiului. Atunci cu segmentele AM , BM , CM se poate construi un triunghi.*

Aplicăm triunghiului ABM o rotație de unghi 60° , în sens direct trigonometric, în jurul lui A , (fig.1.32). AB se va duce peste AC , AM se va transforma în AM' , cele două având între ele un unghi de 60° , iar BM va avea imaginea CM' . Triunghiul AMM' este echilateral deci $MM' \equiv MA$. Triunghiul CMM' este triunghiul căutat.

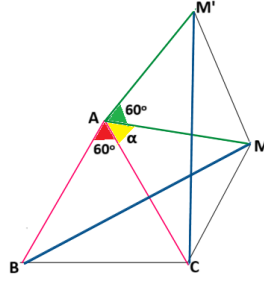


Fig. 1.32: Rezolvarea teoremei lui Pompeiu

Problemă: Fie $ABCD$ un trapez în care $AB \parallel DC$ și diferența diagonalelor este egală cu diferența laturilor neparalele. Arătați că $ABCD$ este un trapez isoscel.

Soluție: Din ipoteză avem că $AC - BD = AD - CB$. Rescriem această relație sub forma:

$$AC + CB = AD + DB.$$

Fie O mijlocul lui AB . În M ridicăm o perpendiculară pe AB care taie CD în punctul N . Folosim în continuare definiția și proprietățile unui loc geometric cunoscut:

Fie F_1 și F_2 două puncte fixe în plan. Locul geometric al punctelor P , pentru care $F_1P + PF_2$ este constant este o elipsă de focare F_1, F_2 și de centru O , mijlocul segmentului F_1F_2 . Axele de coordonate, date astfel: Ox e axa focală (dreapta determinată de focare) și Oy perpendiculara în O pe Ox , sunt axe de simetrie pentru elipsă.

În cazul nostru, focarele sunt punctele A și B , centrul elipsei este punctul M , axele Ox și Oy sunt date de dreapta AB și dreapta MN . Punctele C și D sunt pe elipsă și $CD \parallel AB$. Din simetriile elipsei rezultă că $AMND \equiv MNCB$ și deci $AD = CB$ q.e.d.

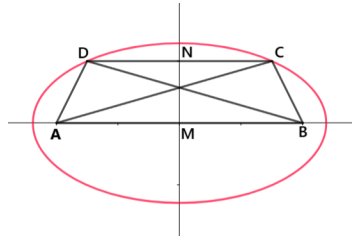


Fig. 1.33: Aplicație la simetriile elipsei.

Capitolul 2

Geometrie analitică

2.1 Coordonate carteziene în plan

Considerăm în plan o dreaptă pe care am fixat un punct special O , numit *origine*, sensul de deplasare pozitiv de la origine spre dreapta și o unitate de lungime. Dreapta astfel aleasă o vom numi *axă*. Utilizând unitatea de lungime aleasă putem plasa pe axă punctul M_1 astfel încât segmentul $|OM_1|$ să aibă lungimea egală cu unitatea. Punem pe axă punctele $M_2, M_3, \dots, M_n, \dots$ astfel încât segmentele determinate de puncte cu indici consecutivi să aibă lungimea unitară. Facem convenția ca secvenței de puncte $O, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ să îi corespundă secvența de numere întregi pozitive $0, 1, 2, \dots, n, \dots$. Similar, poziționând punctele în stânga originii, luăm punctele $M_{-1}, M_{-2}, \dots, M_{-n}, \dots$ cărora le atașăm secvența $-1, -2, \dots, -n, \dots$ putem acum spune că pe axa considerată am plasat punctele corespunzătoare numerelor întregi. Reamintim că un număr x se numește rațional dacă el poate fi scris

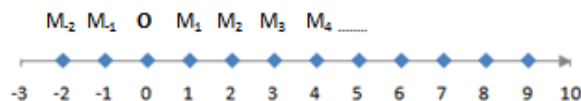


Fig. 2.1: Reprezentarea numerelor întregi pe axă

sub forma $x = \frac{p}{q}$ unde p, q sunt numere întregi și $q \neq 0$. Putem reprezenta și acest număr pe axă astfel: divizăm unitatea OM_1 în q segmente egale ca lungime, $OQ_1, OQ_2, \dots, OQ_q = OM_1$ și deplasăm de p ori spre dreapta segmentul OQ_1 dacă x e pozitiv. Punctului obținut

îi atașăm numărul rațional $x = \frac{p}{q}$. Putem astfel pune pe axă toate numerele raționale. Numerele care nu pot fi scrise sub forma $x = \frac{p}{q}$ cu



Fig. 2.2: Reprezentarea lui $7/5$ pe axă

p, q întregi și q diferit de 0 se numesc numere iraționale. de exemplu $\sqrt{2}$, care reprezintă lungimea diagonalei unui pătrat de latură 1, este un număr irațional. Fără să intrăm în amănunte, știind că orice număr irațional poate fi scris ca limita unui șir de numere raționale, putem pune pe axă, în mod unic și numerele iraționale. Astfel, mulțimea punctelor de pe axă poate fi pusă într-o corespondență cu mulțimea numerelor reale, lucru care asigură unicitatea exprimării.

Considerăm în plan două axe perpendiculare una pe cealaltă, care au originea comună și pe care avem aleasă aceeași unitate de lungime. Din comoditatea desenului vom lua una dintre axe orizontală. O vom nota cu Ox și o vom numi *axa absciselor*, cealaltă axă, verticală, o vom nota Oy și o numim *axa ordonatelor*. Spunem că în planul considerat am introdus un *reper cartezian*. Putem caracteriza în mod unic poziția fiecărui punct M din plan în raport cu reperul cartezian ales astfel: din punctul M ducem o perpendiculară pe axa Ox și o perpendiculară pe axa Oy . Obținem pe abscisă un punct x_M iar pe ordonată un punct y_M . Astfel, punctului M îi putem asocia perechea (x_M, y_M) . Unicitatea perpendicularelor ne asigură că avem unicitatea asocierii $M \rightarrow (x_M, y_M)$. Reciproc, având alese pe Ox punctul x_M și pe Oy punctul y_M putem determina în mod unic punctul M astfel: prin x_M ducem o paralelă la Oy și prin y_M ducem o paralelă la Ox . Proprietăți de geometrie sintetică elementară ne asigură că cele două drepte se vor intersecta în punctul M . Am realizat astfel o corespondență biunivocă între punctele din plan și mulțimea tuturor perechilor de forma (x, y) cu $x \in Ox$, $y \in Oy$.

$$M \longleftrightarrow (x_M, y_M).$$

Numerele x_M și y_M se vor numi *abscisa* și *ordonata* punctului M iar perechea (x_M, y_M) ne va da coordonatele carteziene ale punctului M .

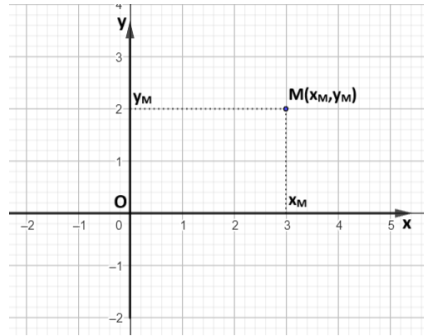


Fig. 2.3: Coordonate carteziene în plan

Observăm că, de exemplu, pe axa Ox poziția unui punct M este unic determinată de o singură mărime și anume valoarea x_M . Modulul acestei valori ne dă lungimea segmentului OM .

Rezumând, punctele de pe axa Ox vor avea coordonatele $(x, 0)$, cele de pe axa ordonatelor vor fi de forma $(0, y)$ iar un punct oarecare din plan va avea coordonatele (x, y) .

Considerăm punctul $A(x_a, 0)$ situat pe axa Ox . Ducem perpendiculara în A pe Ox . Din modul cum am definit coordonatele unui punct în plan, deducem că toate punctele situate pe această perpendiculară au abscisa egală cu x_a și coordonatele de forma (x_a, y) , $y \in \mathbb{R}$. Similar, dacă luăm punctul $B(0, y_b)$ pe axa ordonatelor și considerăm perpendiculara în B pe axă, vom observa că toate punctele de pe această dreaptă au coordonatele de forma (x, y_b) , $x \in \mathbb{R}$.

Mijlocul unui segment

Considerăm punctele $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ și dorim să aflăm coordonatele punctului $M(a, b)$ mijlocul segmentului M_1M_2 . Pe abscisă, observăm că avem $a - x_1 = x_2 - a$ de unde putem să îl exprimăm pe a . Similar, avem pe ordonată $b - y_1 = y_2 - b$. De aici rezultă că punctul M are coordonatele date de

$$a = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad b = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Exerciții:

1. Reprezentați pe o axa punctele 1; 2; $3/4$; $7/3$; -2; -5,2.
2. Reprezentați pe o axa valoarea $\sqrt{2}$ (Ind. Folositi desenul unui pătrat de latură 1.)
3. Reprezentați într-un reper cartezian punctele de coordonate $A(2, 3; 0)$, $B(0; 3/4)$, $C(2; 4)$, $D(1; 3/2)$
4. Considerăm punctele $A(0; 1)$, $B(2; -1)$, $C(-1; 3)$, $D(2; 0)$. Puneți în evidență segmentele de dreaptă determinate de următoarele perechi de puncte AB , AC , AD , BC , CD .
5. Reprezentați în plan toate punctele care au ordonata 2 sau 4 și abscisa 3 sau 5.
6. Considerați punctele $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $C(5, 2)$, $D(2, 3)$, $E(-1, 3)$, $F(-3, 2)$. Găsiți perechile de puncte care se află pe o paralelă la Ox și pe cele care se află pe o paralelă la Oy și determinați coordonatele punctului de intersecție a acestor paralele.
7. Determinați mijlocul segmentului dat de punctele $A(3, 1)$ și $B(2, 2)$.

2.2 Diverse ecuații ale unei drepte în plan

Considerăm în plan un reper cartezian și punctul $A(x_a, y_a)$, $x_a \neq 0$. Știm că în triunghiul OCA , dreptunghic în C , tangenta unghiului α se definește ca fiind raportul dintre cateta opusă unghiului și cateta alăturată lui.

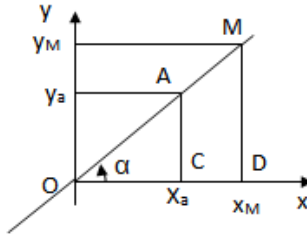
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AC}{OC} = \frac{y_a}{x_a}$$

2.2.1 Ecuația unei drepte care trece prin origine și are panta dată

Avem, evident, relația

$$y_a = \frac{y_a}{x_a} x_a = \operatorname{tg}(\alpha) x_a.$$

Pe dreapta OA considerăm punctul $M(x_M, y_M)$ și D , proiecția lui M pe Ox . Asemănarea triunghiurilor OCA și ODM ne asigură că avem îndeplinită și relația $y_M = \operatorname{tg}(\alpha) x_M$. Acest lucru înseamnă că orice

Fig. 2.4: Dreapta ce trece prin origine și are panta m .

punct $P(x, y)$ de pe dreapta OA are coordonatele x, y legate prin relația

$$y = \operatorname{tg}(\alpha)x \quad (2.1)$$

Tangenta unghiului α o vom numi *panta dreptei* OA și o vom nota cu m . Atunci, ecuația unei drepte care trece prin origine și are panta m va fi

$$y = mx. \quad (2.2)$$

Un caz special este cel în care unghiul α este de 90° . Dreapta considerată este chiar axa Oy . Toate punctele de pe ea au proprietatea că abscisa lor este 0. Astfel ecuația ei este:

$$(Oy) : \quad x = 0. \quad (2.3)$$

Dacă dreapta a cărei ecuație dorim să o determinăm este axa Ox trebuie să avem în vedere că $\alpha = 0^\circ$ deci $\operatorname{tg}(\alpha) = 0$ și în consecință ecuația ei este

$$(Ox) : \quad y = 0. \quad (2.4)$$

2.2.2 Ecuația unei drepte determinată de panta ei și intersecția la Oy

Să vedem cum arată în general ecuația unei drepte de pantă m și care este semnificația coeficienților ecuației.

Considerăm punctul $A(x_a, y_a)$, n un număr real și punctul $C(x_a, y_a + n)$. Cele două puncte având aceeași abscisă și ordonate diferite se situează pe o paralelă la Oy . Similar considerăm punctele $B(x_b, y_b)$, $D(x_b, y_b + n)$. Rezultă că și punctele B, D sunt pe o paralelă la axa Oy . Segmentele AC și BD sunt paralele și amândouă au lungimea

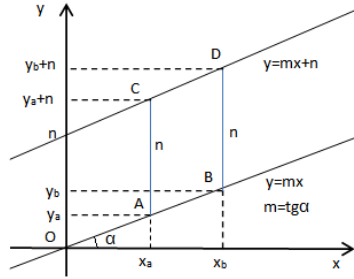


Fig. 2.5: Dreapta de pantă m și intersecție la Oy egală cu n

n . În consecință patrulaterul $ABCD$ este un paralelogram (laturi opuse paralele și egale). Rezultă că dreapta determinată de punctele C , D este paralelă cu dreapta determinată de A și B . Pe dreapta determinată de C și D , relația dintre variabilele x și y va fi

$$y = mx + n \quad (2.5)$$

unde m este panta dreptei (tangenta unghiului pe care dreapta îl face cu axa Ox), iar n este intersecția dreptei cu axa Oy . Ecuația 2.5 poartă numele de *ecuația unei drepte determinată de pantă și de intersecția ei cu axa Oy* . Cazul în care dreapta considerată este paralelă cu Oy (adică perpendiculară pe Ox) trebuie tratat separat. În acest caz m are valoare infinită. Punctele de pe dreaptă se bucură însă de proprietatea că toate au aceeași abscisă, a și în consecință ecuația dreptei va fi:

$$x = a. \quad (2.6)$$

2.2.3 Ecuația unei drepte care trece printr-un punct dat și are panta m .

Considerăm în plan reperul xOy , un punct fix $P(x_0, y_0)$ și un al doilea reper XPY cu originea în P și cu axele paralele cu axele primului reper. Fie M un punct oarecare în plan. Fie x_M, y_M, X_M, Y_M coordonatele lui M în cele două repere.

Să observăm că $x_M = x_0 + X_M$ iar $y_M = y_0 + Y_M$. La schimbarea

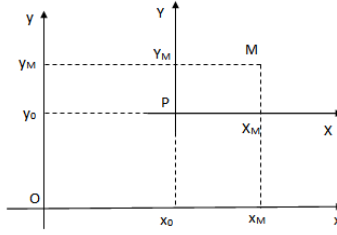


Fig. 2.6: Schimbarea de reper

de coordonate, trecerea de la un sistem la altul se face cu formulele:

$$(X, Y) \longrightarrow (x, y) \quad \begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases} \quad (2.7)$$

$$(x, y) \longrightarrow (X, Y) \quad \begin{cases} X = x - x_0 \\ Y = y - y_0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Putem acum să scriem ecuația unei drepte care trece printr-un punct și are panta m . Fie $P(x_0, y_0)$ punctul prin care știm că trece dreapta și considerăm reperul XPY . În acest reper dreapta noastră are ecuația de forma dată de ecuația 2.2 și anume

$$Y = mX.$$

Formulele 2.8 ne vor conduce la ecuația dorită și anume:

$$y - y_0 = m(x - x_0) \quad (2.9)$$

Pentru a găsi care este valoarea lui n (intersecția cu Oy) rescriem ecuația 2.9 trecând y_0 în membrul drept și efectuând înmulțirile.

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Identificăm coeficienții cu cei din ecuația 2.5 rezultă că

$$n = y_0 - mx_0 \quad (2.10)$$

Punem în evidență, iarăși, cazul în care $\alpha = 90^\circ$. Dreapta care trece prin punctul $M(x_0, y_0)$ va fi paralelă cu Oy , coeficientul m este infinit. Toate punctele de pe această dreaptă vor avea însă aceeași abscisă și anume x_0 .

Ecuația perpendicularei pe Ox ce trece prin (x_0, y_0) este $x = x_0$.

2.2.4 Ecuația unei drepte determinate de două puncte

Să considerăm punctele $A(x_a, y_a)$ și $B(x_b, y_b)$. Prin A ducem o paralelă la axa Ox și prin B ducem o paralelă la axa Oy care taie Ox în punctul D . Notăm intersecția celor două drepte cu C . Dreapta determinată de A și B taie axa Ox în E . Notăm cu α unghiul pe care dreapta AB îl face cu axa Ox . Triunghiurile EDB și ACB sunt asemenea (o paralelă la o latură a unui triunghi determină pe celelalte două un triunghi asemenea cu cel dat). Rezultă din asemănare că unghiul $\angle BAC = \alpha$. Tangenta unghiului α o calculăm din tri-

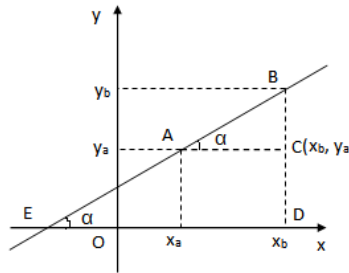


Fig. 2.7: Dreapta determinată de două puncte

unghiul dreptunghic ACB . Pentru că B și C au aceeași abscisă, lungimea catetei BC este $|BC| = y_b - y_a$ iar lungimea catetei AC este $|AC| = x_b - x_a$ pentru că A și C au aceeași ordonată. Deci

$$tg(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}. \quad (2.11)$$

Scriem acum ecuația dreptei care trece prin A și are pantă dată folosind formula 2.9 în care punem $x_0 = x_a$, $y_0 = y_a$ și $m = tg(\alpha)$ determinată în formula anterioară. Obținem:

$$y - y_a = \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a) \quad (2.12)$$

Pe $y_b - y_a$ îl vom trece la numitor în celălalt membru și avem ecuația carteziană a dreptei determinate de două puncte:

$$\frac{y - y_a}{y_b - y_a} = \frac{x - x_a}{x_b - x_a} \quad (2.13)$$

Dacă punctele A și B au aceeași abscisă, x_a , dreapta va fi paralelă cu Oy și ecuația 2.12 va deveni

$$x = x_a.$$

Dacă A și B au aceeași ordonată, y_a , dreapta va fi paralelă cu Ox , iar ecuația ei devine

$$y = y_a.$$

Exerciții

1. Să se scrie ecuația dreptei ce trece prin origine și face cu axa Ox un unghi de 60° .

Soluție: Ecuația dreptei este de forma $y = mx$ unde m este egal cu tangenta unghiului pe care dreapta îl face cu Ox . În cazul nostru unghiul este de 60° . Deci $m = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$. Rezultă că ecuația dreptei va fi:

$$y = \sqrt{3}x$$

2. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin origine și face cu axa Oy un unghi de 60° .

Soluție: Va trebui întâi să determinăm unghiul pe care îl face dreapta cu axa Ox . Unghiul dintre axa Ox și axa Oy este de 90° deci unghiul pe care dreapta îl face cu Ox va fi $\alpha = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$. Am ajuns astfel în condițiile problemei anterioare.

$y = mx = \operatorname{tg}(\alpha)x$. $\operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Ecuația căutată este:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$$

3. Să se determine unghiul pe care dreapta $y = x$ îl face cu axa Ox .

Soluție: Să observăm întâi că dacă îl facem pe $x=0$ în ecuația dreptei va rezulta că și $y=0$. Acest lucru înseamnă că punctul de coordonate $(0,0)$ verifică ecuația dreptei deci dreapta noastră trece prin origine. Forma generală a ecuației unei drepte ce trece prin origine și are panta m este $y = mx$. Prin identificare cu ecuația dreptei noastre rezultă că $m = 1$. De aici avem $m = \operatorname{tg}(\alpha) = 1$. În concluzie $\alpha = 45^\circ$.

4. Să se determine intersecția cu axa Oy a dreptei care trece prin punctul $P(1, 2)$ și are panta $m = 0,7$.

Soluție: Ecuația unei drepte care are panta m și intersecția cu Oy egală cu n este $y = mx + n$. Ecuația unei drepte ce trece prin punctul $P(x_0, y_0)$ și are panta m este $y - y_0 = m(x - x_0)$. Înlocuim în această ecuație pe x_0 , y_0 și m cu valorile date în problemă $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $m = 0,7$ și rezultă că ecuația dreptei noastre este

$$y - 2 = 0,7(x - 1).$$

Trecem 2 în membrul drept, efectuăm calculele și obținem:

$$y = 0,7x + 1,3$$

deci $n = 1, 3$.

5. Să se determine panta dreptei care trece prin punctele $A(2,3)$ și $B(3,5)$

Soluție: Pentru dreapta care trece prin două puncte folosim forma dată de ecuația 2.12. Avem $x_a = 2$, $y_a = 3$, $x_b = 3$, $y_b = 5$. Înlocuind direct obținem

$$y - 3 = \frac{5 - 3}{3 - 2}(x - 2)$$

sau

$$y - 3 = 2(x - 2).$$

Coeficientul lui x din această ecuație este panta dreptei conform ecuației 2.9.

6. Se consideră triunghiul de vârfuri $A(1, 3)$, $B(2, 4)$ și $C(-2, -2)$. Să se scrie ecuația medianei din A . (Ind. O mediană este dreapta care unește un vârf al unui triunghi cu mijlocul laturii opuse.)

2.2.5 Ecuația dreptei prin tăieturi

Un caz particular al ecuației dreptei care trece prin două puncte este cel în care cele două puncte sunt date de intersecția dreptei cu axele de coordonate. Aceste puncte de intersecție se numesc *tăieturi*. Considerăm punctele $A(a, 0)$ pe axa Ox și $B(0, b)$ pe axa Oy . Tăieturile sunt a și b . Scriem ecuația dreptei ce trece prin A și B sub forma 2.12 ținând cont că $x_a = a$, $y_a = 0$, $x_b = 0$ și $y_b = b$. Avem:

$$y = \frac{b}{-a}(x - a).. \quad (2.14)$$

Înmulțim ambii membri cu $-a$ și obținem $-ay = b(x - a)$ de unde înmulțind cu -1 și trecând termenul în x în membrul stâng avem $bx + ay = ab$. Împărțim ambii membri cu ab și ne rezultă ecuația

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (2.15)$$

Această formă a ecuației dreptei poartă numele de *ecuația dreptei prin tăieturi*.

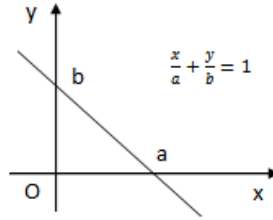


Fig. 2.8: Dreapta prin tăieturi

Exerciții:

1. Să se scrie ecuația dreptei care trece prin punctele $A(4,0)$ și $B(0,3)$.

Soluție: Observăm că punctele se află pe axele de coordonate, A pe Ox și B pe Oy tăieturile fiind 4 și 3. Ecuația 2.15 ne dă direct rezultatul.

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1.$$

2. Să se determine panta dreptei $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$.

Soluție: Tăieturile sunt 3 și -2. Punem ecuația dreptei sub forma $y = mx + n$. Avem $-\frac{y}{2} = -\frac{x}{3} + 1$. Înmulțim cu -2 ambii termeni și rezultă $y = \frac{2}{3}x - 2$. Coeficientul lui x ne dă panta dreptei, deci

$$m = \frac{2}{3}.$$

Observăm că putem determina panta dreptei și direct folosind ecuația scrisă sub forma 2.14 și anume pentru o dreaptă cu tăieturile a, b panta este $m = -\frac{b}{a}$.

2.2.6 Ecuația generală a unei drepte în plan

Orice relație de forma

$$ax + by + c = 0 \quad (2.16)$$

reprezintă, în plan, ecuația generală a unei drepte. Pornind de la ea, putem deduce panta respectivei drepte și tăieturile ei. Astfel,

exprimând din 2.16 pe y obținem

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}. \quad (2.17)$$

Identificând coeficienții rezultă

$$m = -\frac{a}{b} \quad n = -\frac{c}{b} \quad (2.18)$$

Pentru a determina intersecția dreptei cu axa Ox în 2.16 îl facem pe $y = 0$ și obținem

$$x_0 = -\frac{c}{a}.$$

2.2.7 Condiția de paralelism a două drepte

Să considerăm dreptele $(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Punând aceste ecuații sub forma 2.17 obținem pentru ele

$$m_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \quad n_1 = -\frac{c_1}{b_1}$$

și

$$m_2 = -\frac{a_2}{b_2}, \quad n_2 = -\frac{c_2}{b_2}.$$

Cele două drepte vor avea aceeași pantă dacă $m_1 = m_2$ adică $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$ relație care poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (2.19)$$

Condiția ca cele două drepte să aibă aceeași intersecție cu axa Oy este ca $n_1 = n_2$ adică $-\frac{c_1}{b_1} = -\frac{c_2}{b_2}$ relație care poate fi scrisă sub forma

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{b_1}{b_2}. \quad (2.20)$$

Folosind relațiile 2.19 și 2.20 obținem că dacă avem două drepte și

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

atunci cele două drepte coincid având aceeași pantă și aceeași intersecție la Oy .

Dacă

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

atunci cele două drepte au aceeași pantă dar intersecțiile la Oy sunt diferite, deci ele sunt distincte și paralele.

2.2.8 Condiția de perpendicularitate a două drepte

Pentru a determina condiția de perpendicularitate dintre dreptele date de ecuațiile $(d_1) : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ și $(d_2) : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ notăm cu α și β unghiurile pe care cele două drepte le fac cu axa Ox și folosim relațiile

$$\operatorname{tg}(\alpha) = m_1 = -\frac{a_1}{b_1}, \quad \operatorname{tg}(\beta) = m_2 = -\frac{a_2}{b_2}, \quad \operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\beta) - \operatorname{tg}(\alpha)}{1 + \operatorname{tg}(\beta)\operatorname{tg}(\alpha)}. \quad (2.21)$$

În figura 2.9 $\angle CBx$ este unghi exterior triunghiului ABC și este deci

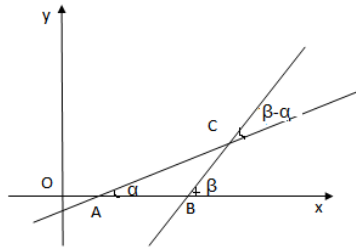


Fig. 2.9: Unghiul dintre două drepte

egal cu suma unghiurilor nealăturate. Rezultă că $\beta = \alpha + \angle ACB$.

Unghiul dintre cele două drepte va fi $\beta - \alpha$ și înlocuind tangentele cu pantele în ultima relație din 2.21 rezultă

$$\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}. \quad (2.22)$$

Dreptele sunt perpendiculare dacă unghiul dintre ele este de 90° . În acest caz tangenta unghiului $\beta - \alpha$ este infinită ceea ce conduce la concluzia că numitorul relației 2.22 trebuie să fie zero. În concluzie, relația de perpendicularitate dintre două drepte este

$$m_1 m_2 + 1 = 0 \quad \text{sau} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1} \quad (2.23)$$

sau înlocuind m_1 și m_2 cu expresiile lor obținem

$$\left(-\frac{a_1}{b_1}\right) \left(-\frac{a_2}{b_2}\right) + 1 = 0.$$

Aducem la același numitor și rezultă condiția de perpendicularitate sub forma

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0. \quad (2.24)$$

În concluzie, pornind de la ecuații de drepte scrise sub forma 2.5 sau 2.16 avem următoarele condiții de paralelism și condiții de perpendicularitate:

- paralelism

$$m_1 = m_2, \quad n_1 \neq n_2, \quad \text{sau} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad (2.25)$$

- coincidență

$$m_1 = m_2, \quad n_1 = n_2, \quad \text{sau} \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

- perpendicularitate

$$m_1 m_2 + 1 = 0 \quad \text{sau} \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

Exerciții

1. Să se determine α astfel încât dreptele $y = 2x + 5$ și $3x - 2\alpha y = 0$ să fie paralele. Coincid cele două drepte?
2. Să se determine α și β astfel încât dreptele $3x + 2y - \beta = 0$ și $\alpha x - y + 4 = 0$ să coincidă.
3. Să se arate că dreptele $2x + y - 5 = 0$ și $x - 2y + 3 = 0$ sunt perpendiculare.
4. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 3)$ și e paralelă cu dreapta $x + 3y = 0$.
5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(2, 3)$ și e perpendiculară pe dreapta $y = 2x + 5$.
6. Se dau punctele $A(1, 3)$, $B(5, 1)$. Să se determine dreapta care trece prin mijlocul segmentului AB și e perpendiculară pe dreapta $x + 2y - 3 = 0$.
7. Se consideră triunghiul de vârfuri $A(2, 4)$, $B(3, -1)$ și $C(1, 5)$. Să se scrie ecuația mediatoarei laturii BC . (Ind. Mediatoarea unui segment este perpendiculara pe acel segment dusă prin mijlocul acestuia.)

2.3 Împărțirea planului în regiuni

Considerăm pentru început o dreaptă (d) de ecuație $y = mx + n$ cu $m > 0$. Ea va împărți planul în trei zone: punctele de sub dreaptă regiunea I, punctele de pe dreaptă zona II și cele de deasupra dreptei zona III. Considerăm în plus și dreapta $x = x_0$, x_0 oarecare. Observăm că un punct $M_1(x_0, y_1)$ de pe această dreaptă situat în regiunea I are ordonata y_1 mai mică decât ordonata dată de $y_2 = mx_0 + n$ deci $y_1 < mx_0 + n$ iar un punct $M_3(x_0, y_3)$ satisface inegalitatea $y_3 > y_2$. Constatăm astfel că toate punctele $M(a, b)$ din zona I satisfac inegalitatea $b < ma + n$, cele de pe dreapta (d) satisfac egalitatea $b = ma + n$ iar cele din zona III satisfac toate inegalitatea $b > ma + n$. Dacă luăm acum cazul în care $m < 0$ vom obține rezultate similare cu diferența că inegalitățile sunt inversate.

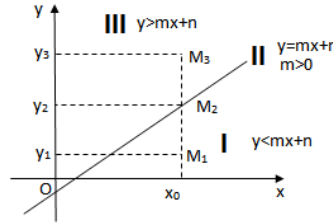


Fig. 2.10: Împărțirea planului în regiuni

Se desprinde însă o concluzie generală:

O dreaptă împarte planul în trei zone: sub dreaptă zona I, pe dreaptă zona II, deasupra dreptei zona III.

Toate punctele din zona I satisfac o anumită inegalitate, toate punctele din zona III satisfac inegalitatea pe dos iar punctele din zona II satisfac egalitatea dată de ecuația dreptei.

Pentru a determina ce inegalitate este satisfăcută într-o zonă se alege un punct ale cărui coordonate sunt cunoscute și se înlocuiesc aceste coordonate în ecuația dreptei. Inegalitatea obținută este inegalitatea satisfăcută de toate punctele din zonă.

Observația 2.1. *Cazul dreptelor de forma $x = a$ se tratează similar înlocuind noțiunile de sus și jos cu stânga și dreapta.*

Putem acum determina poziția a două puncte $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ față de o dreaptă (d) dată de ecuația $ax + by + c = 0$. Determinăm

semnul expresiei

$$(ax_1 + by_1 + c)(ax_2 + by_2 + c). \quad (2.26)$$

Dacă expresia este pozitivă atunci cele două puncte se află de aceeași parte a dreptei iar dacă expresia este negativă cele două puncte sunt de o parte și de alta a dreptei.

Exerciții:

1. Considerăm dreapta $y = 3x + 5$. Determinați dacă punctele $A(1, 3)$ și $B(-2, 4)$ sunt de aceeași parte a dreptei.
2. Determinați valorile lui α astfel încât punctele $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ să fie de o parte și alta a dreptei $y = \alpha x + 3$. (Ind. Folosim expresia 2.26 și determinăm valorile lui α astfel încât expresia să fie negativă.)

2.3.1 Rezolvarea grafică a sistemelor de două inecuații liniare

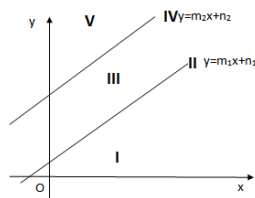


Fig. 2.11: Împărțirea planului în regiuni cu două drepte paralele de pantă pozitivă

Considerăm dreptele $(d_1) : y = m_1x + n_1$ și $(d_2) : y = m_2x + n_2$. Pentru început studiem cazul în care cele două drepte sunt paralele deci $m_1 = m_2$. Trasăm graficele celor două drepte. Cele două grafice împart planul în cinci zone după cum se vede în figura 2.11. Dacă $m_1 > 0$ în cele cinci zone sunt îndeplinite simultan condițiile din tabelul următor:

$m_1 > 0$	(d_1)	(d_2)
I	$y < m_1x + n_1$	$y < m_1x + n_2$
II	$y = m_1x + n_1$	$y < m_1x + n_2$
III	$y > m_1x + n_1$	$y < m_1x + n_2$
IV	$y > m_1x + n_1$	$y = m_1x + n_2$
V	$y > m_1x + n_1$	$y > m_1x + n_2$

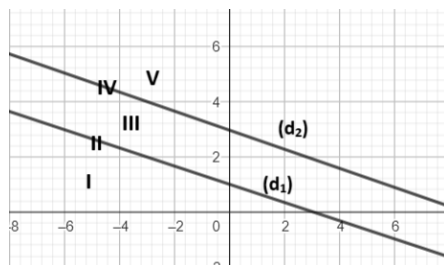


Fig. 2.12: Împărțirea planului în regiuni cu două drepte paralele de pantă negativă

Pentru $m_1 < 0$ cu notarea zonelor pornind de la I sub dreapta (d_1) tabelul arată astfel:

$m_1 < 0$	(d_1)	(d_2)
I	$y < m_1x + n_1$	$y < m_1x + n_2$
II	$y = m_1x + n_1$	$y < m_1x + n_2$
III	$y > m_1x + n_1$	$y < m_1x + n_2$
IV	$y > m_1x + n_1$	$y = m_1x + n_2$
V	$y > m_1x + n_1$	$y > m_1x + n_2$

Rezolvarea unui sistem liniar de două inecuații liniare generate de două drepte paralele se reduce la desenarea graficelor și alegerea zonelor corespunzătoare din tabelul asociat semnului lui m_1 .

Dacă dreptele nu sunt paralele distingem trei cazuri și anume

1. Cele două drepte au pantele pozitive $m_1 > 0$, $m_2 > 0$. Împărțirea planului în zone și tabelul cu inegalitățile corespunzătoare sunt prezentate în continuare:

Niciuna dintre zonele I,...,VIII din figura 2.13 nu conține punctul A.

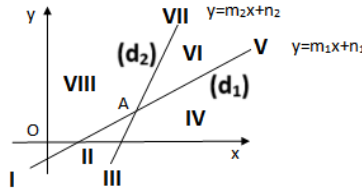


Fig. 2.13: Împărțirea planului în regiuni, două drepte, pante pozitive $m_1 < m_2$.

	(d_1)	(d_2)
I	$y = m_1x + n_1$	$y > m_2x + n_2$
II	$y < m_1x + n_1$	$y > m_2x + n_2$
III	$y < m_1x + n_1$	$y = m_2x + n_2$
IV	$y < m_1x + n_1$	$y < m_2x + n_2$
V	$y = m_1x + n_1$	$y < m_2x + n_2$
VI	$y > m_1x + n_1$	$y < m_2x + n_2$
VII	$y > m_1x + n_1$	$y = m_2x + n_2$
VIII	$y > m_1x + n_1$	$y > m_2x + n_2$
A	$y = m_1x + n_1$	$y = m_2x + n_2$

Exemplu

Să se determine soluția sistemului de inecuații liniare

$$\begin{cases} y \geq 2x + 1 \\ -6x + 2y - 3 < 0 \end{cases}$$

Observăm că în figura 2.13 dreapta (d_1) are panta mai mică decât dreapta (d_2) . Rescriem cea de a doua inecuație $2y < 6x + 3$ și împărțim la 2 aducând inecuația la forma $y < 3x + 3/2$. Vom considera atunci dreptele următoare (d_1) : $y = 2x + 1$ și (d_2) : $y = 3x + \frac{3}{2}$. Prima dreaptă satisface inecuația în zonele I; V; VI; VII; VIII, A, iar cea de a doua inegalitate este satisfăcută în zonele IV; V; VI. Alegem zonele comune din cele două soluții și, în consecință, soluția sistemului va fi dată de zonele V și VI.

2. Dreapta (d_1) are pantă pozitivă iar (d_2) are pantă negativă. Împărțirea planului în zone și tabelul cu inegalitățile corespunzătoare sunt prezentate în continuare:

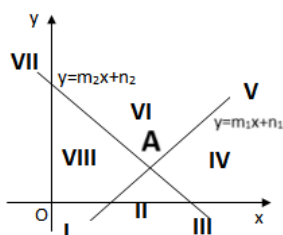


Fig. 2.14: Împărțirea planului în regiuni, două drepte cu pante de semne diferite

Niciuna dintre zonele I,...,VIII din figura 2.14 nu conține punctul A.

	(d_1)	(d_2)
I	$y = m_1x + n_1$	$y < m_2x + n_2$
II	$y < m_1x + n_1$	$y < m_2x + n_2$
III	$y < m_1x + n_1$	$y = m_2x + n_2$
IV	$y < m_1x + n_1$	$y > m_2x + n_2$
V	$y = m_1x + n_1$	$y > m_2x + n_2$
VI	$y > m_1x + n_1$	$y > m_2x + n_2$
VII	$y > m_1x + n_1$	$y = m_2x + n_2$
VIII	$y > m_1x + n_1$	$y < m_2x + n_2$
A	$y = m_1x + n_1$	$y = m_2x + n_2$

Exemplu

Să se determine soluția sistemului de inecuații liniare

$$\begin{cases} y \geq -4x + 1 \\ y - 3x + 2 < 0 \end{cases}$$

Figura 2.14 și tabelul corespunzător ei sunt alcătuite pentru dreapta (d_1) cu pantă pozitivă și (d_2) cu panta negativă. Pentru a folosi direct tabelul la rezolvare va trebui să considerăm dreapta (d_1) : $y = 3x - 2$ și (d_2) : $y = -4x + 1$ Prima dreaptă satisface inegalitatea din enunț în zonele II, III, IV, iar dreapta a doua satisface inegalitatea din enunț în zonele III, IV, V, VI, VII și în punctul A. Ambele inecuații sunt satisfăcute în zonele III și IV.

3. Cazul în care cele două drepte au amândouă pantele negative îl lăsam ca exercițiu.

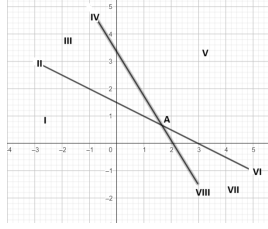


Fig. 2.15: Împărțirea planului în regiuni, două drepte cu pante negative

2.3.2 Rezolvarea geometrică a sistemelor liniare de două ecuații cu două necunoscute

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (2.27)$$

Având în vedere că cele două ecuații reprezintă din punct de vedere geometric ecuațiile unor drepte în plan, putem decide prin condiții geometrice natura soluțiilor sistemului 2.27 și anume:

1. Dacă cele două drepte au pante diferite atunci intersecția lor este un punct $M_0(x_0, y_0)$ care se află simultan pe cele două drepte. Acest lucru înseamnă că $a_1x_0 + b_1y_0 \equiv c_1$ și în același timp $a_2x_0 + b_2y_0 \equiv c_2$ deci x_0, y_0 este soluție a sistemului și este singura soluție. Pantele celor două drepte sunt $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ și $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$. Utilizând aceleși calcule ca pentru obținerea formulei 2.19 vom obține condiția ca cele două pante să fie diferite și anume

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

Această relație poate fi rescrisă astfel:

$$a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \quad (2.28)$$

Reamintim formula de calcul al unui determinant de ordinul al doilea

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix} = ps - rq \quad (2.29)$$

Atunci, relația 2.28 este echivalentă cu faptul că determinantul format cu coeficienții lui x și y din cele două ecuații este diferit

de zero. În concluzie, sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ este compatibil determinat } \Leftrightarrow$$

cele două drepte au pante diferite $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (2.30)$$

2. Dacă cele două drepte sunt strict paralele atunci nu există niciun punct care să satisfacă simultan cele doua ecuații. Spunem că sistemul este incompatibil. Condiția algebrică este în acest caz:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ este incompatibil (nu are soluție) } \Leftrightarrow$$

cele două drepte au aceeași pantă și intersecții la Oy diferite $\Leftrightarrow$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad (2.31)$$

3. În cazul în care cele două drepte sunt confundate orice punct de pe prima dreaptă este și pe cea de a doua dreaptă și reciproc. Cele două ecuații reprezintă de fapt aceeași dreaptă, iar ecuația unei drepte este dată de exprimarea unei variabile în funcție de cealaltă variabilă. Avem astfel o singură nedeterminare. Sistemul considerat are o infinitate de soluții. Spunem că el este compatibil unu nedeterminat.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ este compatibil unu nedeterminat } \Leftrightarrow$$

$$\text{cele două drepte sunt confundate} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$

Exerciții

1. Motivați faptul că următorul sistem are soluție unică $\begin{cases} 3x - 2y = 7 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$
2. Motivați faptul că următorul sistem este incompatibil $\begin{cases} x - 2y = 7 \\ 2x - 4y = 1 \end{cases}$
3. Motivați că următorul sistem este compatibil nedeterminat $\begin{cases} 2x - 4y = 6 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$

4. Determinați valorile parametrului α astfel încât următorul sistem să fie compatibil determinat $\begin{cases} 2x - \alpha y = 5 \\ x + y = 2 \end{cases}$
5. Pentru ce valori ale parametrilor α și β sistemul următor este compatibil unu nedeterminat $\begin{cases} 4x - \alpha y = 3 \\ \beta x + 2y = 5 \end{cases}$
6. Determinați parametrii α și β astfel încât următorul sistem să fie incompatibil $\begin{cases} \alpha x - y = 4 \\ 2x + 3y = \beta \end{cases}$
7. Să rezolve și să se discute după valorile parametrului $\alpha \in \mathbb{R}$ următorul sistem $\begin{cases} x - 2\alpha y = 7 \\ 3x + y = 2 \end{cases}$

2.4 Cercul

Definiția 2.1. *Se numeste cerc locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de un punct fix numit centrul cercului. Segmentul de dreaptă care unește centrul cercului cu un punct de pe cerc se numește raza cercului.*

2.4.1 Diverse forme ale ecuației unui cerc

1. Ecuația cercului centrat în originea sistemului de coordonate și de rază r :

$$(C_{O,r}) : \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

2. Ecuația cercului centrat în punctul de coordonate $M(a, b)$ și de rază r :

$$(C_{M(a,b),r}) : \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

3. Ecuațiile parametrice ale cercului centrat în origine și de rază r :

$$\begin{cases} x = r \cos(\theta) \\ y = r \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

4. Ecuațiile parametrice ale cercului centrat în $M(a, b)$ și de rază r :

$$\begin{cases} x = a + r \cos(\theta) \\ y = b + r \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Ținând cont de formulele

$$\sin(\theta) = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}, \quad \cos(\theta) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

și notând pe $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ cu t obținem ecuațiile parametrice ale cercului

$$\begin{cases} x = a + r \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = b + r \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observație: Pentru t negativ se obțin punctele cercului aflate sub diametrul paralel cu Ox , iar pentru t pozitiv punctele de deasupra acelui diametru.

5. Ecuația vectorială a cercului de centru C și rază r :

$$(\vec{\mathcal{R}} - \vec{\mathcal{R}}_C)^2 = r^2$$

unde $\vec{\mathcal{R}}$ este vectorul de poziție al unui punct curent de pe cerc, iar $\vec{\mathcal{R}}_C$ este vectorul de poziție al centrului cercului.

6. Ecuația cercului $(\mathcal{C}_{C(a,b),r})$ în coordonate polare:

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2\rho\rho_1 \cos(\theta - \theta_1) + \rho_1^2 - r^2 &= 0 \quad \text{sau} \\ \rho^2 &= (a \sin(\theta) + b \cos(\theta))\rho + c \end{aligned}$$

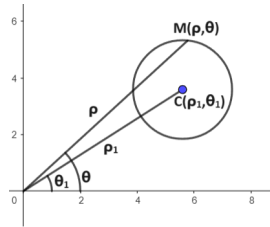


Fig. 2.16: Ecuația generală a unui cerc în coordonate polare

unde ρ , θ sunt coordonatele polare ale unui punct de pe cerc iar a, b, c sunt constante ce depind de ρ_1, θ_1 coordonatele polare ale centrului cercului.

$$a = 2\rho_1 \cos(\theta_1), \quad b = 2\rho_1 \sin(\theta_1), \quad c = r^2 - \rho_1^2.$$

7. Ecuația generală a unui cerc este:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

Pentru a determina tipul cercului, centrul său și raza formăm pătrate perfecte

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 + c - a^2 - b^2 = 0$$

sau

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2 - c \quad (2.32)$$

Dacă $a^2 + b^2 - c$ este pozitiv avem un cerc real de centru $C(a, b)$ și de rază $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

Dacă $a^2 + b^2 - c = 0$ cercul se reduce la punctul $M(a, b)$.

Pentru $a^2 + b^2 - c < 0$ cercul este unul imaginar.

Exemple:

1. Ecuația cercului centrat în origine și de rază 3 este $x^2 + y^2 = 9$
2. Cercul centrat în $C(0, -1)$ și de rază 2 este $x^2 + (y + 1)^2 = 4$.
3. Ecuațiile parametrice ale unui cerc centrat în $C(1, 2)$ și de raza 3 sunt:

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \cos(\theta) \\ y = 2 + 3 \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

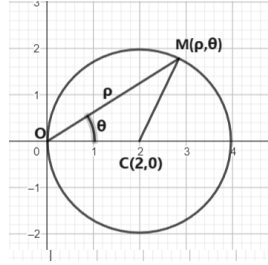
sau

$$\begin{cases} x = 1 + 3 \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ y = 2 + 3 \frac{2t}{1 + t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

4. Ecuația vectorială a cercului centrat în punctul $C(-2, 1)$ și de rază 4 este $(\vec{R} - \vec{R}_C)^2 = 16$. Dar $\vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j}$ și $\vec{R}_C = a\vec{i} + b\vec{j} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Dacă se fac înlocuirile în formula vectorială generală și se ține cont că $(\vec{R} - \vec{R}_C)^2$ este produsul scalar $(\vec{R} - \vec{R}_C) \cdot (\vec{R} - \vec{R}_C)$. Efectuând calculele se obține ecuația carteziană a cercului.
5. Să se scrie ecuația în coordonate polare a cercului centrat în origine și de rază 2.
Coordonatele punctului M de pe cerc sunt $x = 2 \cos \theta$, $y = 2 \sin \theta$, iar $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2^2(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))} = 2$. Deci, ecuația în coordonate polare a cercului centrat în origine și de rază r este

$$\rho = 2.$$

6. Să se deducă ecuația polară a cercului centrat în $C(2,0)$ și de rază 2. Fie triunghiul OCM în care știm $|OC| = 2$, $|CM| = 2$,



$|OM| = \rho$, unghiul $\widehat{COM} = \theta$. Scriem teorema cosinusului și avem

$$|CM|^2 = |OM|^2 + |OC|^2 - 2|OM||OC|\cos(\theta)$$

După înlocuire obținem

$$4 = \rho^2 + 4 - 2 \cdot 2\rho \cos(\theta)$$

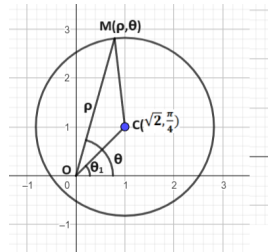
Adică

$$\rho^2 = 4\rho \cos(\theta)$$

De aici, simplificând cu ρ obținem ecuația polară a cercului ca fiind

$$\rho = 4 \cos(\theta).$$

7. Să se determine ecuația polară a cercului cu centrul de coordonate polare $C\left(\rho_1 = \sqrt{2}, \theta_1 = \frac{\pi}{4}\right)$ și de rază $\sqrt{3}$. Scriem teorema



cosinusului pentru segmentul CM .

$$|CM|^2 = |OM|^2 + |OC|^2 - 2|OM||OC|\cos(\theta - \theta_1)$$

Înlocuind $|CM| = \sqrt{3}$, $|OC| = \sqrt{2}$, $|OM| = \rho$, $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$ avem:

$$3 = \rho^2 + 2 - 2 \cdot \sqrt{2}\rho \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$

$$1 = \rho^2 - 2\sqrt{2}\rho \left(\cos(\theta) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(\theta) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$1 = \rho^2 - 2\sqrt{2}\rho \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\theta) + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin(\theta)\right)$$

Efectuând înmulțirile și rearanjând termenii obținem ecuația polară a cercului

$$\rho^2 = 2\rho(\cos(\theta) + \sin(\theta)) + 1.$$

8. Să se determine tipul, centrul și raza cercului $x^2 + y^2 + 4x - 3y + \frac{1}{4} = 0$. Identificăm ecuația noastră cu ecuația 2.32. Pentru $a = -2$, $b = \frac{3}{2}$, $c = \frac{1}{4}$, deci $a^2 + b^2 - c = 6 > 0$. Rezultă că avem un cerc real, de centru $C\left(-2, \frac{3}{2}\right)$ și de rază $r = \sqrt{6}$.

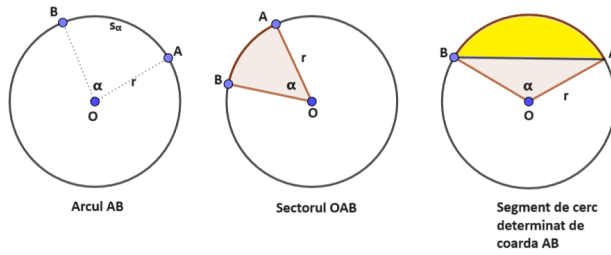
2.4.2 Lungimea unui arc de cerc, aria cercului, aria sectorului și a segmentului de cerc

În continuare vom studia niște noțiuni legate de cerc care sunt independente de poziția centrului cercului.

1. Lungimea unui cerc de rază r este $l_C = 2\pi r$.
2. Aria unui cerc de rază r este $\mathcal{A}_C = \pi r^2$.
3. Considerăm un cerc de rază r și două puncte A, B situate pe cerc. Numim arc de cerc $\widehat{AB}$ porțiunea din cerc subîntinsă de unghiul la centru $\widehat{AOB}$. Mărima unghiului $\widehat{AOB}$ o măsurăm în radiani. Reamintim că un radian este corespunzător unghiului la centru care subîntinde un arc de cerc de lungime egală cu raza cercului. Atunci lungimea unui arc de cerc corespunzător unui unghi de α radiani este :

$$s_{\widehat{AB}} = s_\alpha = \alpha r.$$

Aria unui sector de cerc de rază r și unghi la centru α exprimat



în radiani este:

$$\mathcal{A}_{OAB} = \frac{\alpha r^2}{2}$$

Pentru segmentul de cerc determinat de coarda AB subîntinsă de un unghi α și arcul de cerc corespunzător putem preciza mai multe relații. În primul rând, aria segmentului este dată de aria sectorului minus aria triunghiului AOB . Aria triunghiului AOB este $\frac{r^2 \sin(\alpha)}{2}$ deci

$$\mathcal{A}_{AB,\alpha} = \frac{\alpha r^2 - r^2 \sin(\alpha)}{2} = \frac{r^2(\alpha - \sin(\alpha))}{2}$$

4. În cazul unui segment de cerc sunt utile formulele prin care putem determina raza cercului pornind de la lungimea l a corzii care delimitează segmentul și înălțimea h a segmentului. Înălțimea segmentului este diferența dintre raza cercului și distanța d de la centrul cercului la coardă.

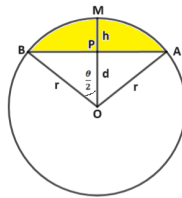


Fig. 2.17: segment de cerc

În triunghiul OPA scriem teorema lui Pitagora și avem

$$r^2 = d^2 + \frac{l^2}{4}, \quad \text{dar } d^2 = (r - h)^2 = r^2 - 2rh + h^2$$

Rezultă

$$r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + \frac{l^2}{4}$$

Reducem termenii asemenea, trecem $2rh$ în membrul stâng și exprimăm pe r .

$$2rh = h^2 + \frac{l^2}{4} \Rightarrow r = \frac{h}{2} + \frac{l^2}{8h}$$

Pentru a determina unghiul la centru θ considerăm triunghiul drept-unghic OPA în care avem $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{|PA|}{|OA|}$. Dar $|PA| = \frac{c}{2}$ și $|OA| = r$. Rezultă

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{c}{2r} \Rightarrow \theta = 2 \arcsin\left(\frac{c}{2r}\right)$$

2.4.3 Ecuatiile tangentelor la cerc

1. **Tangenta într-un punct $M(x_0, y_0)$ de pe cerc** se obține din ecuația cercului prin dedublare. Regulile de dedublare sunt:

$$x^2 \rightarrow xx_0, \quad y^2 \rightarrow yy_0, \quad x \rightarrow \frac{x+x_0}{2}, \quad y \rightarrow \frac{y+y_0}{2}$$

restul elementelor din ecuație rămânând neschimbate.

Fie cercul $(\mathcal{C}_{(a,b),r}) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ și punctul $M(x_0, y_0)$ situat pe cercul dat. Putem scrie direct ecuația tangentei în M

$$(x-a)(x_0-a) + (y-b)(y_0-b) = r^2 \quad (2.33)$$

Pentru a scrie ecuația tangentei într-un punct la cerc putem pleca și de la ecuația generală a cercului și să aplicăm procedeul de dedublare. Astfel:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \rightarrow$$

$$xx_0 + yy_0 - 2a\frac{x+x_0}{2} - 2b\frac{y+y_0}{2} + c = 0.$$

Obținem, evident, aceeași ecuație ca 2.33.

2. **Ecuatiile tangentelor dintr-un punct exterior $M(x_0, y_0)$** duse la cercul $(\mathcal{C}(x, y)) : x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ sunt date de ecuațiile

$$y - y_0 = m_1(x - x_0) \quad \text{și} \quad y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

unde m_1 și m_2 sunt soluțiile ecuației

$$[(x_0 - a) + m(y_0 - b)]^2 = (1 + m^2)\mathcal{C}(x_0, y_0) \quad (2.34)$$

Notățiile folosite sunt m pentru panta tangentei, m_1, m_2 pantele tangentelor din $M(x_0, y_0)$ la cerc, $\mathcal{C}(x_0, y_0)$ este valoarea obținută înlocuind x, y din ecuația cercului cu x_0, y_0 .

Ecuația 2.34 are două soluții reale dacă $\mathcal{C}(x_0, y_0) > 0$.

În cazul în care $\mathcal{C}(x_0, y_0) = 0$ punctul M se află pe cerc și ecuația 2.33 are soluție dublă

$$m = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

Dacă $\mathcal{C}(x_0, y_0) < 0$ atunci punctul M este în interiorul cercului și nu se pot duce tangente la cerc din M .

Exemple:

1. Considerăm cercul $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - 4x + 3y + 6 = 0$ și punctul $M(2, 1)$. Să se scrie ecuațiile tangentei din M la cercul dat. Avem

$$a = 2, \quad b = -\frac{3}{2}, \quad c = 6, \quad \mathcal{C}(2, 1) = 4 + 1 - 8 + 3 + 6 = 6$$

Ecuația 2.33 devine

$$\left[(2 - 2) + m \left(1 + \frac{3}{2} \right) \right]^2 = (1 + m^2) \cdot 6$$

deci

$$\left(\frac{5}{2}m \right)^2 = 6 + 6m^2, \quad \text{adică} \quad \frac{25}{4}m^2 = 6 + 6m^2$$

de unde obținem

$$m^2 = 24 \quad \Rightarrow \quad m = \pm\sqrt{24}$$

Ecuațiile tangentelor vor fi

$$y - 1 = \pm\sqrt{24}(x - 2).$$

2. Să se determine ecuațiile tangentelor duse din punctul $M(6, 3)$ la cercul $\mathcal{C}(x, y)$: $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$.

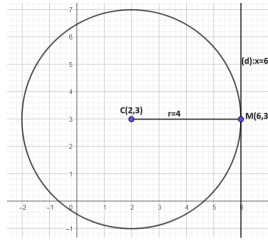
Avem :

$$a = 2, \quad b = 3, \quad c = -3, \quad r = 4, \quad \mathcal{C}(x_0, y_0) = \mathcal{C}(6, 3) = 0$$

Punctul M se găsește pe cerc deci vom avea o singură tangentă în punctul $M(6, 3)$ de pantă

$$m = -\frac{x_0 - a}{y_0 - b}$$

Cum $y_0 - b = 0$ rezultă că tangenta în M este paralelă cu axa Oy și are ecuația $(d) : x = 6$.



3. **Tangentele de pantă m la cercul $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$** sunt date de ecuațiile:

$$y - b = m(x - a) \pm r\sqrt{1 + m^2}. \quad (2.35)$$

Exemplu:

Să se determine tangentele de pantă $m = 1$ duse la cercul

$$4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y - 59 = 0.$$

Aducem cercul la forma canonică pentru a afla raza lui. Împărțim întâi cu 4 și completăm pătratele perfecte.

$$4x^2 + 4y^2 + 8x - 12y - 59 = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 3y = \frac{59}{4}$$

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 3y + \frac{9}{4} = 1 + \frac{9}{4} + \frac{59}{4}$$

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 18$$

Rezultă $a = -1$, $b = \frac{3}{2}$, $r^2 = 18$. Cercul va avea în consecință centrul în punctul $C\left(-1, \frac{3}{2}\right)$ și raza $r = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Ecuațiile tangentelor sunt date de 2.35 și vor fi:

$$y - \frac{3}{2} = 1 \cdot (x + 1) \pm 3\sqrt{2}\sqrt{1 + 1}$$

efectuând calculele obținem:

$$y - \frac{3}{2} = x + 1 \pm 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}, \quad y - \frac{3}{2} = x + 1 \pm 6,$$

deci

$$2y = 2x + 17, \quad 2y = 2x - 7.$$

Putem determina și punctele de tangență rezolvând sistemele

$$(a) : \quad \begin{cases} (x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 \\ 2y = 2x + 17 \end{cases}$$

și

$$(b) : \quad \begin{cases} (x + 1)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 \\ 2y = 2x - 7 \end{cases}$$

Din ecuația a doua, în (a), exprimăm pe y și venim cu aceea expresie în prima ecuație.

$$y = x + \frac{17}{2}; \quad (x + 1)^2 + \left(x + \frac{17}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 \Rightarrow$$

$$(x + 1)^2 + (x + 7)^2 = 18; \Rightarrow 2x^2 + 16x + 32 = 0; \Rightarrow$$

$$x^2 + 8x + 16 = 0, (x + 4)^2 = 0$$

, ecuație care admite rădăcina dublă $x_1 = -4$ de unde rezultă $y_1 = x_1 + \frac{17}{2}$ adică $y_1 = \frac{9}{2}$. Primul punct de tangență va fi $M_1\left(-4, \frac{9}{2}\right)$. Din ecuația a doua, în (b), exprimăm pe y și venim cu aceea expresie în prima ecuație.

$$y = x - \frac{7}{2}; \quad (x + 1)^2 + \left(x - \frac{7}{2} - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 \Rightarrow$$

$$(x + 1)^2 + (x - 5)^2 = 18; \Rightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0; \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0,$$

$(x-2)^2 = 0$, ecuație care admite rădăcina dublă $x_2 = 2$, de unde avem $y_2 = x_2 - \frac{7}{2}$ adică $y_2 = -\frac{3}{2}$. Celălalt punct de tangență va fi $M_2 \left(2, -\frac{3}{2}\right)$.

Secvența MATLAB pentru determinarea primului punct de tangență (rezolvarea sistemului (a)) este

```
>> syms x y
>> eqs = [4 * x^2 + 4 * y^2 + 8 * x - 12 * y - 59 == 0,
2 * x - 2 * y + 17 == 0];
>> vars = [x, y];
>> [sx, sy] = solve(eqs, vars)
sx =
-4
sy =
9/2
```

Comentariu: sx este soluție dublă pentru x și sy este soluția pentru y

Pentru sistemul (b) avem secvența de program

```
>> syms x y
>> eqs = [4 * x^2 + 4 * y^2 + 8 * x - 12 * y - 59 == 0,
2 * x - 2 * y - 7 == 0];
>> vars = [x, y];
>> [sx, sy] = solve(eqs, vars)
sx =
2
sy =
-3/2
```

Comentariu: Sistemul are soluția dublă $x = 2$ și $y = -\frac{3}{2}$.

2.5 Conice pe formă redusă

Se numește conică o curbă plană care satisface ecuația

$$f(x, y) : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

E de menționat că nu numai elipsele, hiperbolele și parabolele respectă o astfel de ecuație. În funcție de coeficienți, dacă ecuația poate fi descompusă în

$$(a_1x + b_1y + c_1)(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

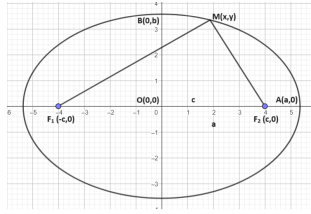
atunci ea reprezintă două drepte. Mai mult, există posibilitatea ca aceeași ecuație să reprezinte o curbă imaginară. Curbele reale mențio-

nate mai sus (elipsa, hiperbola, parabola sau cele două drepte) se pot obține din intersecția unei suprafețe conice de rotație cu un plan. acesta este motivul pentru care ele se numesc conice. Dacă conicele sunt raportate la axe de coordonate forma ecuației pentru fiecare dintre ele se simplifică foarte mult. În acest caz spunem că avem de a face cu conice pe formă redusă.

2.5.1 Elipsa

Definiția 2.2. Considerăm în plan două puncte $F_1(-c, 0)$ și $F_2(c, 0)$, $c > 0$ și o mărime $a > c$. Numim elipsă locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan pentru care este îndeplinită relația

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a$$



Punctele $A(a, 0)$, $B(0, b)$ și simetricele lor față de originea sistemului de coordonate se numesc vârfurile elipsei, segmentul OA este semiaxa mare iar segmentul OB , cu $|OB| = b < a$, $b^2 + c^2 = a^2$, se numește semiaxa mică. Raportul $e = \frac{c}{a}$ poartă numele de excentricitatea elipsei ($e < 1$). Dacă sunt date a și e putem afla $c = ae$ și $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Dreapta determinată de cele două focare se numește axă focală.

Ecuția carteziană implicită a elipsei raportată la axe

Ecuția elipsei raportată la axe este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ecuțiile parametrice ale elipsei

Considerăm o elipsă raportată la axe. Fie O originea sistemului de coordonate, un punct variabil $M(x, y)$ situat pe elipsă și θ unghiul

$\widehat{AOM}$. Ecuatiile parametrice ale elipsei vor fi

$$\begin{cases} x = a \cos(\theta) \\ y = b \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [0, 2\pi)$$

Ca și în cazul cercului, folosind tangenta unghiului pe jumătate și notând $\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = t$ obținem ecuațiile parametrice

$$\begin{cases} x = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y = \frac{2bt}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Ecuția polară a elipsei

Considerăm o elipsă raportată la axe cu focarele $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ polul în raport cu care scriem ecuațiile polare îl luăm în F_1 , sensul pozitiv al axei polare îl luăm în sensul pozitiv al axei Ox și fie $M(\rho, \theta)$ un punct pe elipsă. Dacă notăm cu p raportul $p = \frac{b^2}{a}$ atunci ecuația polară a elipsei este:

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\theta)}.$$

Tangenta și normala la elipsă duse într-un punct al ei

Ecuția tangentei dusă într-un punct al elipsei raportate la axe se obține prin dedublare. Dacă avem elipsa $(\mathcal{E})$: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ și $M(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ ecuația tangentei este:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1 \quad (2.36)$$

Considerăm tangenta la elipsă în punctul $M(x_0, y_0)$. Numim **normală în punctul** $M(x_0, y_0)$ dreapta care trece prin M și este perpendiculară pe tangenta în M . Ecuția normalei în $M(x_0, y_0)$ este

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0). \quad (2.37)$$

Tangente la elipsă de pantă dată și tangente dintr-un punct exterior

1. - Ecuațiile tangentelor de pantă m duse la elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sunt

$$\begin{aligned} y &= mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \\ y &= mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2} \end{aligned} \quad (2.38)$$

2. - Ecuațiile tangentelor din punctul exterior $M(x_0, y_0)$ la elipsă sunt

$$y - y_0 = m_1(x - x_0); \quad y - y_0 = m_2(x - x_0);$$

unde m_1, m_2 sunt soluțiile ecuației

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2mx_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0 \quad (2.39)$$

Observația 2.2. Dacă ecuația 2.39 are două soluții reale, punctul M este exterior elipsei și avem două tangente, dacă ecuația are soluție dublă, punctul M este pe elipsă și avem o singură tangentă iar pentru cazul soluțiilor complexe punctul M este interior elipsei și nu avem tangente.

Dreptele directoare ale elipsei

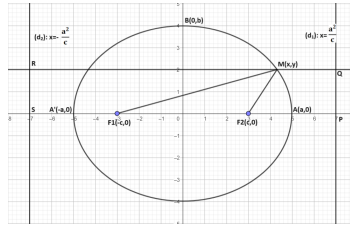


Fig. 2.18: Dreptele directoare ale unei elipse raportată la axe

Considerăm elipsa raportată la axe $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cu focarele $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, semiaxa mare $|OA| = a$, dreptele $(d_1) : x = \frac{a^2}{c}$, $(d_2) : x = -\frac{a^2}{c}$ și punctul $M(x, y)$ pe elipsă. Dreapta (d_1) taie axa focală în S și paralela la axa focală dusă prin M în R iar (d_2) taie axa focală în P și paralela prin M la axa focală în Q .

Teorema 2.1. *Oricare ar fi poziția punctului M pe elipsă avem îndeplinite relațiile*

$$\frac{|MQ|}{|MF_2|} = \frac{c}{a} = e < 1; \quad \frac{|MR|}{|MF_1|} = \frac{c}{a} = e < 1;$$

Dreptele (d_1) și (d_2) se numesc drepte directoare ale elipsei. Astfel, elipsa poate fi definită și ca locul geometric al punctelor din plan pentru care raportul distanțelor lor la un punct fix și la o dreaptă fixă este constant, egal cu excentricitatea și mai mic decât 1.

Proprietatea optică a elipsei

1. O rază de lumină care pornește dintr-un focar al elipsei se reflectă din elipsă în celălalt focar.

Raza reflectată se obține astfel. Se trasează raza care pleacă din focarul F_1 , să zicem. Ea intersectează elipsa într-un punct M . În M se duc tangenta și normala la elipsă. Simetrica razei față de normală este raza reflectată din elipsă. Această dreaptă trece prin celălalt focar.

Observația 2.3. *În cazul în care în ecuația elipsei raportată la axe avem $b > a$ atunci axa focală este Oy și*

$$c = \sqrt{b^2 - a^2}; \quad F_1(0, -b); \quad F_2(0, b); \quad \text{directoarele sunt } y = \pm \frac{b^2}{c}$$

$$\text{excentricitatea este } e = \frac{c}{b}, \quad \text{parametrul elipsei } p = \frac{a^2}{b}$$

Exerciții:

1. Considerăm elipsa $4x^2 + 9y^2 = 36$. Să se determine vârfurile, focarele, axa focală, distanța focală, excentricitatea, dreptele directoare, tangenta și normala în punctul $M\left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$, tangentele la elipsă paralele cu prima bisectoare, tangentele la elipsă duse din punctul $M_1(2, 3)$.

Soluție 1 : *Observăm că putem obține ecuația elipsei sub forma redusă dacă împărțim ecuația dată cu 36. Avem astfel:*

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

De aici avem:

$$a = 3, \quad b = 2, \quad \text{axa focală este } Ox, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}.$$

Vârfurile sunt $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$, $B(0, 2)$, $B'(0, -2)$.

Focarele, distanța focală, excentricitatea și dreptele directoare vor fi

$$F_1(-\sqrt{5}, 0), \quad F_2(\sqrt{5}, 0), \quad |F_1F_2| = 2\sqrt{5},$$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3},$$

$$(d_1): x = -\frac{9\sqrt{5}}{5}, \quad (d_2): x = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Tangenta și normala în $M\left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$ au ecuațiile date de 2.36 și 2.37:

$$\text{Tangenta} \quad (d_3): \quad \frac{x}{9} + \frac{y\sqrt{2}}{3} = 1.$$

$$\text{Normala} \quad (d_4) \quad y - \frac{4\sqrt{2}}{3} = 3\sqrt{2}(x - 1).$$

Ecuațiile tangentelor paralele cu prima bisectoare le obținem din ecuația 2.38 ținând cont că prima bisectoare are panta $m=1$.

$$(d_5): \quad y = x + \sqrt{13}, \quad (d_6) \quad y = x - \sqrt{13}.$$

Pantele tangentelor din $M(2, 3)$ sunt date de ecuația 2.39 și sunt

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2x_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0 \quad \rightarrow \quad 5m^2 + 12m - 5 = 0$$

de unde

$$m_1 = -6 + \sqrt{61}, \quad m_2 = -6 - \sqrt{61}.$$

Ecuațiile tangentelor vor fi

$$y - 3 = (-6 + \sqrt{61})(x - 2), \quad y - 3 = (-6 - \sqrt{61})(x - 2).$$

2. Studiem acum cazul în care axa focală este Oy . Formulele se schimbă în acest caz corespunzător observației 2.3..

Fie elipsa $9x^2 + 4y^2 = 36$. Să se determine vârfurile, focarele, axa

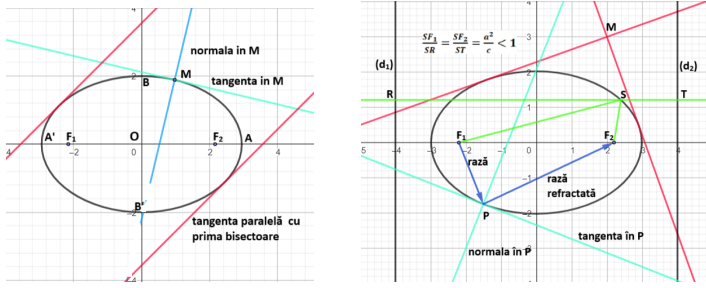


Fig. 2.19: Elementele elipsei, tangenta și normala într-un punct, tangentele paralele cu o direcție dată, dreptele directoare, tangenta dintr-un punct exterior, proprietatea optică a elipsei

focală, distanța focală, excentricitatea, dreptele directoare tangenta și normala în punctul $M\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$, tangentele la elipsă paralele cu prima bisectoare, tangentele la elipsă duse din punctul $M_1(2, 3)$.

Soluție 2 : Observăm că ecuația elipsei sub forma redusă o putem obține împărțind ecuația dată cu 36. Avem astfel

$$9x^2 + 4y^2 = 36 \quad | : 36 \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

De aici avem $a = 2$, $b = 3$, $a < b$ de unde rezultă că axa focală este axa Oy . Vârfulurile sunt $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$, $B(0, 3)$, $B'(0, -3)$.

$$c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5}, \quad F_1(0, -\sqrt{5}), \quad F_2(0, \sqrt{5}) \quad |F_1F_2| = 2\sqrt{5}.$$

Pentru că axa focală este Oy excentricitatea este

$$e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Din aceleași motive dreptele directoare vor fi de forma

$$y = \pm \frac{b^2}{c} \quad \text{deci} \quad (d_1): y = -\frac{9\sqrt{5}}{5}, \quad (d_2): y = \frac{9\sqrt{5}}{5}.$$

Tangenta și normala în $M\left(1, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ vor fi date de 2.36 și 2.37:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1; \quad \text{adică} \quad \frac{x}{4} + \frac{y\sqrt{3}}{6} = 1.$$

$$y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0} (x - x_0); \quad \text{deci} \quad y - \frac{3\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} (x - 1)$$

Ecuatiile tangentelor paralele cu prima bisectoare le obținem din 2.38 ținând cont că prima bisectoare are panta $m=1$.

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2} \quad (d_1) : y = x + \sqrt{13}, \quad (d_2) : y = x - \sqrt{13}.$$

Pantele tangentelor din $M(2,3)$ sunt date de ecuația 2.39 și sunt

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2x_0 y_0 m + b^2 - y_0^2 = 0 \quad 12m = 0$$

de unde $m_1 = 0$. Cea de a doua pantă, în acest caz va fi $m_2 = \infty$. Ecuatiile tangentelor sunt

$$y - 3 = 0, \quad 0 = x - 2, \quad \text{adică} \quad y = 3, \quad x = 2.$$

3. Fie elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ cu vârfurile A, A' și un punct $M(x, y)$ situat pe elipsă. Fie $P(x, 0)$ proiecția lui M pe axa focală. Să se arate că

$$\frac{|MP|^2}{|A'P| \cdot |PA|} = \text{constant}.$$

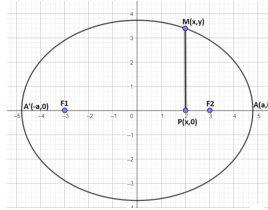


Fig. 2.20: Figura asociată problemei 3

Soluție 3 Segmentul MP are lungimea y , segmentul $A'P$ are lungimea $a + x$ iar segmentul PA are lungimea $a - x$. Atunci

$$\frac{|MP|^2}{|A'P| \cdot |PA|} = \frac{y^2}{(a + x)(a - x)} = \frac{y^2}{a^2 - x^2}$$

Dar $M(x, y)$ aparține elipsei deci putem din ecuația elipsei să îl exprimăm pe y^2 . Avem $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$. Înlocuind în formula 2.20 obținem

$$\frac{|MP|^2}{|A'P| \cdot |PA|} = \frac{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}$$

4. Să se scrie ecuația elipsei raportată la axe care are proprietatea că semi-axa mare este 10 și excentricitatea ei este 0,6.

Soluție 4 Avem $a = 10$, $e = \frac{c}{a} = 0,6$ deci $c = 6$. Rezultă

$$b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 36 = 64.$$

Ecuația elipsei va fi

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

5. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $M(-5, 3)$ la elipsa

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Soluție 5 Ecuația care ne dă pantele tangentelor este

$$m^2(a^2 - x_0^2) + 2x_0y_0 + b^2 - y_0^2 = 0 \quad \text{deci} \quad -9m^2 - 30m = 0$$

$$\text{cu soluțiile} \quad m_1 = 0, \quad m_2 = -\frac{10}{3}.$$

Ecuațiile tangentelor vor fi

$$y - 3 = 0(x + 5), \quad y - 3 = -\frac{10}{3}(x + 5).$$

Deci

$$(d_1) : y = 3, \quad (d_2) : 3y + 10x + 41 = 0.$$

2.5.2 Hiperbola

Considerăm valorile reale c , a , strict pozitive, cu $c > a$ și punctele $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$.

Definiția 2.3. Locul geometric al punctelor $M(x, y)$ din plan care satisfac relația

$$|MF'| - |MF| = 2a$$

se numește hiperbolă.

Definiția 2.4.

1. Punctele F' și F se numesc focarele hiperbolei.

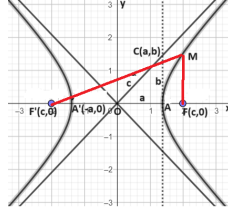


Fig. 2.21: Hiperbola raportată la axe

2. Dreapta $(d)(F', F)$ se numește dreaptă focală. Din modul în care au fost alese punctele F' și F , dreapta focală coincide cu axa Ox .
3. Lungimea segmentului $F'F$, care este $2c$, se numește distanță focală.
4. Axa Ox și axa Oy sunt axe de simetrie ale hiperbolei iar originea sistemului de coordonate este centrul de simetrie. Axa Ox se numește axă transversă. Ea taie graficul hiperbolei în punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$. Axa Oy nu intersectează hiperbola.
5. Excentricitatea hiperbolei este raportul constant $e = \frac{c}{a} > 1$. Dacă sunt date a și e deducem că $c = ae$ și $b = a\sqrt{e^2 - 1}$.
6. Punctele $A(a, 0)$ și $A'(-a, 0)$ poartă numele de vârfurile hiperbolei.
7. Dacă notăm $c^2 - a^2 = b^2$ atunci dreptele $y = \frac{b}{a}x$ și $y = -\frac{b}{a}x$ sunt asimptotele hiperbolei. Dreapta $x = \frac{a^2}{c}$ poartă numele de dreapta directoare a focarului F iar $x = -\frac{a^2}{c}$ este directoarea focarului F' .

Ecuția carteziană implicită a hiperbolei raportată la axe

Ecuția hiperbolei raportată la axe este

$$(\mathcal{H}) : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (2.40)$$

Această ecuație mai poartă și numele de ecuație canonică a hiperbolei raportată la axe.

O hiperbolă care are asimptotele perpendiculare se numește **hiperbolă echilaterală**. Cum asimptotele au pantele $m_1 = -\frac{b}{a}$, $m_2 = \frac{b}{a}$ și cele două drepte sunt în acest caz perpendiculare avem că:

$$\left(-\frac{b}{a}\right) \cdot \frac{b}{a} = -1 \quad \text{deci} \quad b = a \quad \text{pentru că } a \text{ și } b \text{ sunt pozitive.}$$

În consecință, asimptotele hiperbolei echilaterale sunt $y = \pm x$. Ecuația hiperbolei echilaterale este:

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (2.41)$$

Ecuatii carteziane explicite ale hiperbolei raportată la axe

Ecuația 2.40 este echivalentă cu ecuațiile

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}, \quad x \in (-\infty, -a] \cup [a, \infty). \quad (2.42)$$

Ecuatii parametrice ale hiperbolei

La fel cum sunt introduse funcțiile sinus și cosinus pe cercul trigonometric la fel sunt introduse funcțiile sinus hiperbolic și cosinus hiperbolic ca fiind coordonatele unui punct $M(x, y)$ situat pe hiperbola echilaterală unitară $x^2 - y^2 = 1$. M va avea coordonatele $x = \cosh(t)$, $y = \sinh(t)$. Funcțiile $\sinh(t)$, $\cosh(t)$ se numesc funcții hiperbolice. Argumentul lor este numit unghi hiperbolic și este dat de dublul ariei triunghiului hiperbolic mărginit de raza vectorie a lui M, axa Ox și arcul de hiperbolă delimitat de rază și axă.

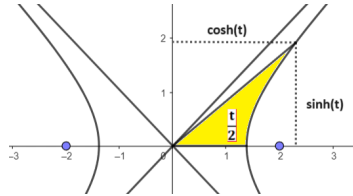


Fig. 2.22: Unghi hiperbolic, coordonate hiperbolice

Ele se definesc așa

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} - 1}{2e^t}.$$

$$\cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{e^{2t} + 1}{2e^t}.$$

Relația fundamentală între cele două funcții hiperbolice este:

$$\cosh^2(t) - \sinh^2(t) = 1. \quad (2.43)$$

Pentru funcțiile sinus hiperbolic și cosinus hiperbolic se mai folosesc și notațiile *sh* și *ch*.

În raport cu parametrul t definit anterior ecuațiile parametrice ale hiperbolei echilaterale raportată la axe sunt

$$\begin{cases} x = \cosh(t) \\ y = \sinh(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

iar pentru o hiperbola oarecare raportată la axe avem ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = a \cosh(t) \\ y = b \sinh(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Ecuția tangentei și normalei duse într-un punct al hiperbolei raportate la axe

Considerăm hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ și punctul $M(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$. Ecuția tangentei în M se obține prin dedublare.

$$(d) : \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1. \quad (2.44)$$

Ecuția normalei în punctul $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ este

$$y - y_0 = -\frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0). \quad (2.45)$$

Teorema 2.2. Proprietatea optică a hiperbolei.

Tangenta și normala duse într-un punct al hiperbolei sunt bisectoarele unghiului format de razele vectoare duse în acel punct.

Ca o consecință, o rază de lumină dusă dintr-un focar spre $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{H}$ se reflectă din hiperbolă în celălalt focar.

Teorema 2.3. Aria cuprinsă între asimptote și o tangentă oarecare la hiperbolă este constantă.

$$\mathcal{A}_{OAB} = ab.$$

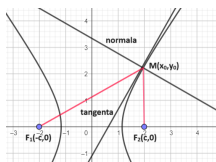
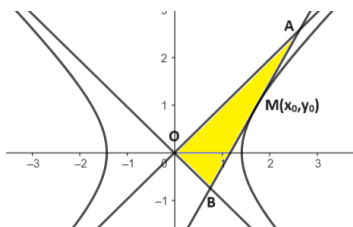


Fig. 2.23: Proprietatea optică a hiperbolei

Fig. 2.24: OA, OB asimptote, BA tangentă în M_0 , aria OAB constantă

Ecuatiile tangentelor paralele cu o direcție dată

Formulele sunt asemănătoare cu cele de la elipsă.

Propoziția 2.1. Fie hiperbola $\mathcal{H}$: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tangentele de pantă m duse la hiperbolă au ecuațiile

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 - b^2}. \quad (2.46)$$

Aceste tangente există doar dacă $a^2 m^2 - b^2 \geq 0$. Obținem astfel o restricție pentru m . Expresia în m este pozitivă numai în afara rădăcinilor. Deci avem tangente la hiperbolă paralele cu o pantă dată dacă și numai dacă

$$m \in \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right] \cup \left[\frac{b}{a}, \infty\right).$$

Ecuatiile tangentelor duse la hiperbolă dintr-un punct exterior ei

Exteriorul unei hiperbole este porțiunea din plan situată între cele două arce ale hiperbolei.

Propoziția 2.2. Fie hiperbola $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Tangentele la hiperbolă duse din punctul $M(x_0, y_0)$ au ecuațiile:

$$y - y_0 = m_1(x - x_0), \quad y - y_0 = m_2(x - x_0)$$

unde m_1 și m_2 sunt soluțiile ecuației

$$(x_0^2 - a^2)m^2 - 2x_0y_0 + y_0^2 + b^2 = 0. \quad (2.47)$$

Avem aceeași discuție ca la elipsă. Pentru $\Delta > 0$ avem două tangente, dacă $\Delta = 0$ avem o singură tangentă, iar $\Delta < 0$ înseamnă că nu pot fi duse tangente la hiperbolă din punctul $M(x_0, y_0)$.

2.5.3 Hiperbola conjugată a unei hiperbole date

Considerăm hiperbola

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Numim *hiperbolă conjugată* ei hiperbola

$$\mathcal{H}' : \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (2.48)$$

Hiperbola conjugată are axa focală Oy , având focarele în $F_1(0, -c)$ și $F_2(0, c)$, unde $c^2 = a^2 + b^2$, excentricitatea ei este $e' = \frac{b}{c}$. Cele două hiperbole $\mathcal{H}$ și $\mathcal{H}'$ au aceleași asimptote.

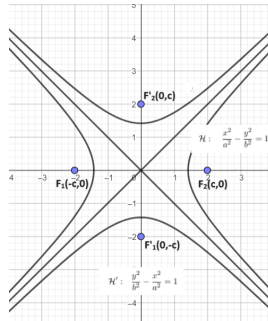


Fig. 2.25: Hiperbolele $\mathcal{H}$ și $\mathcal{H}'$

Exerciții

1. Să se determine ecuația unei hiperbole știind coordonatele focarelor $F_1(-5, 0)$, $F_2(5, 0)$ și că punctul $M(4, 0)$ este pe hiperbolă.

R: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. Pentru hiperbolele următoare determinați focarele, axa focală, vârfurile, excentricitatea, ecuațiile asimptotelor:

1) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ 2) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

3) $x^2 - y^2 = 25$ 4) $y^2 - 4x^2 = 9$

Ind. Atenție că aveți de a face atât cu hiperbole cât și cu hiperbole conjugate.

3. Să se scrie tangenta și normala în punctul $M_0\left(3, \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ la hiperbola raportată la axe $x^2 - 4y^2 = 4$.

4. Să se scrie ecuațiile tangentelor paralele cu dreapta $y = 2x + 5$ la hiperbola $144x^2 - 25y^2 = 169$.

5. Să se scrie ecuațiile tangentelor duse din punctul $M(5, 2)$ la hiperbola $x^2 - 2y^2 = 2$.

6. Să se demonstreze că produsul distanțelor de la un punct oarecare al unei hiperbole până la cele două asimptote este constant.

Ind. Distanța de la punctul $M(x_0, y_0)$ până la dreapta

$$Ax + By + C = 0 \text{ este } \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Produsul distanțelor este $\frac{a^2b^2}{c^2}$.

2.5.4 Parabola

Considerăm în plan un punct fix F și o dreaptă fixă (d) .

Definiția 2.5. Numim parabolă locul geometric al punctelor M din plan pentru care distanțele de la M la F și la (d) sunt egale.

$$d(M, F) = d(M, (d)). \quad (2.49)$$

F se numește focarul parabolei, (d) este dreapta directoare a parabolei iar MF se numește raza focală a parabolei. Dacă notăm cu A proiecția lui F pe (d) dreapta determinată de A și F o vom considera drept axa Ox . Notăm cu O mijlocul segmentului AF . Din definiția parabolei rezultă că O aparține parabolei. Alegem axa Oy perpendiculară în O pe AF . Axa Oy va fi tangentă la parabolă. Dacă notăm cu p lungimea segmentului AF , $p = |AF|$, rezultă că în reperul xOy ales F are coordonatele $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$, iar dreapta directoare va avea ecuația $(d): x = -\frac{p}{2}$. Valoarea lui p o vom numi parametrul parabolei. Axa

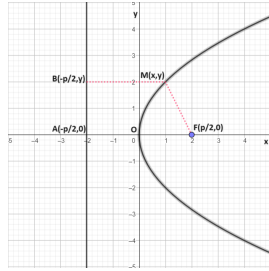


Fig. 2.26: Parabola

Ox este axă de simetrie a parabolei.

Ecuția carteziană implicită a parabolei

Teorema 2.4. *Punctul $M(x,y)$ este situat pe parabola raportată la axa Ox și la tangenta ei în vârf ca axă Oy dacă și numai dacă*

$$y^2 = 2px. \quad (2.50)$$

Într-adevăr, avem

$$d(M, F) = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2, \quad d(M, (d)) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2.$$

Dezvoltăm cele două paranteze și egalăm distanțele

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

După ce reducem termenii asemenea obținem expresia echivalentă

$$y^2 = 2px.$$

Ecuția 2.50 poartă numele de ecuația implicită a parabolei.

Ecuatiile parametrice ale parabolei

Fie parabola $y^2 = 2px$. Ecuatiile parametrice ale ei pot fi considerate

$$\begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.51)$$

Pentru $t > 0$ obținem punctele de deasupra axei Ox , pentru $t < 0$ punctele de dedesubtul axei, iar $t = 0$ ne dă punctul situat în originea sistemului de coordonate.

Ecuția în coordonate polare a parabolei

Considerăm polul situat în focar, axa polară Ox , raza focală drept ρ și θ unghiul format de raza focală cu axa polară. Atunci ecuația polară a parabolei va fi

$$\rho = \frac{p}{1 - \cos(\theta)} \quad (2.52)$$

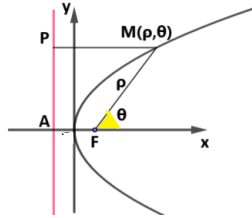


Fig. 2.27: Coordonatele polare ale unui punct pe parabolă

Tangente la parabolă

Propoziția 2.3. Dreapta $y = mx + n$ este tangentă la parabola de ecuație $y^2 = 2px$ dacă și numai dacă este îndeplinită relația

$$p - 2mn = 0. \quad (2.53)$$

Demonstrația acestei afirmații este imediată. Considerăm parabola $y^2 = 2px$ și dreapta $y = mx + n$. Sistemul format de cele două ecuații ne dă coordonatele punctelor de intersecție dintre dreaptă și parabolă. Dacă între cele două ecuații eliminăm pe y obținem o ecuație de gradul al doilea în x . Condiția de tangentă cere ca această ecuație să aibă rădăcină dublă. $\Delta = 0$ ne dă $p^2 - 2pmn = 0$ și cum $p \neq 0$ rezultă $p - 2mn = 0$.

Tangenta și normala într-un punct $M_0(x_0, y_0)$ al parabolei

Ecuția acestui tip de tangentă se obține din ecuația carteziană implicită a parabolei prin dedublare. Ea va fi

$$(tg) : \quad yy_0 = p(x + x_0) \quad (2.54)$$

Ecuția normalei o obținem știind că trece prin $M(x_0, y_0)$ și e perpendiculară pe tangentă deci că are panta $-\frac{y_0}{p}$. Deci

$$(nor) : \quad y - y_0 = -\frac{y_0}{p}(x - x_0) \quad \text{sau} \quad \frac{x - x_0}{p} + \frac{y - y_0}{y_0} = 0. \quad (2.55)$$

Ecuția tangentei la parabolă paralelă cu o direcție dată

Parabola $y^2 = 2px$ admite o singură tangentă cu direcție dată. Ecuția tangentei va fi de forma $y = mx + n$ în care îl știm pe m iar pe n îl aflăm din relația 2.53. Avem astfel $n = \frac{p}{2m}$ și obținem ecuația

$$y = mx + \frac{p}{2m}. \quad (2.56)$$

Tangente la parabolă duse dintr-un punct exterior parabolei

Fie parabola $(\mathcal{P}) : y^2 = 2px$ și punctul $M_0(x_0, y_0) \notin (\mathcal{P})$.

Propoziția 2.4. *Ecuțiile tangentelor din M_0 , dacă sunt reale sunt de forma*

$$y - y_0 = m_1(x - x_0), \quad y - y_0 = m_2(x - x_0) \quad (2.57)$$

unde m_1, m_2 sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$2x_0m^2 - 2y_0m + p = 0 \quad (2.58)$$

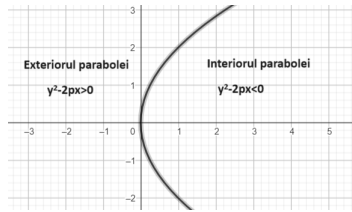


Fig. 2.28: Interiorul și exteriorul parabolei

Ecuția 2.58 are soluții reale distincte dacă discriminantul ei este mai mare strict ca zero adică

$$\Delta = y_0^2 - 2px_0 > 0$$

ceea ce înseamnă că putem duce tangente la parabolă dintr-un punct numai dacă el se află în exteriorul parabolei. Dacă discriminantul este 0 atunci punctul M coincide cu vârful parabolei deci cu O și avem o singură tangentă.

Proprietatea optică a parabolei

Teorema 2.5. Fie $M(x_0, y_0)$ un punct pe parabola $y^2 = 2px$, F focarul parabolei și B proiecția lui M pe directoare. Tangenta și normala în M sunt bisectoarele interioare și exterioare ale unghiului $\widehat{FMB}$. În consecință, razele de lumină paralele cu axa Ox se reflectă din parabolă în focar.

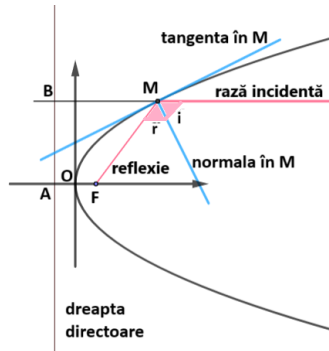


Fig. 2.29: Unghiul de incidență, i , este egal cu unghiul de reflexie, r .

2.5.5 Exerciții:

1. Să se determine punctele de pe parabola $y^2 = 4x$ a căror rază focală este de lungime 4.

Sol: $p = 2$, $F(1, 0)$, raza focală este $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$. Această ecuație împreună cu ecuația parabolei formează un sistem din care eliminăm pe y și obținem ecuația

$$(x-1)^2 + 4x = 16, \quad \text{adică } (x+1)^2 = 16$$

2.6. PREZENTARE SUMARĂ A SUPRAFETELOR CUADRICE 95

cu soluțiile $x_1 = 3$, $x_2 = -5$. Soluția negativă nu convine. Aflăm $y^2 = 12$ de unde $y = \pm 2\sqrt{3}$. Punctele cerute sunt $M_1(3, -2\sqrt{3})$ și $M_2(3, 2\sqrt{3})$

2. Să se scrie ecuațiile tangentei și normalei în punctul $M\left(\frac{3}{2}, 3\right)$

la parabola $y^2 = 6x$.

R: (tg) : $2x - 2y + 3 = 0$, (nor) : $2x + 2y + 3 = 0$

3. Să se determine tangentele din punctul $M(-2, 3)$ la parabola $y^2 = 8x$.

Ind. Ecuația care ne dă pantele tangentelor (2.58) este

$2m^2 + 3m - 2 = 0$ cu soluțiile $m_1 = \frac{1}{2}$ și $m_2 = -2$.

4. Să se scrie ecuația tangentei paralelă cu dreapta $2x + y - 3 = 0$ la parabola $y^2 = 2x$.

Ind. După determinarea lui m și p se folosește ecuația 2.56.

5. Demonstrați teorema 2.5.

Ind. Tangenta unghiului pe care îl face cu axa Ox dreapta tangentă la parabolă este egală cu tangenta unghiului pe care îl face cu dreapta MB . Dacă notăm acest unghi cu α avem $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{p}{y_0}$. Trebuie arătat că tangenta unghiului $\widehat{FMB}$ este

$$\frac{2y_0}{2x_0 - p} = \operatorname{tg}(2\alpha).$$

2.6 Prezentaie sumară a suprafețelor cuadrice

2.6.1 Elipsoidul

Suprafața caracterizată de ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

poartă numele de elipsoid. Acest elipsoid are centrul O în originea axelor de coordonate, a este lungimea semiaxe pe Ox , b lungimea semiaxe pe Oy , c lungimea semiaxe pe Oz . Secțiunile cu plane paralele cu planele de coordonate sunt elipse, puncte sau mulțimea vidă. Axele de coordonate sunt axe de simetrie. Planele de coordonate sunt plane de simetrie iar punctul O este centru de simetrie.

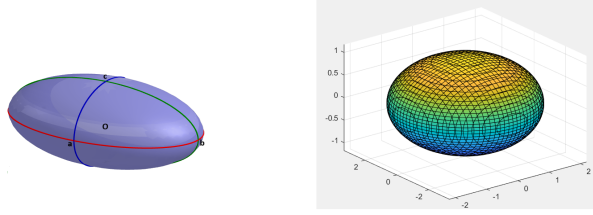


Fig. 2.30: Elipsoizi

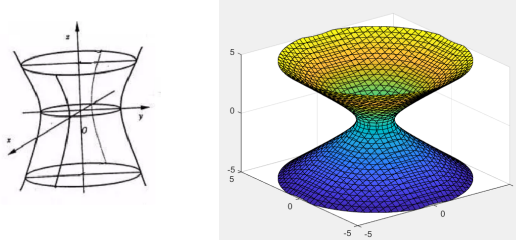


Fig. 2.31: Hiperboloizi cu o pânză

2.6.2 Hiperboloidul cu o pânză

Cu convențiile de la elipsoid și alegând axa verticală Oz , hiperboloidul cu o pânză este caracterizat de ecuația pe formă redusă

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Intersecțiile cu plane paralele cu xOy sunt elipse iar intersecțiile cu plane ce trec prin Oz sunt hiperbole.

Dacă în planul yOz avem hiperbola $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ și o rotim în jurul axei Oz obținem un hiperboloid de rotație cu o pânză a cărui ecuație este

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

O aplicație tehnică interesantă a hiperboloizilor de rotație cu o pânză este, de exemplu, transmiterea mișcării de rotație între două axe necoliniare și neperpendiculare, ca în figura 2.32

2.6.3 Hiperboloidul cu două pânze

Ecuația pe forma redusă a acestei suprafețe este caracterizată de faptul că are aceiași termeni ca la hiperboloidul cu o pânză dar are două

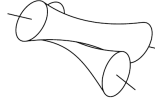


Fig. 2.32: Transmiterea mișcării de rotație între două axe necoliniare și neperpendiculare

semne minus. De exemplu hiperboloidul din figura 2.33 are ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Intersecțiile cu plane paralele cu xOy sunt hiperbole, intersecțiile cu

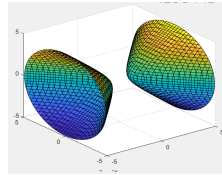


Fig. 2.33: Hiperboloid cu două pânze

plane paralele cu xOz sunt hiperbole iar cu plane paralele cu yOz sunt elipse, un punct sau mulțimea vidă.

2.6.4 Paraboloidul eliptic

Alegem axa Oz ca axă preferențială. Numim paraboloid eliptic suprafața caracterizată de ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

Orice secțiune plană care este paralelă cu axa Oz este o parabolă. Valorile a și b sunt semiaxele elipsei de intersecție a paraboloidului cu planul de ecuație $z = \frac{1}{2p}$. Originea reperului considerat se numește vârful paraboloidului, iar axa Oz , pe care am ales-o preferențială, se numește axa paraboloidului. Punctul $F(0, 0, \frac{p}{2})$ este focarul paraboloidului eliptic. În figura 2.34 este prezentată și proprietatea optică a paraboloidului eliptic, anume că orice rază de lumină paralelă cu axa paraboloidului se reflectă din suprafață în focar. Pe acest principiu sunt construite antenele parabolice.

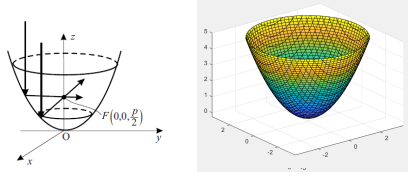


Fig. 2.34: Paraboloizi eliptici

2.6.5 Paraboloidul hiperbolic

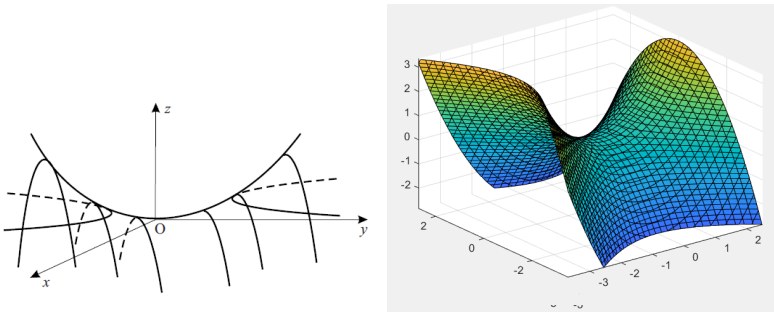


Fig. 2.35: Paraboloizi hiperbolici

Desemnăm ca axă preferențială axa Oz . Numim paraboloid hiperbolic suprafața generată de ecuația

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz.$$

Valorile a , și b sunt semiaxele hiperbolei de intersecție a paraboloidului cu planul $z = \frac{1}{2p}$. Paraboloidul hiperbolic admite planele xOz și yOz ca plane de simetrie. Intersecția cu un plan paralel cu Oz este o parabolă, iar cea cu un plan paralel cu xOy dar diferit de acesta este o hiperbolă. Vârful acestei hiperbole este pe axa Ox dacă secțiunea se află deasupra planului xOy și pe Oy dacă secțiunea este sub acest plan. Planul xOy taie paraboloidul după două drepte concurente în origine. Punctul lor de intersecție este originea axelor de coordonate și se numește vârful paraboloidului. ***Punctul O este un punct și a pentru această suprafață fiind simultan un punct de minim local și de maxim local.*** Fiind o suprafață generată de drepte care trec prin punctul și ea are o proprietate fizică importantă și anume forțele aplicate pe ea se direcționează spre punctul și astfel că

2.6. PREZENTARE SUMARĂ A SUPRAFETELOR CUADRICE99

acoperișurile construite în această formă pot avea doar un stâlp de susținere care este plasat în punctul șa. Materialele compozite care au matricea formată dintr-o rețea textilă ortogonală plasată într-un mediu elastic, la o tracțiune unidirecțională se deformează natural spre un paraboloid hiperbolic.

Capitolul 3

Calcul vectorial

3.1 Vectori legați, vectori liberi

Considerente fizice

În mecanică, legile lui Newton constituie bazele teoriei clasice. Prima lege spune că într-un sistem referențial, un obiect ramâne în repaus sau își continuă mișcarea rectilinie și uniformă (cu viteză constantă), dacă asupra lui nu acționează o forță.

Această lege este aplicată asupra obiectelor idealizate ca mase punctuale unice, dimensiunile și forma obiectului fiind neglijate. De obicei, punctul cu care se identifică corpul este centrul său de greutate.

O forță este caracterizată de direcția sa, care este o dreaptă de-a lungul căreia acționează forța, de sens, ales pe dreaptă convențional, de mărimea și de punctul ei de aplicare.

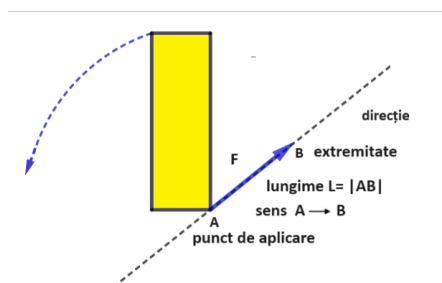


Fig. 3.1: Forța F acționând asupra unui corp

În figura 3.1 forța este aplicată în punctul A , are extremitatea B , mărimea ei dată de lungimea L a segmentului AB , direcția dată de dreapta determinată de punctele A și B , notată $(d)(A,B)$ și sensul ei

este de la A spre B . Este un tip de forță care depinde esențial de punctul ei de aplicare.

Pentru reprezentarea forțelor avem nevoie de un concept matematic nou și anume noțiunea de vector.

3.1.1 Vectori legați

Considerăm două puncte în spațiu, A și B , fixate. Ele determină în mod unic o dreaptă pe care o notăm cu $(d)(A, B)$. Această dreaptă ne dă o direcție. Pe dreapta $(d)(A, B)$ ne alegem un sens de deplasare, de exemplu de la A către B . Îl vom numi sens pozitiv. Parcurgerea dreptei de la B către A o vom numi parcurgere în sens negativ. Segmentul AB are o lungime pe care o vom nota cu L . Punctul A îl numim punct de aplicare iar B se va numi extremitate.

Definiția 3.1. *Mărimea fizică caracterizată de direcție, sens, lungime și punct de aplicare se numește vector legat și o vom nota $\overrightarrow{AB}$.*

Forța prezentată în figura 3.1 este un vector legat. Această forță aplicată în oricare alt punct al obiectului va avea altă acțiune asupra corpului.

3.1.2 Vectori liberi

Considerând însă contextul dat de prima lege a lui Newton, toată masa corpului o presupunem concentrată în centrul de greutate al corpului iar punctul de aplicare al forței va fi centrul de greutate. Punctul de aplicare al forței nu mai este determinant, oriunde am aplica forța acțiunea sa asupra obiectului va fi aceeași cu acțiunea forței aplicată în centrul de greutate.

Pe mulțimea vectorilor legați considerăm relația de echipolență definită astfel:

Doi vectori legați sunt echipolenți dacă au aceeași direcție, sens și lungime (diferă doar prin punctul de aplicare).

Relația de echipolență este o relație de echivalență. O clasă de echivalență în relația de echipolență poartă numele de *vector liber*. Cu alte cuvinte, un vector liber este format din mulțimea tuturor vectorilor legați care au aceeași direcție, sens și lungime cu un vector legat considerat. Convenim ca vectorii liberi să îi notăm cu litere mici, de exemplu $\vec{a}$, $\vec{b}$... Dacă luăm un reprezentant al vectorului liber $\vec{a}$ care are punctul de aplicare A spunem că *am aplicat vectorul $\vec{a}$ în punctul*

A.

Un vector liber de lungime 1 îl vom numi versor. Simbolurile $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sunt simboluri rezervate pentru versorii axelor de coordonate Ox, Oy, Oz .

3.2 Operații fundamentale cu vectorii liberi

3.2.1 Adunarea vectorilor liberi.

Considerăm vectorii liberi $\vec{a}$ și $\vec{b}$. Suma lor este un vector liber $\vec{c}$ obținut astfel:

Se aplică $\vec{a}$ în punctul A . El va avea extremitatea în punctul B . Se aplică $\vec{b}$ în B iar extremitatea lui va fi în punctul C . Construim vectorul legat $\overrightarrow{AC}$. Clasa lui de echipolență va fi vectorul liber $\vec{c}$.

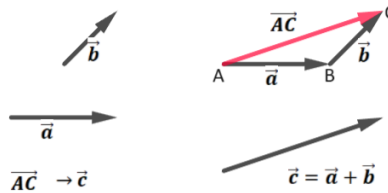


Fig. 3.2: Adunarea a doi vectori liberi, regula triunghiului

Această metodă de a aduna vectorii liberi se numește *metoda triunghiului*. Adunarea vectorilor este asociativă așa că dacă avem de adunat mai mulți vectori cu metoda triunghiului, rezultatul operației se poate obține imediat, fără a mai trece prin rezultate intermediare, astfel: se aplică primul vector într-un punct apoi al doilea în extremitatea sa, al treilea în extremitatea celui de al doilea și așa mai departe. Rezultatul final este obținut unind punctul de aplicare al primului vector cu extremitatea ultimului vector aplicat.

O alta metodă, echivalentă cu regula triunghiului este dată de *regula paralelogramului*. Se procedează astfel: se aplică vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ în același punct. Se desenează paralelogramul care are două laturi pe cei doi vectori. Rezultatul adunării este dat de vectorul determinat de diagonala paralelogramului având punctul de aplicare în punctul de aplicare a celor doi vectori și extremitatea dată de vârful opus.

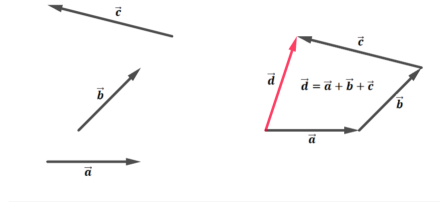


Fig. 3.3: Adunarea a trei vectori liberi

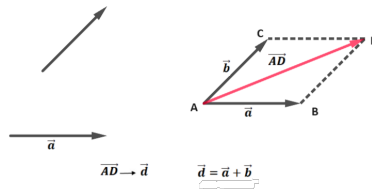


Fig. 3.4: Adunarea a doi vectori liberi, regula paralelogramului

3.2.2 Înmulțirea unui vector cu un scalar

Considerăm un vector liber $\vec{a}$ și un scalar (număr) real λ . Rezultatul înmulțirii vectorului $\vec{a}$ cu scalarul λ este tot un vector liber, notat $\lambda\vec{a}$ definit astfel:

1. Vectorul $\lambda\vec{a}$ are aceeași direcție cu vectorul $\vec{a}$.
2. Dacă λ este pozitiv sensul vectorului rezultat este același cu sensul lui $\vec{a}$; dacă scalarul este negativ sensul rezultatului este contrar sensului lui $\vec{a}$.
3. Lungimea noului vector este dată de modulul lui λ înmulțit cu lungimea vectorului $\vec{a}$.

$$|\lambda\vec{a}| = |\lambda||\vec{a}|$$

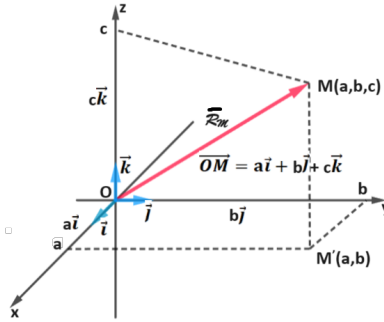
3.3 Expresia analitică a unui vector liber

3.3.1 Vector de poziție

Considerăm în spațiu un reper ortogonal cu originea în $O(0, 0, 0)$ și un punct $M(a, b, c)$. Pe axele de coordonate Ox , Oy , Oz luăm versorii

axelor aplicați în origine. Proiecția lui M pe axa Ox este un punct $M_x(a)$ de coordonată a . Vectorul $\overrightarrow{OM_x} = a\vec{i}$. Similar pe celelalte axe obținem vectorii $b\vec{j}$ și $c\vec{k}$. Observăm că vectorul $\overrightarrow{OM}$ este egal cu suma vectorilor obținuți pe cele trei axe.

Vectorul $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ se va numi vector de poziție al punctului $M(a, b, c)$ iar expresia $a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ se va numi expresia analitică a vectorului $\overrightarrow{OM}$. Notăm vectorul de poziție al punctului M cu $\vec{\mathcal{R}}_M$.

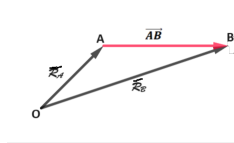


i

Fig. 3.5: $\vec{\mathcal{R}}_M$, vectorul de poziție a punctului M

3.3.2 Expresia analitică a unui vector determinat de două puncte

Considerăm două puncte $A(a_x, b_y, c_z)$, $B(b_x, b_y, b_z)$ și originea O . Cei doi vectori de poziție vor fi $\vec{\mathcal{R}}_A$ și $\vec{\mathcal{R}}_B$.



Observația 3.1. Este îndeplinită relația

$$\vec{\mathcal{R}}_A + \overrightarrow{AB} = \vec{\mathcal{R}}_B.$$

De aici avem

$$\overrightarrow{AB} = \vec{R}_B - \vec{R}_A$$

Scriind relația anterioară pe componente obținem

$$\overrightarrow{AB} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k} - a_x\vec{i} - a_y\vec{j} - a_z\vec{k} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$

Propoziția 3.1. Fie $A(a_x, a_y, a_z)$ și $B(b_x, b_y, b_z)$ Atunci:

1. Expresia analitică a vectorului $\overrightarrow{AB}$ va fi

$$\overrightarrow{AB} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$

2. Dacă $\vec{v}$ este clasa de echipolență a vectorului $\overrightarrow{AB}$ atunci:

$$\vec{v} = (b_x - a_x)\vec{i} + (b_y - a_y)\vec{j} + (b_z - a_z)\vec{k}.$$

3.4 Produse de doi vectori

Noțiunea de vector a apărut în matematică ca o necesitate pentru fizică. Astfel, noțiunile legate de produsul a doi vectori sunt impuse tot de fizică. Lucrul mecanic este o noțiune dată de produsul dintre forța care acționează asupra unui corp și deplasarea corpului pe o anumită direcție, un anumit sens și o anumită lungime. Astfel avem un prim tip de produs de doi vectori care are ca rezultat un scalar pentru că lucrul mecanic este un scalar. Pe de altă parte, momentul unei forțe este un vector și el este dat de produsul a doi vectori: forța și brațul forței. Avem deci două tipuri de produse de doi vectori. Produsul scalar care are ca rezultat un scalar și produsul vectorial al cărui rezultat este un vector.

3.4.1 Produsul scalar

Fie $\vec{a}$ și $\vec{b}$ doi vectori nenuli.

Definiția 3.2. Produsul scalar al celor doi vectori se notează cu punct „ $\cdot$ ” și se definește ca produsul dintre lungimile celor doi vectori și cosinusul unghiului dintre ei.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$$

Propoziția 3.2. Produsul scalar are următoarele proprietăți:

1. Este comutativ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$

2. Este distributiv față de adunarea vectorilor

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

3. Este omogen $\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ și $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = 0$

Acțiunea produsului scalar asupra versorilor sistemului de coordonate

Ținând cont că cei trei versori au lungimea 1 și sunt doi câte doi perpendiculari, rezultatele produselor lor scalare sunt date în tabela următoare:

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

(3.1)

Expresia analitică a produsului scalar

Fie vectorii $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ și $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$. Pentru a determina expresia analitică a produsului scalar folosim propoziția 3.2. și tabela 3.1 obținând:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad (3.2)$$

Lungimea unui vector

Observația 3.2. Pornind de la formula 3.2 putem găsi lungimea unui vector cu ajutorul produsului scalar. Astfel:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2. \quad (3.3)$$

Altfel spus

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (3.4)$$

Unghiul dintre doi vectori

Pentru a determina care este unghiul dintre vectorii $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ și $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ putem afla cosinusul aceluși unghi scriind produsul lor scalar în două moduri, cu definiția 3.2. și folosind formulele 3.2 împreună cu 3.4.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (3.5)$$

Din formula 3.5 exprimăm cosinusul și obținem:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}} \quad (3.6)$$

Condiția de perpendicularitate dintre doi vectori

Pornind de la faptul că cosinusul unui unghi de 90° este zero, din formula 3.6 rezultă că vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ sunt perpendiculari dacă sunt nenuli și produsul lor scalar este zero.

$$\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \quad \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0 \quad (3.7)$$

Observația 3.3. Considerăm vectorii nenuli $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Din relația $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ nu rezultă neapărat că $\vec{b} = \vec{c}$. Din acea relație se trag concluziile:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c} \text{ SAU } \vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c}).$$

3.4.2 Produsul vectorial

După cum am menționat anterior, rezultatul produsului vectorial dintre doi vectori este tot un vector, așa că pentru rezultat va trebui să îi precizăm direcția, lungimea și sensul.

Fie vectorii nenuli $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ și $(P)(\vec{a}, \vec{b})$ planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ (dacă există).

Definiția 3.3. Definim produsul lor vectorial, notat cu " $\times$ ", ca fiind vectorul $\vec{c}$ caracterizat astfel:

1. Vectorul $\vec{c}$ este perpendicular pe planul determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} \perp (P)(\vec{a}, \vec{b}).$$

2. Lungimea lui $\vec{c}$ este dată de relația

$$|\vec{c}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right) \quad (3.8)$$

3. Sensul vectorului $\vec{c}$ este dat de regula de înaintare a burghiului drept când $\vec{a}$ se mișcă către $\vec{b}$ pe drumul cel mai scurt.

Convențional, burghiul drept înaintează dacă mișcarea sa de rotație este de la stânga spre dreapta.

Alegerea sensului vectorului $\vec{c}$ este una convențională. Se postulează că o mișcare de rotație stânga dreapta sugerează o înaintare. Astfel, piulițele, șuruburile, burghiile care se învârt stânga dreapta înaintează în general. Burghiile care au această proprietate se numesc burghie drepte. Există însă și piulițe, șuruburi care se strâng printr-o mișcare dreapta stânga. Un exemplu al faptului că alegerea sensului vectorului $\vec{c}$ este convențională este dat în următorul context: considerăm o chiuvetă plină cu apă, scoatem dopul și apa începe să curgă. Se formează acolo un vârtej. Ecuațiile de mișcare ale vârtejurii conțin în ele un produs vectorial. Presupunem că vârtejul are o mișcare de rotație de la stânga la dreapta. Schimbăm cu mâna sensul de rotație al vârtejurii dar apa nu urcă în chiuvetă ci continuă să se scurgă deși sensul de rotație este contrar. Putem defini sensul vectorului rezultat $\vec{c}$ și cu ajutorul unei condiții algebrice. Dacă $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ alegem $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ astfel încât primele două condiții din definiția produsului vectorial să fie îndeplinite, rămânând să alegem sensul vectorului rezultat. Alegem sensul vectorului $\vec{c}$ astfel încât să avem

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \geq 0. \quad (3.9)$$

Dacă inegalitatea nu este satisfăcută schimbăm semnul lui $\vec{c}$.

Propoziția 3.3. *Produsul vectorial are următoarele proprietăți:*

1. Este anticomutativ, însemnând că dacă schimbăm ordinea în efectuarea produsului rezultatul schimbă semnul, adică

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

2. Este omogen, adică $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$

3. Este distributiv față de adunarea vectorilor

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad \text{și} \quad (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

4. Satisface identitatea lui Lagrange

$$(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

5. Sunt îndeplinite relațiile $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ și $\vec{a} \times \vec{0} = \vec{0}$.

Acțiunea produsului vectorial asupra versorilor sistemului de coordonate

Construcția tabelului este foarte simplă ținând cont că pe fiecare linie și coloană a ei se găsesc toți cei trei versori, un zero și un semn minus. Produsul vectorial al unui versor cu el însuși este zero pentru că sinusul unghiului dintre ei este zero și deci, pentru a completa tabla mai trebuie determinat doar produsul $\vec{i} \times \vec{j}$. Rezultatul va fi tot un versor, perpendicular pe planul xOy și cum mișcarea lui $\vec{i}$ către $\vec{j}$ este una de la stânga la dreapta vom obține $\vec{k}$. Putem verifica faptul că alegerea sensului este corectă pentru că avem condiția 3.9 îndeplinită.

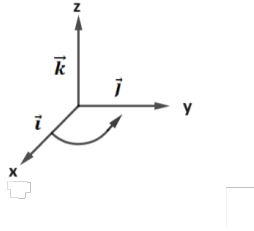


Fig. 3.6: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

Tabela rezultată este:

$\times$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

(3.10)

Expresia analitică a produsului vectorial

Folosind proprietățile produsului vectorial și tabela 3.10, considerând vectorii $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ și $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ obținem:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (3.11)$$

Acesta este un determinant formal care se calculează cu regulile obișnuite. Dacă vom calcula determinantul anterior dezvoltând după prima linie și schimbând între ele coloanele în al doilea termen obținem

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}.$$

Aria unui paralelogram determinat de doi vectori liberi aplicați în același punct

Aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ aplicați în același punct este egală cu mărimea vectorului $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\mathcal{A}_{\Delta(\vec{a}, \vec{b})} = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$$

și, evident, aria triunghiului determinat de cei doi vectori este:

$$\mathcal{A}_{\Delta(\vec{a}, \vec{b})} = \frac{1}{2} |\vec{a}||\vec{b}| \sin \left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}} \right)$$

Condiția de paralelism sau de coliniaritate a doi vectori

Produsul vectorial a doi vectori nenuli este nul dacă și numai dacă unghiul dintre ei este 0° sau 180° . Fiind vorba de vectori liberi condiția de paralelism și cea de coliniaritate coincid și se rezumă la

$$\vec{a} \text{ coliniar cu } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0. \quad (3.12)$$

Pornind de la expresia analitică a produsului vectorial, acesta este nul dacă și numai dacă ultimele două linii din determinantul dat de formula 3.11 sunt proporționale. Cum aceste linii reprezintă chiar componentele vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{b}$ rezultă că putem exprima condiția 3.12 și sub forma

$$\vec{a} \text{ coliniar cu } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ a.î. } \vec{a} = \lambda \vec{b}. \quad (3.13)$$

Rescriem condiția 3.13 pe componente și obținem

$$\vec{a} \text{ coliniar cu } \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad (3.14)$$

Observația 3.4. Considerăm vectorii nenuli $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$. Dacă avem dată o relație de tipul $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ nu rezultă neapărat că $\vec{b} = \vec{c}$. Din acea relație se trag concluziile

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c} \Leftrightarrow \vec{b} = \vec{c} \text{ SAU } \vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c}).$$

3.5 Produse de trei vectori

3.5.1 Produsul mixt

Considerăm trei vectori nenuli $\vec{a}$, $\vec{b}$ și $\vec{c}$.

Definiția 3.4. Numim produs mixt al celor trei vectori scalarul $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

Expresia analitică a produsului mixt

Fie $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ și $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ trei vectori nenuli. Dezvoltând după prima linie determinantul care ne dă produsul vectorial $\vec{b} \times \vec{c}$ și efectuând produsul scalar din definiție ajungem la expresia analitică a produsului mixt.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (3.15)$$

Proprietăți ale produsului mixt

Pornind de la relația dată de expresia analitică a produsului mixt, 3.15, împreună cu proprietățile determinantilor, putem enunța următoarea propoziție:

Propoziția 3.4. Produsul mixt a trei vectori nenuli are următoarele proprietăți:

1. Este anticomutativ în oricare doi dintre cei trei vectori

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}), \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c}).$$

2. Produsul mixt comută la permutări circulare

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

3. Produsele din produsul mixt comută între ele, adică

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

și, în consecință, produsul mixt se mai poate nota cu $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

4. Produsul mixt este omogen

$$(\lambda \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot ((\lambda \vec{b}) \times \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times (\lambda \vec{c})).$$

5. Este distributiv față de adunarea vectorilor

$$(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}),$$

$$(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}),$$

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}).$$

6. Dacă produsul mixt al vectorilor $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ este nul atunci cei trei vectori sunt coplanari.

7. Modulul produsului mixt a trei vectori nenuli este volumul paralelipipedului construit pe cei trei vectori aplicați într-un punct oarecare A .

$$\mathcal{V}_{(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, A)} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$$

3.5.2 Dublu produs vectorial

Definiția 3.5. Numim dublu produs vectorial al vectorilor nenuli $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ produsul $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

Vectorul rezultat al dublului produs vectorial $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ este un vector situat în planul determinat de vectorii din paranteză deci este o combinație liniară de acești doi vectori adică, există scalarii α și β astfel încât să avem:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$$

O consecință a relației anterioare este că dublul produs vectorial poate fi calculat cu ajutorul determinantului formal Gibbs:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix}$$

Scoatem în evidență importanța produselor de doi și trei vectori.

1. Produsul scalar ne dă o condiție de ortogonalitate a doi vectori nenuli. Putem cu ajutorul său să calculăm lungimea unui vector și de asemenea să determinăm unghiul dintre doi vectori.
2. Produsul vectorial ne dă un vector perpendicular pe cei doi vectori din produs, o condiție de paralelism (coliniaritate), iar modulul său ne dă aria paralelogramului construit pe cei doi vectori aplicați în același punct.

3. Produsul mixt a trei vectori ne dă o condiție de coplanaritate iar modulul său ne dă volumul paralelipiedului construit pe cei trei vectori aplicați în același punct.

3.6 Probleme

1. Se dau punctele $A(2, 3, 4), B(3, 2, 1), C(1, 1, -1)$. Să se determine vectorul de poziție al punctului A , vectorul dat de punctele B și C . Să se verifice că $\overrightarrow{AB} = \vec{R}_B - \vec{R}_A$. Să se arate că $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$.

Soluție: Coordonatele punctului A sunt compnentele vectorului $\vec{R}_A$, deci

$$\vec{R}_A = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Vectorul dat de punctele B și C este

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BC} &= (x_c - x_b)\vec{i} + (y_c - y_b)\vec{j} + (z_c - z_b)\vec{k} = \\ &= (1 - 3)\vec{i} + (1 - 2)\vec{j} + (-1 - 1)\vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 2\vec{k}.\end{aligned}$$

Se calculează $\overrightarrow{AB}$ în două moduri, ca mai sus și ca diferență de vectori de poziție.

Ultima egalitate poate fi demonstrată prin calcul direct sau mai simplu, fără calcule, doar formal, cu vectori de poziție.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{R}_B - \vec{R}_A + \vec{R}_C - \vec{R}_B + \vec{R}_A - \vec{R}_C = \vec{0}$$

2. Se dau vectorii $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \alpha\vec{i} - \vec{j}$. Să se calculeze lungimile celor trei vectori, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, unghiul dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$, valoarea lui α astfel încât $\vec{a} \perp \vec{c}$.

Soluție: Lungimea lui $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{2^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{14}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = (2 \cdot 1) + (3 \cdot 2) + ((-1)(-1)) = 9$$

Pentru punctul următor calculăm cosinusul unghiului dintre cei doi vectori.

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}\sqrt{\vec{b} \cdot \vec{b}}}$$

Produsul scalar și cele două lungimi fiind calculate, rezultă imediat valoarea cosinusului care trebuie să dea un număr în intervalul $[-1, 1]$.

Condiția de perpendicularitate este

$$\vec{a} \perp \vec{c} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = 0.$$

Această condiție ne conduce la

$$2\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}.$$

Secvența MATLAB pentru rezolvarea acestei probleme pas cu pas este

```
>> a = [2, 3, -1];
```

```
>> b = [1, 2, -1];
```

Comentariu: Variabila simbolică α o notăm cu al

```
>> syms al;
```

```
>> c = [al, -1, 0];
```

```
>> na = norm(a)
```

```
na =
```

```
3.7417
```

```
>> nb = norm(b)
```

```
nb = 2.4495
```

```
>> nc = norm(c)
```

```
nc =
```

```
 $\sqrt{al^2 + 1}$ 
```

```
>> cab = dot(a, b) / (norm(a) * norm(b))
```

Comentariu: Cosinusul unghiului dintre $\vec{a}$ și $\vec{b}$ îl notăm cu cab.

```
cab =
```

```
0.9820
```

```
>> eq = dot(a, c) == 0
```

```
eq =
```

```
2 * al - 3 == 0
```

```
>> solve(eq, al)
```

```
ans =
```

```
3/2
```

3. Considerăm vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + 2\vec{k}$. Să se calculeze $\vec{a} \times \vec{b}$, aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ aplicați în același punct, să se determine α și β astfel încât vectorii $\vec{a}$ și $\vec{c}$ să fie paraleli.

Soluție:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - 5\vec{j} + 14\vec{k}$$

Aria paralelogramului este modulul produsului vectorial calculat anterior, deci

$$\mathcal{A} = \sqrt{3^2 + (-5)^2 + 14^2} = \sqrt{230}$$

Condiția de paralelism (coliniaritate) pe care o vom folosi este 3.14.

$$\vec{a} \parallel \vec{c} \Leftrightarrow \frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} \Leftrightarrow \frac{3}{\alpha} = \frac{-1}{\beta} = \frac{-1}{2}.$$

Rezultă că $\frac{3}{\alpha} = \frac{-1}{2}$ de unde înmulțind mezii cu extremii avem

$6 = -\alpha$, deci $\alpha = -6$. Similar se obține și β .

Secvența de program MATLAB pentru rezolvare este:

Comentariu: Definim α și β cu al și be

```
>> syms al;
>> syms be;
>> a = [3, -1, -1];
>> b = [2, 4, 1];
>> c = [al, be, 2];
>> cross(a, b)
```

Comentariu: Componentele vectorului produs vectorial

```
ans =
3 - 5 14
```

Comentariu: Aria paralelogramului este

```
>> norm(cross(a, b))
ans =
15.1658
```

Comentariu: Proportionalitatea vectorilor $\vec{a}$ și $\vec{c}$ ne dă ecuațiile

```
>> eqs = [-al - 3 * be == 0, 2 * be - 1 == 0];
>> solve(eqs, [al, be])
```

```
ans =
```

```
al= -1.5 be= 0.5
```

4. Considerăm vectorii $\vec{a} = -2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ și $\vec{d} = 3\vec{i} - 2\alpha\vec{k}$. Să se calculeze $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, volumul paralelipipedului construit pe vectorii $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ aplicați în același punct și să se determine α astfel încât vectorii $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ să fie coplanari.

Soluție:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$$

Volumul paralelipipedului este dat de modulul produsului mixt anterior

$$\mathcal{V}_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |-18| = 18.$$

Condiția de coplanaritate a vectorilor $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$ este ca produsul lor mixt să fie zero.

$$(\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

Obținem ecuația

$$8\alpha + 15 = 0 \text{ de unde } \alpha = -\frac{15}{8}.$$

Secvență MATLAB pentru rezolvare

```
>> a = [-2, 2, -1];
>> b = [2, 4, 1];
>> c = [1, 1, 2];
>> syms al;
>> d = [3, 0, -2 * al];
>> A = [a; b; c]
A =
```

```
-2  2  -1
 2  4   1
 1  1   2
```

```
>> det(A)
```

```
ans =
```

```
-18
```

Comentariu: Determinarea lui α pentru coplanaritate

```
>> D = [a; c; d]
```

```
D =
```

```
-2  2      -1
 1  1       2
 3  0  -2 * al
```

```
>> eq = det(D) == 0
eq =
8 * al + 15 == 0
>> solve(eq, al)
ans =
-15/8
```

5. Fie vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{j} - 2\vec{k}$. Să se determine $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ și $\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a})$.

Soluție: Calculăm produsele cu determinantul Gibbs

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 1 = 13, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 2 - 2 = -2$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ 13 & 0 \end{vmatrix} = -13\vec{c} = -13\vec{j} + 26\vec{k}.$$

Similar se procedează și pentru calculul celui de al doilea dublu produs vectorial.

Secvență MATLAB pentru determinarea soluției.

```
>> a = [3, 2, 1];
>> b = [2, 4, -1];
>> c = [0, 1, -2];
>> cross(a, cross(b, c))
ans =
0 -13 26

>> cross(b, cross(c, a))
ans =
-18 1 -32
```

6. Fie vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ și $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$. Verificați identitatea lui Lagrange

$$(\vec{a} \cdot \vec{a})(\vec{b} \cdot \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \cdot \vec{b})(\vec{a} \cdot \vec{b}).$$

Soluție: Calculăm pe rând fiecare termen și în final verificăm identitatea.

Secvența în MATLAB folosită este:

```

>> a=[3,2,-4];
>> b=[2,-4,5];
>> ts=dot(a,a)*dot(b,b)

ts =

    1305

>> %ts este termenul stâng al identității

```

Fig. 3.7: Termenul din stânga al identității lui Lagrange

```

>> td1=dot(cross(a,b),cross(a,b))

td1 =

    821

>> td2=dot(a,b)*dot(a,b)

td2 =

    484

>> td=td1+td2

td =

    1305

>> ts==td

ans = 1

    logical

```

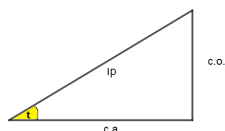
Fig. 3.8: Termenul din dreapta al identității lui Lagrange și verificarea logică

Capitolul 4

Trigonometrie

4.1 Sinus, cosinus, tangentă în triunghiul dreptunghic

Considerăm un triunghi dreptunghic și notăm cu α unul dintre unghiurile sale ascuțite. Notăm cateta opusă unghiului α cu $c.o.$, cea alăturată cu $c.a.$ iar ipotenuza cu ip .



Cu cele trei segmente putem forma 6 rapoarte diferite:

$$\frac{c.o.}{ip}; \quad \frac{c.a.}{ip}; \quad \frac{c.o.}{c.a.}; \quad (4.1)$$

și inversele lor:

$$\frac{ip}{c.o.}; \quad \frac{ip}{c.a.}; \quad \frac{c.a.}{c.o.}. \quad (4.2)$$

Să exemplificăm semnificația acestor rapoarte.

Problema 1. *Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în B , în care măsura unghiului $\widehat{A}$, $m(\angle A) = \alpha$. Două mobile, m și m_1 pleacă simultan din punctul A , m spre punctul C și m_1 spre punctul B ajungând simultan la destinație. Ele se deplasează cu viteze constante, v respectiv v_1 . Determinați valoarea p astfel încât $v_1 = p \cdot v$ și arătați că p depinde doar de unghiul α .*

Rezolvare: Se știe că în cazul mișcării rectilinii și uniforme, relația dintre spațiu (S), viteză (V) și timp (T) este

$$S = V \cdot T.$$

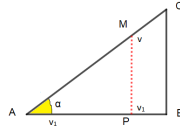


Fig. 4.1: Componenta orizontală a vitezei.

Rescriem această formulă pentru cele două mobile având în vedere că mobilul m parcurge spațiul $|AC|$ cu viteza v iar m_1 parcurge $|AB|$ cu viteza v_1

$$\begin{aligned} |AC| &= v \cdot t \\ |AB| &= v_1 \cdot t \end{aligned} \quad (4.3)$$

Împărțim cele două relații între ele, simplificăm cu t obținând:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{v}{v_1}.$$

De aici exprimăm pe v_1 și avem:

$$v_1 = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot v. \quad (4.4)$$

Notăm raportul $\frac{|AB|}{|AC|}$ cu p și observăm că p este raportul dintre cateta alăturată unghiului α și ipotenuză. Rămâne să arătăm că p depinde doar de unghiul α .

În figura 4.1 triunghiurile ABC și APM sunt asemenea pentru că sunt drept-unghice și unghiul α este comun. Rapoartele de asemănare ne dau

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC} \quad \text{și schimbând mezii între ei avem:} \quad \frac{AP}{AM} = \frac{AB}{AC}$$

Am arătat astfel că dacă unghiul α este constant raportul dintre cateta alăturată și ipotenuză este constant.

Din figura 4.2 observăm că dacă unghiul α scade atunci și lungimea ipotenuzei scade. Lungimea catetei alăturată este constantă și deci

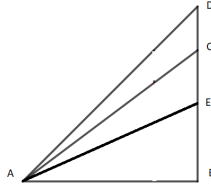


Fig. 4.2:

valoarea raportului $\frac{\text{catetă alăturată}}{\text{ipotenuză}}$ crește. El are valoarea maximă

1 când unghiul este 0 iar când unghiul crește valoarea raportului scade ajungând la 0 când unghiul devine $\frac{\pi}{2}$.

Observăm că dacă $|AC|$ este mărimea vitezei v , atunci v_1 este chiar componenta orizontală a lui v .

Exemplu: Distanța dintre A și C este de 8km iar distanța dintre A și B este de 6km. Dacă viteza $v = 4\text{km/h}$ să se determine viteza v_1 astfel încât cele două mobile, plecând simultan din A , să ajungă la destinație simultan.

Rezolvare: Știm că $v_1 = pv$ unde p este raportul dintre cateta opusă și ipotenuză. $p = \frac{6}{8}$. Atunci $v_1 = 4 \cdot \frac{6}{8} = 3\text{km/h}$

Problema 2. Fie triunghiul ABC , dreptunghic în B cu măsura unghiului $\hat{A}$ egală cu α . Două mobile, m și m_2 pleacă simultan din punctul A către C și, respectiv, din punctul B către C cu vitezele constante v și v_2 , ajungând simultan la destinație. Determinați valoarea q astfel încât $v_2 = q \cdot v$ și arătați că q depinde doar de mărimea unghiului A .

Rezolvare: Procedăm ca în cazul problemei anterioare pornind de la relația dintre spațiu, viteză și timp scrisă pe segmentele $|AC|$ și $|BC|$.

$$\begin{aligned} |AC| &= v \cdot t \\ |BC| &= v_2 \cdot t \end{aligned}$$

Împărțim cele două relații, exprimând în relația obținută pe v_2 .

$$\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{v}{v_2} \Rightarrow v_2 \cdot \frac{|AC|}{|BC|} = v \Rightarrow v_2 = \frac{|BC|}{|AC|} \cdot v.$$

Obținem astfel valoarea lui q ca fiind raportul dintre cateta opusă unghiului A și ipotenuză.

$$q = \frac{|BC|}{|AC|}.$$

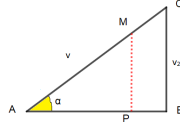


Fig. 4.3: Componenta verticală a vitezei.

Pentru unghiul α dat, din asemănarea triunghiurilor ABC și APM (4.3) rezultă că

$$\frac{|BC|}{|AC|} = \frac{|PM|}{|AM|}.$$

Tragem concluzia că în orice triunghi dreptunghic care are un unghi ascuțit egal cu α , raportul dintre cateta opusă unghiului și ipotenuză este același. Să arătăm că valoarea lui q depinde doar de mărimea unghiului α .

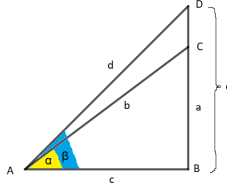


Fig. 4.4: Componenta verticală a vitezei.

Considerăm triunghiurile ABC și ABD ca în figura 4.4. Facem, pentru ușurința urmăririi calculelor, următoarele notații

$$|AB| = c, \quad |AC| = b, \quad |BC| = a, \quad |BD| = e, \quad |AD| = d.$$

$$\widehat{BAC} = \alpha < \widehat{BAD} = \beta.$$

Arătăm că raportul dintre cateta opusă lui β și ipotenuza $|AD|$ este mai mare decât raportul dintre cateta opusă lui α și ipotenuza $|AC|$. Scriem cu notațiile considerate teorema lui Pitagora în triunghiurile ABC și ABD .

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 \\ d^2 &= e^2 + c^2 \end{aligned}$$

Împărțim prima relație cu b^2 iar pe cea de a doua o împărțim cu d^2 .

$$1 = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2}$$

$$1 = \frac{e^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2}$$

De aici rezultă că

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{e^2}{d^2} + \frac{c^2}{d^2}$$

relație pe care o rescriem

$$\frac{a^2}{b^2} + \left(\frac{c^2}{b^2} - \frac{c^2}{d^2} \right) = \frac{e^2}{d^2}.$$

Dar $b < d$ deci $\frac{c}{b} > \frac{c}{d}$ și, în consecință, valoarea din paranteză este

pozitivă. Rezultă că raportul dintre cateta opusă și ipotenuză variază în funcție de variația unghiului ascuțit și anume crește sau scade deodată cu acesta. Trebuie însă precizat că nu este o dependență liniară între cele două mărimi.

Valoarea minimă a raportului dintre cateta opusă și ipotenuză este 0 când unghiul α este 0 și, în cazul triunghiului dreptunghic, tinde către 1 când unghiul α tinde către $\frac{\pi}{2}$.

Observăm că dacă $v = |AC|$, atunci v_2 este chiar componenta verticală a vitezei v .

Exemplu: Distanța dintre B și C este de 4km iar distanța de la A la C este de 6km/h. Să se determine v_2 astfel încât mobilele care pleacă simultan din A și B să ajungă simultan la destinație.

Rezolvare: Avem relația $v_2 = q \cdot v$ unde q este egal cu raportul dintre cateta opusă și ipotenuză. Atunci: $q = \frac{4}{6}$ iar $v_2 = 3 \cdot \frac{4}{6} = 2\text{km/h}$.

4.1.1 Definiția sinusului și cosinusului în triunghiul dreptunghic

Definiția 4.1. În triunghiul dreptunghic considerat definim sinusul și cosinusul unghiului α astfel:

$$\sin(\alpha) = \frac{c.o.}{ip}; \quad \cos(\alpha) = \frac{c.a.}{ip}. \quad (4.5)$$

În aceste condiții răspunsul la cele două probleme poate fi scris cu ajutorul sinusului și cosinusului unghiului α în modul următor:

$$v_1 = v \cdot \cos(\alpha); \quad v_2 = v \cdot \sin(\alpha). \quad (4.6)$$

Exemple:

1. Asupra unui corp acționează o forță $\vec{F}$ de mărime $F = 10N$, care face cu orizontala un unghi α pentru care $\sin(\alpha) = 0,6$. Să se determine mărimea F_v , componenta verticală $\vec{F}_v$ a forței $\vec{F}$.

Rezolvare: Între mărimile celor două forțe avem relația

$$F_v = F \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad F_v = 10 \cdot 0,6 = 6N$$

2. Asupra unui corp acționează o forță $\vec{F}$ de mărime $F = 10N$, care face cu orizontala un unghi α al cărui cosinus este $\cos(\alpha) = 0,8$. Să se determine mărimea componentei orizontale a lui $\vec{F}$.

Rezolvare: Relația dintre cele două mărimi este:

$$F_o = F \cos(\alpha) \quad \Rightarrow \quad F_o = 10 \cdot 0,8 = 8N$$

Relația fundamentală între sinusul și cosinusul unui unghi

În triunghiul dreptunghic considerat, cu notațiile făcute, scriem teorema lui Pitagora.

$$(c.a.)^2 + (c.o.)^2 = (ip.)^2$$

Împărțim cu $(ip.)^2$ obținând:

$$\frac{(c.a.)^2}{(ip.)^2} + \frac{(c.o.)^2}{(ip.)^2} = 1$$

Utilizând definiția sinusului și cosinusului rezultă relația fundamentală:

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1. \quad (4.7)$$

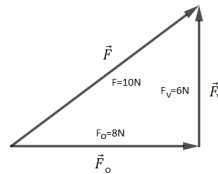


Fig. 4.5:

Observația 4.1. În figura 4.5 avem reprezentate cele trei forțe și mărimile lor. Din punct de vedere vectorial avem:

$$\vec{F} = \vec{F}_v + \vec{F}_o$$

Din punct de vedere al mărimilor forțelor, relația dintre ele nu este o sumare directă ci ele sunt corelate prin teorema lui Pitagora:

$$F \neq F_v + F_o \quad (10 \neq 6 + 8)$$

dar

$$F^2 = F_v^2 + F_o^2. \quad (100 = 36 + 64).$$

4.1.2 Definiția tangentei în triunghiul dreptunghic

Problema 3. Fie triunghiul ABC , dreptunghic în B , cu măsura unghiului $\angle A = \alpha$ și cu catetele AB , BC paralele cu axele de coordonate Ox , respectiv Oy . Arătați că valoarea raportului $\frac{|BC|}{|AB|}$ nu depinde de lungimea catetelor ci doar de mărimea unghiului α . Valoarea acestui raport este numită panta dreptei suport a ipotenuzei.

Rezolvare: Folosim asemănarea triunghiurilor APM și ABC din figura 4.1. Avem :

$$\frac{|PM|}{|AP|} = \frac{|BC|}{|AB|}$$

indiferent de poziția punctului M pe ipotenuză. Rezultă că raportul celor două catete nu depinde de lungimile lor. Pentru a arăta dependența valorii raportului de mărimea unghiului α reamintim că raportul $\frac{|BC|}{|AC|}$ crește dacă unghiul crește, iar raportul $\frac{|AB|}{|AC|}$ scade când unghiul α crește. Rescriem

$$\frac{|BC|}{|AB|} = \frac{\frac{|BC|}{|AC|}}{\frac{|AB|}{|AC|}}$$

și tragem concluzia că raportul dintre cateta opusă și cea alăturată crește odată cu creșterea unghiului α . De menționat că această creștere nu este liniară. Când unghiul α tinde către 0 valoarea raportului tinde și ea către 0, iar când unghiul crește spre $\frac{\pi}{2}$ valoarea raportului crește spre infinit.

Definiția 4.2. În triunghiul dreptunghic considerat definim tangenta unghiului α ca fiind raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată.

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{c.o.}{c.a.} = \frac{|BC|}{|AB|}. \quad (4.8)$$

Exemplu: Un drum rectiliniu urcă constant 25 de metri la fiecare kilometru de referință (distanță pe orizontală). Care este panta rampei?

Rezolvare: Știm că panta dreptei care reprezintă drumul este dată de tangenta unghiului α pe care drumul îl face cu orizontala. Tangenta o avem definită într-un triunghi dreptunghic ca raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată. Lungimea catetei opuse este dată de valoarea câștigată în înălțime la fiecare kilometru de referință, și anume $c.o. = 25m$. Cateta alăturată va fi dată de lungimea distanței de referință adică $c.a. = 1km = 1000m$. Atunci panta m va fi

$$m = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{c.o.}{c.a.} = \frac{25}{1000} = 0,025.$$

Observația 4.2. În general, panta unui drum se dă în procente, deci răspunsul anterior este

$$m = \frac{25}{1000} = \frac{25 : 10}{1000 : 10} = \frac{2,5}{100} = 2,5\%.$$

Pentru fixarea noțiunilor repetăm:

- Sinusul unghiului α este dat de raportul dintre cateta opusă și ipotenuză.
- Cosinusul unghiului α este obținut ca raportul dintre cateta alăturată și ipotenuză.
- Tangenta unghiului α se exprimă prin raportul dintre cateta opusă și cateta alăturată.

4.1.3 Definiția cosecantei, secantei și cotangentei în triunghiul dreptunghic

Rapoartele date în formula 4.2 definesc reciprocele sinusului, cosinusului și tangentei, anume cosecanta, secanta și cotangenta.

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}(\alpha) &= \frac{ip}{c.o.} = \frac{1}{\sin(\alpha)}; & \operatorname{sec}(\alpha) &= \frac{ip}{c.a.} = \frac{1}{\cos(\alpha)}; \\ \operatorname{ctg}(\alpha) &= \frac{c.a.}{c.o.} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

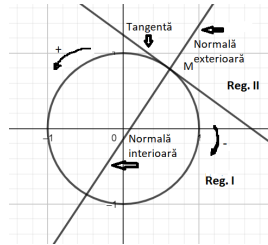
Observația 4.3. Dacă în triunghiul dreptunghic considerat, lungimea ipotenuzei este 1, atunci valoarea lungimii catetei opuse unghiului α este sinusul unghiului, iar valoarea catetei alăturate este cosinusul aceluiași unghi.

4.2 Cercul trigonometric

4.2.1 Sens de parcurgere a cercului trigonometric

Considerăm un cerc de rază 1 centrat în punctul O , originea unui sistem de coordonate. Numim acest cerc *cerc trigonometric*. Fie M un punct pe el. Ducem tangenta la cerc în punctul M . Această dreaptă împarte planul în două regiuni, cea care conține originea și, de fapt, conține cercul și regiunea care nu conține cercul. În punctul M ducem perpendiculara pe tangenta la cerc. Această dreaptă se numește normala la cerc. Punctul M împarte normala în două semidrepte, una situată în semiplanul care conține cercul, numită *normala interioară* sau *normala principală* și una situată în semiplanul celălalt, numită *normala exterioară*. Considerăm că punctul M este mobil pe cerc.

Convenție: Spunem că punctul M se deplasează în sens pozitiv sau în sens direct trigonometric dacă deplasarea se face astfel încât normala interioară să rămână în partea stângă.



4.2.2 Măsurarea unghiurilor

Fie A , B , C , D punctele în care axele de coordonate taie cercul. Considerăm unghiul MOA . Fiind un unghi la centru măsura sa este egală cu măsura arcului subîntins. Măsurarea unghiurilor poate fi făcută în două moduri: *în grade sau în radiani*.

Măsurarea în grade se poate face cu două unități de măsură:

- *Grade sexagesimale*. Un cerc complet are 360 de grade sexagesimale. Gradul sexagesimal se notează 1° și are submultipli *minutul*, a 60

parte dintr-un grad, notat $1'$ și *secunda*, a 60 parte din minut, notată $1''$. Acest tip de grade este folosit în geometrie și în trigonometrie. Dezavantajul acestui sistem de măsurare este legat de dificultățile legate de transformări și din faptul că mulțimea valorilor pe care le poate lua mărimea unui unghi este o mulțime discretă. De exemplu, jumătate din unghiul de 15° nu este $7,5^\circ$ ci este $7^\circ 30'$ iar măsura unui unghi cuprins între $12^\circ 25' 15''$ și $12^\circ 25' 16''$ nu poate fi exprimată în acest sistem de unități de măsură.

- *Grade centesimale*. În cazul acesta măsura unui unghi drept are 100 de grade centesimale. Unitatea de măsură se notează cu 1^g . Submultipli săi sunt minutul centesimal, (1^c) , care este a suta parte din grad și secunda centesimală, 1^{cc} , a suta parte din minutul centesimal. Aceste măsurători sunt utilizate în topografie și în armată. Avantajul lor constă în ușurința cu care se fac transformările. De exemplu, un sfert din unghiul de 35^g este unghiul $9,75^g$. Dezavantajul măsurării în grade a unghiurilor este legat de faptul că mulțimea măsurilor unghiurilor este o mulțime cel mult numărabilă în timp ce tratarea analitică a funcțiilor trigonometrice cere ca această mulțime să fie de puterea continuului (să poată fi pusă în bijectie cu $\mathbb{R}$). Din acest motiv se introduce și măsurarea unghiurilor în *radiani*.

Definiția 4.3. Prin definiție un unghi de un radian este unghiul la centru care subîntinde un arc de cerc a cărui lungime este egală cu raza cercului.

Într-un cerc oarecare de rază r măsura în radiani a unui unghi la centru se definește ca raportul dintre lungimea arcului subîntins și raza cercului.

Unghiul de 360° are măsura în radiani egală cu $\frac{2\pi r}{r} = 2\pi$. Relațiile de

transformare dintre măsura în grade sexagesimale și măsura în radiani se obțin cu regula de trei simplă.

$$\begin{array}{ccccccc} 180^\circ & \dots & \pi & & \pi & \dots & 180^\circ \\ \alpha^\circ & \dots & x & & \alpha(\text{radiani}) & \dots & y^\circ \end{array}$$

Măsura în grade a unui semicerc este de 180° , iar în radiani este π .

$$180^\circ = \pi.$$

Folosind regula de trei simplă, rezultă că

$$1\text{rad} = \left(\frac{180^\circ}{\pi}\right) \approx 57^\circ 35', \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180}\text{rad} \approx 0,01744\text{rad}. \quad (4.10)$$

Măsura în radiani a "celor mai plăcute unghiuri" este:

$$90^\circ = \frac{\pi}{2}; \quad 60^\circ = \frac{\pi}{3}; \quad 45^\circ = \frac{\pi}{4}; \quad 30^\circ = \frac{\pi}{6}. \quad (4.11)$$

Pentru calcule, în funcție de precizia dorită, se folosește o aproximare a lui π . De exemplu pentru unghiul de 9° și $\pi \approx 3,14$ avem

$$9^\circ = 9 \cdot \frac{\pi}{180} \approx \frac{3,14}{20} = 0,157 \text{ rad}.$$

Observația 4.4.

Dacă măsurarea unui unghi se face în sens direct atunci mărimea sa în radiani va fi pozitivă iar în caz contrar mărimea va fi negativă.

4.2.3 Sinusul definit pe cercul trigonometric

Definiția sinusului în triunghiul dreptunghic ne permite să considerăm doar unghiuri strict mai mici decât 90° . Pentru a generaliza noțiunea de sinus vom folosi cercul trigonometric și observația 4.3.. Astfel, considerăm un cerc trigonometric (fig.4.6) pe care alegem un punct

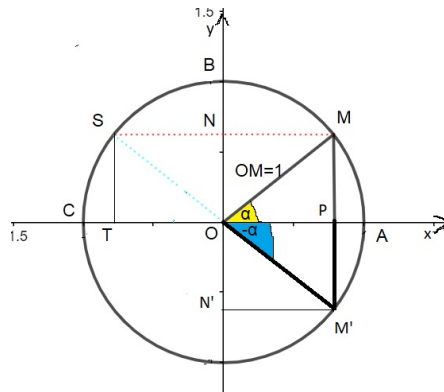


Fig. 4.6: Definirea sinusului în cercul trigonometric

M în primul cadran, ducem P , proiecția sa pe axa Ox . Dreapta MP taie cercul a doua oară în M' ; paralela la Ox dusă prin M' intersectează axa Oy în N' . Triunghiul OPM este dreptunghic în P și are ipotenuza egală cu 1. Notăm cu α unghiul $\angle POM$. Mărimea adimensională a segmentului MP are valoarea egală cu $\sin(\alpha)$. Ducem

prin M paralela la axa Ox care taie axa Oy în N și cercul a doua oară în S . Proiecția lui S pe Ox este T . Segmentul $ON \equiv PM$ este cel care măsoară sinusul lui α . El reprezintă proiecția lui OM pe axa ordonatelor. Considerăm un punct oarecare M pe cerc. Segmentul OM îl vom numi *rază vectorie* și notăm cu α unghiul $\widehat{AOM}$.

Definiția 4.4. *Definim sinusul unghiului α ca fiind mărimea adimensională a proiecției razei vectorie pe axa Oy .*

Observația 4.5.

1. Pentru unghiuri cuprinse între 0 și π valoarea sinusului este pozitivă, iar pentru unghiuri cuprinse în intervalul $(\pi, 2\pi)$ valoarea sinusului este negativă.
2. Din construcție avem că triunghiul OTS este congruent cu triunghiul POM , deci unghiul TOS are măsura egală cu α . Cum segmentele TS și PM sunt congruente rezultă că: $\sin(\widehat{ABS}) = \sin(\alpha)$. Dar, măsura unghiului $\widehat{ABS} = \pi - \alpha$ deci:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha). \quad (4.12)$$

3. Triunghiul $OPM' \equiv OPM$. Atunci $PM' = PM$. Rezultă că, în valoare absolută, proiecția pe Oy a razei vectorie OM' este egală cu cea a razei vectorie OM , dar sunt de semne contrare. Arcul de cerc AM' se măsoară în sens invers trigonometric deci măsura unghiului $\widehat{AOM'} = -\alpha$. Unghiul $\widehat{ABM'} = 2\pi - \alpha$ și de aici rezultă că:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \quad (4.13)$$

și

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha \quad (4.14)$$

4. Similar se arată că:

$$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha. \quad (4.15)$$

5. Semnul lui $\sin(\alpha)$ este pozitiv în cadranele I și II iar în cadranele III și IV este negativ.

Prin calcul direct, folosind teorema lui Pitagora în triunghiul OPM , alcătuim următorul tabel de valori ale sinusului în valori remarcabile

ale unghiului α .

$$\begin{array}{c|ccccc} \alpha & 0 & \frac{\pi}{6} & \frac{\pi}{4} & \frac{\pi}{3} & \frac{\pi}{2} \\ \hline \sin(\alpha) & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{array} \quad (4.16)$$

Exemple:

1. Să se calculeze $\sin(120^\circ)$.
 120° este un unghi în cadranul al doilea. Fiind în cadranul al doilea vom folosi formula

$$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

Determinăm pe x :

$$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ.$$

Deci $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Atunci

$$\sin(120^\circ) = \sin(180^\circ - 60^\circ) = \sin(60^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2. Să se calculeze $\sin(315^\circ)$.
 Unghiul de 315° se află în cadranul IV. Pentru a calcula sinusul său folosim formula

$$\sin(2\pi - x) = -\sin(x).$$

Avem $315^\circ = \frac{315}{180}\pi$. Putem simplifica cu 45 și obținem $315^\circ = \frac{7\pi}{4}$. Dar $2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ adică $x = \frac{\pi}{4}$. Deci:

$$\sin(315^\circ) = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Să se calculeze $\sin(210^\circ)$.
 Unghiul pentru care trebuie să calculăm sinusul este în cadranul III. Vom folosi formula

$$\sin(\pi + x) = -\sin(x).$$

Avem $210^\circ = \frac{210}{180}\pi$. Simplificăm cu 30 și rezultă: $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$.

Dar $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ deci $x = \frac{\pi}{6}$. Atunci:

$$\sin(210^\circ) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}.$$

4. Să se calculeze $\sin(-150^\circ)$.

Aplicăm formula $\sin(-x) = -\sin(x)$. Prin urmare $\sin(-150^\circ) = -\sin(150^\circ)$. Unghiul de 150° este în cadranul II. Avem:

$$\sin(150^\circ) = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin(30^\circ).$$

$$\text{Dar } \sin(30^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Deci:

$$\sin(-150^\circ) = -\sin(30^\circ) = -\frac{1}{2}.$$

Exerciții:

1. Să se calculeze $\sin(30^\circ)$; $\sin(45^\circ)$; $\sin(60^\circ)$; $\sin(90^\circ)$.
2. Să se calculeze $\sin(90^\circ)$; $\sin(120^\circ)$; $\sin(135^\circ)$; $\sin(150^\circ)$; $\sin(180^\circ)$;
3. Să se calculeze $\sin(210^\circ)$; $\sin(235^\circ)$; $\sin(250^\circ)$; $\sin(270^\circ)$;
4. Să se calculeze $\sin(300^\circ)$; $\sin(315^\circ)$; $\sin(330^\circ)$; $\sin(360^\circ)$;
5. Să se calculeze $\sin(x) + \sin(\pi - x) + \sin(\pi + x) + \sin(2\pi - x)$
6. Să se arate că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
7. Să se arate că $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
8. Să se arate că $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$

4.2.4 Cosinusul definit pe cercul trigonometric

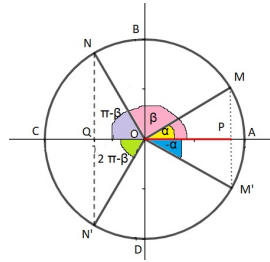


Fig. 4.7: Definirea cosinusului în cercul trigonometric

La fel ca în cazul sinusului, pornim de la cercul trigonometric și de la observația 4.3. În figura 4.7 considerăm raza vectoare OM . Mărimea adimensională a proiecției ei pe axa Ox ne va da chiar cosinusul unghiului α . Dreapta MP taie cercul a doua oară în M' . Triunghiurile OPM și OPM' sunt congruente. Atunci unghiurile $\widehat{AOM} = \widehat{AOM'}$ dar pentru că trebuie să ținem cont de sensul de parcurgere al arcelor și arcul AM se parcurge în sens direct, iar AM' în sens invers trigonometric avem măsurile celor două unghiuri de semne contrare

$$\angle AOM = \alpha, \quad \angle AOM' = -\alpha.$$

Observația 4.6.

1. În cele patru cadrane semnul lui cosinus este următorul:

$$(a) \text{ În cadranul I: } \cos(0) = 1, \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\alpha) > 0. \text{ și } \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

$$(b) \text{ Pentru cadranul II: } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos(\alpha) < 0 \text{ și } \cos(\pi) = -1.$$

$$(c) \text{ În cadranul III: } \alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos(\alpha) < 0 \text{ și } \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0.$$

$$(d) \text{ Pentru cadranul IV: } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \Rightarrow \cos(\alpha) > 0.$$

2. Sunt îndeplinite următoarele relații:

$$\cos(\alpha) = \cos(-\alpha). \quad (4.17)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha), \quad \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha). \quad (4.18)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha), \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha). \quad (4.19)$$

3. Pentru unghiurile α și $\frac{\pi}{2} - \alpha$ avem relațiile

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right); \quad \cos(\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right). \quad (4.20)$$

Exemple:

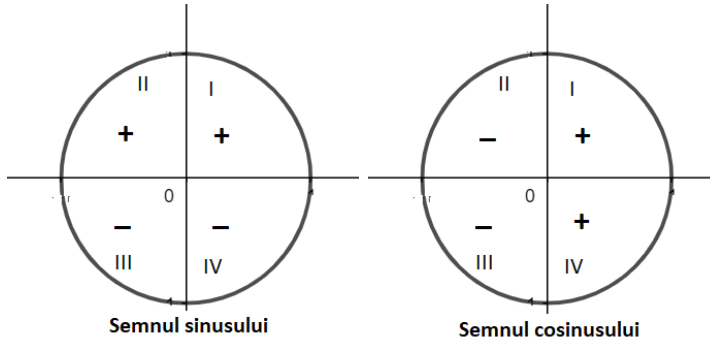


Fig. 4.8: Semnul sinusului și al cosinusului în cercul trigonometric

1. Să se calculeze $\cos(120^\circ)$.

120° este un unghi în cadranul al doilea. Fiind în cadranul al doilea vom folosi formula

$$\cos(\pi - x) = -\cos x.$$

Determinăm pe x :

$$120^\circ = 180^\circ - 60^\circ.$$

Deci $x = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Atunci

$$\cos(120^\circ) = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos(60^\circ) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}.$$

2. Să se calculeze $\cos(315^\circ)$.

Unghiul de 315° se află în cadranul IV. Pentru a calcula cosinusul său folosim formula

$$\cos(2\pi - x) = \cos(x).$$

Avem $315^\circ = \frac{315}{180}\pi$. Putem simplifica cu 45 și obținem $315^\circ = \frac{7\pi}{4}$. Dar $2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ adică $x = \frac{\pi}{4}$. Deci:

$$\cos(315^\circ) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Să se calculeze $\cos(210^\circ)$.

Unghiul pentru care trebuie să calculăm cosinusul este în cadranul III. Vom folosi formula

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x).$$

Avem $210^\circ = \frac{210}{180}\pi$. Simplificăm cu 30 și rezultă: $210^\circ = \frac{7\pi}{6}$.

Dar $\frac{7\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$ deci $x = \frac{\pi}{6}$. Atunci:

$$\cos(210^\circ) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

4. Să se calculeze $\cos(-150^\circ)$.

Aplicăm formula $\cos(-x) = \cos(x)$. Prin urmare $\cos(-150^\circ) = \cos(150^\circ)$. Unghiul de 150° este în cadranul II. Avem:

$$\cos(150^\circ) = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos(30^\circ).$$

$$\text{Dar } \cos(30^\circ) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Deci:

$$\cos(-150^\circ) = -\cos(30^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Exerciții:

1. Să se calculeze $\cos(30^\circ)$; $\cos(45^\circ)$; $\cos(60^\circ)$; $\cos(90^\circ)$.
2. Să se calculeze $\cos(90^\circ)$; $\cos(120^\circ)$; $\cos(135^\circ)$; $\cos(150^\circ)$; $\cos(180^\circ)$;
3. Să se calculeze $\cos(210^\circ)$; $\cos(235^\circ)$; $\cos(250^\circ)$; $\cos(270^\circ)$;
4. Să se calculeze $\cos(300^\circ)$; $\cos(315^\circ)$; $\cos(330^\circ)$; $\cos(360^\circ)$;
5. Să se calculeze $\cos(x) + \cos(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x)$
6. Să se arate că $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$
7. Să se arate că $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$
8. Să se arate că $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)$
9. Să se arate că $\sin(\pi - x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

10. Să se arate că $\sin(\pi + x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.
11. Să se arate că $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$.
12. Să se calculeze $\sin(10^\circ) + \cos(100^\circ) + \sin(100^\circ) + \cos(10^\circ)$.

4.2.5 Definiția tangentei și a cotangentei pe cercul unitate

Pentru definirea tangentei și a cotangentei unghiului α pornim de la figura 4.9. Considerăm punctul M pe cerc, proiecțiile sale pe axa Ox și Oy notate cu P , respectiv Q , punctele A , B în care axele Ox respectiv Oy taie cercul, tangenta la cerc în A , tangenta la cerc în B . Dreapta OM taie tangenta în A în punctul T iar tangenta în B o taie în punctul S . În triunghiul OPM am definit tangenta unghiului α ca fiind $\frac{MP}{OP}$. Triunghiurile OPM și OAT sunt asemenea fiind dreptunghice și având unghiul ascuțit α comun.

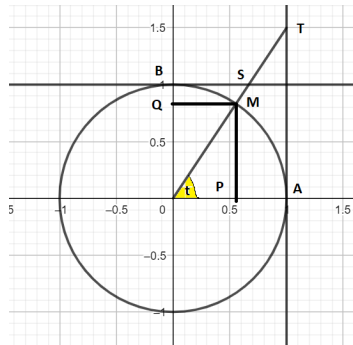


Fig. 4.9: Definiția tangentei și cotangentei pe cercul trigonometric

Rapoartele de asemănare sunt:

$$\frac{OP}{OA} = \frac{PM}{AT} = \frac{MO}{TO}.$$

Rescriem primele două rapoarte schimbând mezii între ei și avem

$$\frac{AT}{OA} = \frac{PM}{OP}; \quad \Rightarrow \quad AT = OA \cdot \frac{PM}{OP}.$$

Dar $\frac{PM}{OP} = \operatorname{tg}(\alpha)$ și $OA = 1$ ca rază a cercului. Rezultă că mărimea adimensională a segmentului AT este tangenta unghiului α

și, prin abuz de limbaj, putem considera segmentul $AT = \operatorname{tg}(\alpha)$.
 Procedăm similar pentru definirea cotangentei unghiului α . Observăm că MQ este perpendicular pe Oy deci paralel cu Ox . Atunci, triunghiul OQM este congruent cu triunghiul OPM pentru că latura OM este comună și unghiurile $\widehat{POM} \equiv \widehat{QMO}$ ca alterne interne iar triunghiurile sunt dreptunghice. Deci avem $QO = MP$, $QM = OP$. În consecință,

$$\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{OP}{MP} = \frac{QM}{QO}.$$

Triunghiurile OQM și OSB sunt asemenea pentru că SB și MQ sunt paralele. Scriem rapoartele de asemănare:

$$\frac{QM}{BS} = \frac{QO}{BO} = \frac{MO}{SO}.$$

Rescriem primele două rapoarte schimbând extremii între ei și exprimăm pe BS

$$\frac{QM}{QO} = \frac{BS}{BO}; \quad BS = BO \cdot \frac{QM}{QO}.$$

Dar, $\frac{QM}{QO} = \operatorname{ctg}(\alpha)$ și $BO = 1$ ca rază a cercului. Rezultă de aici că mărimea adimensională a segmentului BS este cotangenta unghiului α iar prin abuz de limbaj identificăm segmentul BS cu cotangenta lui α .

Observația 4.7.

1. Tangenta nu este definită în unghiurile în care cosinusul se anulează și anume $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.
2. Cotangenta nu este definită acolo unde sinusul se anulează și anume în 0 și π .
3. Sunt îndeplinite următoarele relații:

- (a) $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(\pi + x)$.
- (b) $\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{ctg}(\pi + x)$.
- (c) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg}(x)$.
- (d) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg}(x)$.

$$(e) \quad tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -ctg(x).$$

$$(f) \quad ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -tg(x).$$

Demonstrații:

(a) *Avem:*

$$tg(\pi + x) = \frac{\sin(\pi + x)}{\cos(\pi + x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = tg(x).$$

(b) *Scriem:*

$$ctg(\pi + x) = \frac{\cos(\pi + x)}{\sin(\pi + x)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = ctg(x).$$

(c) *Într-adevăr:*

$$tg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg(x).$$

(d) *Procedăm în același mod și rezultă:*

$$ctg\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\sin x}{\cos x} = tg(x).$$

(e) *Avem:*

$$tg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{\cos x}{-\sin x} = -ctg(x).$$

(f) *Similar:*

$$ctg\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tg(x).$$

Exemple:

1. Să se determine valoarea $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}$.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{\cos \frac{\pi}{4}} = 1.$$

2. Să se calculeze $\operatorname{tg}(135^\circ)$.

Unghiul de 135° se află în cadranul II. Avem:

$$\operatorname{tg}(135^\circ) = \frac{\sin(135^\circ)}{\cos(135^\circ)} = \frac{\sin(180^\circ - 135^\circ)}{\cos(180^\circ - 135^\circ)} = \frac{\sin(45^\circ)}{-\cos(45^\circ)} = -\operatorname{tg}(45^\circ) = -1.$$

3. Determinați cât este $\operatorname{tg}(240^\circ)$.

Suntem în cadranul III și știm că $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x)$. Avem:

$210^\circ = 180^\circ + 60^\circ = \pi + \frac{\pi}{3}$. De aici rezultă că:

$$\operatorname{tg}(240^\circ) = \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{3}.$$

Exerciții:

- Arătați că $\operatorname{tg}(x) = -\operatorname{tg}(-x)$.
- Să se calculeze $\operatorname{tg}(30^\circ)$; $\operatorname{tg}(45^\circ)$; $\operatorname{tg}(60^\circ)$; $\operatorname{tg}(90^\circ)$.
- Să se calculeze $\operatorname{tg}(120^\circ)$; $\operatorname{tg}(135^\circ)$; $\operatorname{tg}(150^\circ)$; $\operatorname{tg}(180^\circ)$;
- Să se calculeze $\operatorname{tg}(210^\circ)$; $\operatorname{tg}(235^\circ)$; $\operatorname{tg}(250^\circ)$;
- Să se calculeze $\operatorname{tg}(300^\circ)$; $\operatorname{tg}(315^\circ)$; $\operatorname{tg}(330^\circ)$; $\operatorname{tg}(360^\circ)$;
- Să se calculeze $\operatorname{tg}(x) + \operatorname{tg}(\pi - x) + \operatorname{tg}(\pi + x) + \operatorname{tg}(2\pi - x)$
- Să se arate că $\operatorname{tg}(\pi - x) = \operatorname{ctg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$.
- Să se arate că $\operatorname{ctg}(\pi - x) = \operatorname{tg} \left(x - \frac{\pi}{2} \right)$. ■

Putem obține acum încă două relații trigonometrice fundamentale pornind de la relația 4.7 împărțind pe rând cu $\cos^2 \alpha$ și cu $\sin^2 \alpha$.

$$1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

Obținem:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha$$

(4.21)

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

4.3 Rezolvarea triunghiurilor

4.3.1 Teorema sinusurilor

Teorema 4.1. *Considerăm triunghiul ABC în care facem notația uzuală a laturilor sale cu a , b , c și fie R raza cercului circumscris triunghiului. Atunci:*

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad (4.22)$$

Demonstrație: Vom arăta întâi egalitatea celor trei rapoarte. În

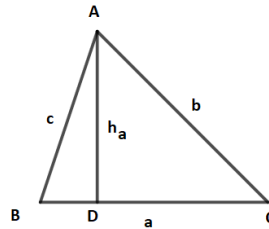


Fig. 4.10:

triunghiul ABC considerăm înălțimea AD pe care o vom nota cu h_a . Atunci, în triunghiul BDA , avem

$$\frac{c}{h_a} = \frac{1}{\sin B}$$

Înmulțim această relație cu b și obținem

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{bc}{h_a}. \quad (4.23)$$

În triunghiul CAD avem

$$\frac{1}{\sin C} = \frac{b}{h_a},$$

relație care înmulțită cu c ne dă:

$$\frac{c}{\sin C} = \frac{bc}{h_a}. \quad (4.24)$$

Din relațiile anterioare obținem că

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (4.25)$$

Notând cu h_b înălțimea din B și procedând similar obținem că

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}. \quad (4.26)$$

Am arătat astfel că

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}. \quad (4.27)$$

Demonstrăm acum că aceste rapoarte sunt egale cu $2R$.

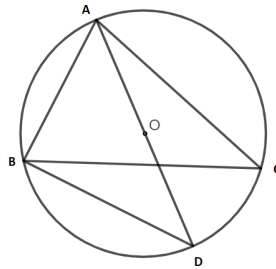


Fig. 4.11:

Considerăm triunghiul ABC înscris în cercul de diametru $AD = 2R$. Unghiul $\widehat{ABD}$ are ca măsură jumătate din arcul ACD , deci este unghi drept. Unghiurile $\widehat{ADB}$ și $\widehat{ACB}$ sunt egale pentru că subîntind același

arc de cerc. Rezultă că $\sin(C) = \sin(D)$. În triunghiul DBA , care este dreptunghic, avem cateta opusă unghiului D pe $AB = c$ și ipotenuza $AD = 2R$, deci $\sin D = \frac{c}{2R}$. Dar $\sin D = \sin C$ și inversând raportul anterior obținem $\frac{1}{\sin C} = \frac{2R}{c}$ iar înmulțind această relație cu c rezultă

$$\frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Relațiile date de teorema sinusurilor pot să aibă și următoarele forme:

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} = 2R. \quad (4.28)$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}. \quad (4.29)$$

$$\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin B}{AC} = \frac{\sin C}{AB} = \frac{1}{2R}. \quad (4.30)$$

Exemple:

1. Să se calculeze raza cercului circumscris triunghiului ABC dacă știm $|AB| = 6$ și $\angle C = 30^\circ$.

Din teorema sinusurilor păstrăm doar egalitatea necesară, anume:

$$\frac{|AB|}{\sin C} = 2R.$$

Înlocuind obținem:

$$2R = \frac{6}{0,5} = 12.$$

2. În triunghiul ABC cunoaștem $a = \sqrt{6}$, $\angle A = 45^\circ$. $\angle C = 75^\circ$. Să se determine $|AC|$.

Notăm uzual $|AC| = b$, calculăm

$$\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C = 180^\circ - 45^\circ - 75^\circ = 60^\circ.$$

Scriem teorema sinusurilor

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Din prima egalitate îl exprimăm pe b .

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

3. În triunghiul ascuțitunghic ABC cunoaștem $a = 10$, $b = 4\sqrt{3}$, $\angle A = 60^\circ$. Să se determine $\cos B$.

Din datele inițiale înlocuite în teorema sinusurilor putem calcula $\sin B$. Avem:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

Explicităm $\sin B$:

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{10} = \frac{6}{10} = 0,6.$$

Calculăm acum $\cos B$:

$$\cos B = \pm \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - 0,36} = \sqrt{0,64} = 0,8$$

Am considerat doar valoarea pozitivă a cosinusului pentru că unghiul $B < 90^\circ$. ■

4.3.2 Teorema cosinusului

Teorema 4.2. *Considerăm triunghiul ABC în care facem notația uzuală a laturilor sale cu a , b , c . Atunci,*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (4.31)$$

Demonstrație: Avem trei posibilități. Dacă unghiul C este drept teorema se reduce la teorema lui Pitagora. Rămân de demonstrat cazurile în care C este unghi ascuțit și cazul în care C este unghi obtuz.

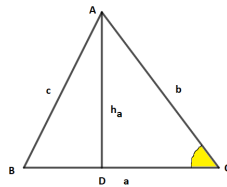


Fig. 4.12:

Fie C unghi ascuțit. Ducem înălțimea din A pe care o notăm cu h_a . Scriem teorema lui Pitagora în triunghiul ADB .

$$AB^2 = BD^2 + AD^2$$

Dar, $AB = c$, $BD = BC - DC = a - b \cos C$ iar $AD = b \sin C$. Înlocuim în teorema lui Pitagora și avem

$$c^2 = (a - b \cos C)^2 + (b \sin C)^2 = a^2 - 2ab \cos C + b^2 \cos^2 C + b^2 \sin^2 C. \quad (4.32)$$

Dăm factor comun pe b^2 , folosim identitatea $\cos^2 C + \sin^2 C = 1$ și rezultă:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C. \quad (4.33)$$

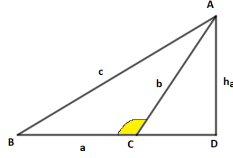


Fig. 4.13:

Cazul în care unghiul C este obtuz se demonstrează similar. Ducem înălțimea din A pe care o notăm h_a . Scriem teorema lui Pitagora în triunghiul ABD .

$$AB^2 = BD^2 + DA^2.$$

Avem $AB = c$, $BD = BC + CD = a + CD$. În triunghiul dreptunghic CDA cateta CD o exprimăm astfel:

$$CD = b \cos \widehat{ACD} = b \cos(\pi - \widehat{ACB}) = -b \cos C.$$

Cateta AD este:

$$AD = h_a = b \sin(\widehat{ACD}) = b \sin(\pi - \widehat{ACB}) = b \sin C.$$

Rescriem relația dată de teorema lui Pitagora cu expresiile anterioare:

$$c^2 = (a - b \cos C)^2 + b \sin^2 C$$

Această relație este identică cu cea dată de 4.32. Astfel teorema este complet demonstrată. ■

Teorema cosinusului poate fi scrisă pentru oricare dintre cele trei laturi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A; \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad (4.34)$$

Cunoscând laturile unui triunghi, din teorema cosinusului, pot fi aflate cosinusurile unghiurilor sale:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \quad (4.35)$$

Observația 4.8. Din formula 4.35 putem decide dacă un unghi al triunghiului este ascuțit, drept sau obtuz. Astfel, din

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

rezultă:

1. Dacă $b^2 + c^2 < a^2$ $\cos A < 0$, deci unghiul A este obtuz.
2. În cazul $b^2 + c^2 = a^2$ $\cos A = 0$, triunghiul ABC este dreptunghic în A .
3. Dacă $b^2 + c^2 > a^2$ unghiul A este ascuțit.
4. Dacă obținem că $\cos(A) \notin [-1, 1]$ cu cele trei laturi nu se poate construi un triunghi.

Exemple:

1. În triunghiul ABC cunoaștem $a = 6$, $b = 8$, $\sin C = 0,8$. Să se determine lungimea laturii c .
Pentru a putea aplica teorema cosinusului avem nevoie de $\cos C$.

$$\cos C = \pm \sqrt{1 - \sin^2 C} = \pm \sqrt{1 - 0,64} = \pm 0,6.$$

Pentru că nu s-a menționat în problemă dacă avem un triunghi ascuțitunghic sau unul obtuzunghic va trebui să luăm în considerare ambele valori ale cosinusului. Obținem astfel pentru c două valori distincte:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (-0,6) = 100 + 57,6 = 157,6$$

Deci $c \approx 12,554$. Sau

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 36 + 64 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot (+0,6) = 100 - 57,6 = 42,4$$

de unde $c \approx 6,512$.

Problema are două soluții pentru că nu ni se dă unghiul C ci ni se dă $\sin C$ rezultând pentru $\cos C$ două valori distincte.

2. În triunghiul ABC cunoaștem $a = 5$, $b = 12$ și $c = 13$. Să se determine unghiurile triunghiului ABC .

Vom determina de fapt cosinusurile unghiurilor triunghiului.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{144 + 169 - 25}{2 \cdot 12 \cdot 13} = \frac{288}{312} \approx 0,923$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{25 + 169 - 144}{2 \cdot 5 \cdot 13} = \frac{50}{130} \approx 0,3845$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{25 + 144 - 169}{2 \cdot 5 \cdot 12} = 0.$$

Triunghiul este dreptunghic în C .

3. **Teorema 4.3. (Teorema medianei.)** În triunghiul ABC mediana corespunzătoare lui a este dată de relația:

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}. \quad (4.36)$$

Se consideră un triunghi oarecare ABC de laturi a , b , c . Reamintim că mediana corespunzătoare lui BC sau mediana corespunzătoare lui A este segmentul de dreaptă care unește vârful A cu mijlocul laturii BC .

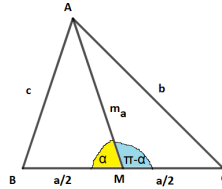


Fig. 4.14:

Fie D mijlocul lui BC , $AD = m_a$ mediana corespunzătoare lui A . Scriem teorema cosinusului pentru c în triunghiul AMB și pentru b în triunghiul AMC :

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a \cos \alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - 2 \cdot \frac{a}{2} \cdot m_a \cos(\pi - \alpha)$$

Facem simplificările și ținem cont că $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

$$c^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 - a \cdot m_a \cos \alpha$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} + m_a^2 + a \cdot m_a \cos(\alpha)$$

Adunăm cele două relații obținând:

$$b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2m_a^2.$$

Înmulțim această relație cu 2 pentru a elimina numitorul și trecem pe a^2 în stânga.

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = 4m_a^2.$$

Rămâne doar să explicităm m_a^2 .

$$m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Am demonstrat astfel teorema:

Formula este valabilă corespunzător și pentru celelalte două mediane:

$$m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \quad m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}.$$

Exerciții:

1. În triunghiul ABC avem $a=6$, $b=5$, $\angle C = 30^\circ$. Să se determine lungimea laturii c .
2. În triunghiul ABC avem $b=7$, $c=5$, $\angle C = 45^\circ$. Să se determine lungimea laturii a .
3. În triunghiul ABC avem $a=4$, $c=6$, $\angle B = 60^\circ$. Să se determine lungimea laturii b .
4. Să se determine unghiurile triunghiului în care $a=9$, $b=12$, $c=15$.
5. Să se determine unghiurile triunghiului în care $a=7$, $b=10$, $c=15$.
6. Demonstrați calculând cosinusul unghiului C că nu se poate construi un triunghi care are $a=4$, $b=3$ și $c=8$.

4.3.3 Aria unui triunghi când se cunosc două laturi și unghiul dintre ele

Considerăm triunghiul ABC în care facem notațiile uzuale pentru laturile sale a, b, c și h_a, h_b, h_c înălțimile din A, B, C . Aria triunghiului se poate calcula dacă știm o latură și înălțimea corespunzătoare cu una dintre formulele

$$\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{a \cdot h_a}{2}; \quad \mathcal{A}_{\Delta} = \frac{b \cdot h_b}{2}; \quad \mathcal{A}_{\Delta} = \frac{c \cdot h_c}{2}.$$

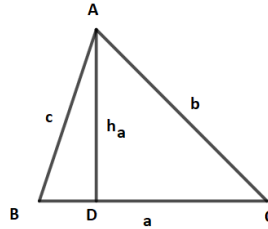


Fig. 4.15:

Din triunghiurile ABD, ADC (fig:4.15), putem exprima pe h_a așa:

$$h_a = c \cdot \sin B; \quad \text{sau} \quad h_a = b \cdot \sin C.$$

Similar, pentru celelalte două înălțimi avem:

$$h_b = c \cdot \sin A; \quad h_b = a \cdot \sin C; \quad h_c = b \cdot \sin A; \quad h_c = a \cdot \sin B.$$

Astfel, dacă cunoaștem două laturi și unghiul dintre ele putem determina aria triunghiului ca fiind produsul celor două laturi înmulțit cu sinusul unghiului dintre ele și împărțit la 2, adică:

$$\mathcal{A}_{\Delta} = \frac{a \cdot b \cdot \sin C}{2}; \quad \mathcal{A}_{\Delta} = \frac{a \cdot c \cdot \sin B}{2}; \quad \mathcal{A}_{\Delta} = \frac{b \cdot c \cdot \sin A}{2}. \quad (4.37)$$

Exerciții:

1. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $a = 3, b = 4$ și $\angle C = 30^\circ$.
2. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $b = 4, c = 5$ și $\angle A = 45^\circ$.

3. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $c = 5$, $a = 7$ și $\angle B = 60^\circ$.
4. Să se calculeze aria triunghiului ABC dacă $a = 13$, $b = 10$ și $\cos C = \frac{5}{13}$.
5. Să se determine aria triunghiului ABC dacă se cunosc latura a și unghiurile triunghiului.
Ind. Se scrie formula de calcul al ariei pentru unghiul B , pentru unghiul C și pentru unghiul A . Se înmulțesc primele două relații și se împart la a treia.

4.3.4 Rezolvarea triunghiurilor oarecare

Prin rezolvarea unui triunghi înțelegem determinarea tuturor laturilor și unghiurilor sale pornind de la un număr minim de informații. Acest număr minim de informații este dat, în mod evident, de cazurile de congruență ale triunghiurilor. Două triunghiuri sunt congruente dacă au laturile egale două câte două și unghiurile egale două câte două, deci, dacă pot fi cumva suprapuse perfect unul peste celălalt. În fapt, cazurile de congruență ne dau cerințele minime pentru a putea construi în mod unic un triunghi. Pentru triunghiurile oarecare avem trei cazuri de congruență:

1. Latură, Unghi, Latură (două laturi și unghiul dintre ele) LUL.
2. Unghi, Latură, Unghi (o latură și unghiurile de la capetele sale) ULU.
3. Latură, Latură, Latură (cele trei laturi) L.L.L.

Să luăm cele trei cazuri și să studiem modalitatea în care poate fi rezolvat un triunghi în fiecare dintre ele.

L.U.L.

Cunoaștem în acest caz, de exemplu, laturile a , c și unghiul B . Trebuie să determinăm latura b și unghiurile A , C . Pentru unghiuri, este suficient să fie determinate cosinusurile sau sinusurile lor.

Pornim rezolvarea de la determinarea laturii b . Din teorema cosinusului avem:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B.$$

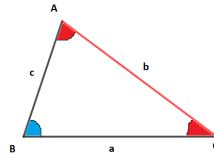


Fig. 4.16: Cazul Latură, Unghi, Latură

Știind cele trei laturi putem, folosind formulele 4.35, să determinăm cosinusurile unghiurilor A și C .

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

U.L.U.

Cunoaștem latura $BC = a$ și unghiurile B, C . Trebuie să determinăm laturile b, c și unghiul A .

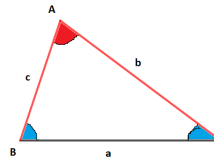


Fig. 4.17: Cazul Unghi, Latură, Unghi

Determinăm, în primul rând, cel de al treilea unghi știind că suma unghiurilor unui triunghi este 180° :

$$\angle A = \pi - (\angle B + \angle C).$$

Pentru a determina laturile vom folosi teorema sinusurilor.

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Luăm prima egalitate

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}.$$

În ea cunoaștem $a, \sin A, \sin B$ deci putem afla pe b . Înmulțim ambele fracții cu $\sin B$ rezultând

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Similar deducem că:

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

L.L.L.

În acest caz de congruență cunoaștem toate laturile, iar pentru rezolvarea triunghiului trebuie să determinăm unghiurile.

Observația 4.9. Pentru ca problema să aibă soluție trebuie ca toate cele trei laturi să respecte inegalitățile de tipul suma a doua laturi trebuie să fie strict mai mare decât a treia latură:

$$a + b > c; \quad a + c > b; \quad b + c > a.$$

Dacă una dintre inegalități nu este îndeplinită, atunci cu cele trei segmente nu se poate construi un triunghi.

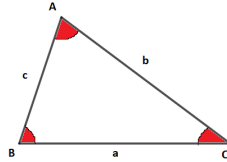


Fig. 4.18: Cazul Latură, Latură, Latură

Folosim teorema cosinusului sub forma dată de relațiile 4.35.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Observația 4.10.

1. Dacă $b^2 + c^2 < a^2$, atunci $\cos A$ este negativ, deci unghiul A este obtuz.
2. Pentru cazul în care $b^2 + c^2 = a^2$ triunghiul este dreptunghic în A .
3. Dacă $b^2 + c^2 > a^2$, atunci unghiul A este ascuțit.

Relații și observații similare ne dau:

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

4.3.5 Rezolvarea triunghiurilor dreptunghice

Pentru triunghiurile dreptunghice avem cazurile de congruență

- Ipotenuză, unghi (**I.U.**).
- Ipotenuză catetă (**I.C.**).
- Catetă unghi (**C.U.**).
- Catetă, catetă (**C.C.**).

Teorema lui Pitagora alături de definiția sinusului și a cosinusului rezolvă imediat toate aceste patru cazuri.

4.3.6 Cazul special L.L.U.

În afara cazurilor de congruență se poate studia și cazul în care sunt date două laturi și un unghi care nu este cuprins între laturile date. Notăm acest caz cu **L.L.U.** Studiem întâi în ce condiții putem construi un triunghi în acel context și apoi încercăm rezolvarea celui triunghi.

L.L.U. Se dau segmentele a , b care au o extremitate comună și unghiul B măsurat pe cea de a doua extremitate a segmentului a .

1. Cazul $\angle B = \alpha < 90^\circ$

Studiem pe posibilitățile:

- $a \geq b > a \sin B$.

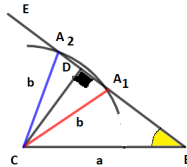


Fig. 4.19: Cazul $a \geq b > a \sin B$.

Considerăm segmentul a ale cărui extremități le notăm cu C , B . Prin B ducem dreapta BE astfel încât $\angle EBC = \alpha$. Prin C ducem dreapta CD perpendiculară pe BE . Segmentul $CD = a \sin B$. Pentru că $b > a \sin B$ ducem un arc de cerc de centru C și rază b . Acesta va tăia dreapta BE în două puncte, A_1 și A_2 . Triunghiurile BCA_1 și BCA_2 satisfac amândouă condițiile din enunț deci avem două soluții.

Notăm segmentul $A_1B = c_1$ și $A_2B = c_2$.
 Triunghiul BCA_1 poate fi rezolvat astfel:
 Din teorema sinusurilor avem:

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A_1}$$

De aici

$$\sin A_1 = \frac{a \sin B}{b}$$

Știm două unghiuri ale triunghiului deci putem să îl determinăm și pe al treilea iar cu teorema cosinusului determinăm latura c_1 .

Identic se rezolvă și triunghiul BCA_2 . De remarcat că unghiurile $\widehat{BA_2C}$ și $\widehat{BA_1C}$ sunt suplementare deci au același sinus dar au cosinusurile de semn contrar.

- $b = a \sin B$

În acest caz (fig: 4.19) punctele A_1 , A_2 și D coincid, deci avem o singură soluție, triunghiul fiind unul dreptunghic. Rezolvarea sa este imediată.

- $b < a \sin B$

În acest caz cercul centrat în C și de rază b nu taie dreapta BE , deci nu se poate construi un triunghi în contextul dat.

2. $\angle B = 90^\circ$

În acest caz avem posibilitățile:

- Cazul în care $b > a$ ne conduce la un triunghi dreptunghic a cărui rezolvare este imediată.
- Dacă $b \leq a$, nu se poate construi triunghi în acest context.

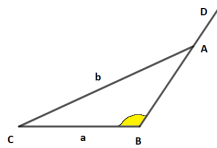


Fig. 4.20: Cazul $\angle B > 90^\circ$, $b > a$.

3. $\angle B > 90^\circ$ (fig:4.20)

Posibilitățile sunt:

- Cazul în care $b > a$

Considerăm segmentul a ale cărui extremități le notăm cu C și B . Prin B ducem dreapta BD astfel încât $\angle CBD > 90^\circ$. Se observă că se poate construi un singur triunghi iar rezolvarea lui se face imediat folosind pentru început teorema sinusurilor.

- Cazul $b \leq a$. În acest context nu poate fi construit niciun triunghi.

Exerciții:

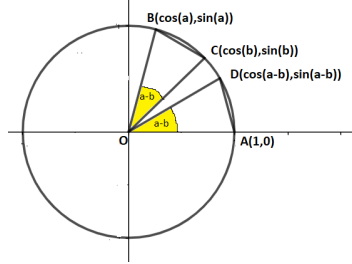
Să se rezolve următoarele triunghiuri:

1. $a = 4, b = 6, \angle C = 30^\circ$.
2. $a = 6, c = 4, \angle B = 45^\circ$.
3. $b = 3, c = 6, \angle C = 60^\circ$.
4. $a = 6, \angle B = 30^\circ, \angle C = 60^\circ$.
5. $b = 6, \angle A = 45^\circ, \angle C = 60^\circ$.
6. $c = 5, \angle A = 30^\circ, \sin C = 0,5$.
7. $a = 6, b = 5, c = 8$.
8. $a = 4, b = 5, c = 6$.
9. $a = 8, b = 3, c = 9$.
10. Triunghiul isoscel care are o latură de 4cm și una de 9cm.
11. $a = 4, c = 6$ și $\angle C = 135^\circ$
12. $a = 8, b = 6, \sin B = 0,5$.

4.4 Identități trigonometrice

În această secțiune vom prezenta formule trigonometrice utile în rezolvarea problemelor. Pentru că în capitolul următor vom renunța la legătura dintre triunghi și sinusul, cosinusul, tangenta unui unghi și vom studia funcțiile sinus, cosinus și tangentă, vom renunța la notația cu litere grecești a unghiurilor și vom folosi litere latine. În acest caz a, b, c nu vor mai fi notații pentru laturile triunghiului ci vor fi notații pentru unghiuri. La fel $x, y, \dots$ vor fi notații pentru argumentele funcțiilor studiate.

4.4.1 Formule pentru sume și diferențe de unghiuri

Formula pentru $\cos(a - b)$ Fig. 4.21: $\cos(a - b)$.

Presupunem fără a restrânge generalitatea că $a > b$. Considerăm pe cercul trigonometric punctele A , intersecția axei Ox cu cercul, B astfel încât $\angle AOB = a$, C astfel încât $\angle AOC = b$ și D astfel încât $\angle AOD = a - b$. Punctele considerate vor avea coordonatele:

$$A(1, 0), \quad B(\cos a, \sin a), \quad C(\cos b, \sin b), \quad D(\cos(a - b), \sin(a - b)).$$

Arcele CD și AD au ca măsură același unghi, adică sunt egale ca lungime, deci subîntind coarde de lungime egală. Știm că pentru două puncte în plan $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ lungimea segmentului M_1M_2 se calculează astfel:

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Scriem egalitatea lungimilor celor două coarde: $|CB| = |AD| \Rightarrow$

$$\sqrt{(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2} = \sqrt{(1 - \cos(a - b))^2 + \sin^2(a - b)}.$$

Ridicăm această egalitate la pătrat:

$$(\cos b - \cos a)^2 + (\sin b - \sin a)^2 = (1 - \cos(a - b))^2 + \sin^2(a - b).$$

Efectuăm calculele:

$$\begin{aligned} \cos^2 b + \cos^2 a - 2 \cos b \cos a + \sin^2 b + \sin^2 a - 2 \sin b \sin a = \\ = 1 + \cos^2(a - b) - 2 \cos(a - b) + \sin^2(a - b). \end{aligned}$$

Rescriem această egalitate folosind identitatea $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ și obținem

$$2 - 2 \cos b \cos a - 2 \sin b \sin a = 2 - 2 \cos(a - b).$$

Reducem termenii asemenea, schimbăm semnul și găsim formula căutată:

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b. \quad (4.38)$$

Formula pentru $\cos(a + b)$.

Pornind de la identitatea 4.38 găsim:

$$\cos(a + b) = \cos(a - (-b)) = \cos a \cos(-b) + \sin a \sin(-b).$$

Știm că $\cos(-b) = \cos b$ și $\sin(-b) = -\sin b$ rezultă identitatea:

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (4.39)$$

Formulele pentru $\sin(a - b)$ și $\sin(a + b)$.

Pornind tot de la 4.38 putem determina $\sin(a - b)$, $\sin(a + b)$.

$$\sin(a - b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a - b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a + b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right).$$

$$\cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) + b\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \cos b - \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) \sin b.$$

Dar $\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$ și $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos a$ de unde obținem:

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b. \quad (4.40)$$

În cazul lui $\sin(a + b)$ avem:

$$\sin(a + b) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a + b)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - a - b\right) = \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right).$$

Obținem, folosind aceleași formule ca mai înainte

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b. \quad (4.41)$$

Formulele pentru $\operatorname{tg}(a - b)$ și $\operatorname{tg}(a + b)$.

Putem calcula și $\operatorname{tg}(a - b)$, $\operatorname{tg}(a + b)$.

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\sin(a - b)}{\cos(a - b)} = \frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}.$$

Dacă produsul $\cos a \cos b$ este nenul (a, b nu sunt $\frac{\pi}{2}$ sau $\frac{3\pi}{2}$) putem împărți cu el. Obținem:

$$\frac{\sin a \cos b - \cos a \sin b}{\cos a \cos b + \sin a \sin b} = \frac{\frac{\sin a \cos b}{\cos a \cos b} - \frac{\cos a \sin b}{\cos a \cos b}}{\frac{\cos a \cos b}{\cos a \cos b} + \frac{\sin a \sin b}{\cos a \cos b}}.$$

Simplificăm factorii asemenea și folosind faptul că $\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$ rezultă:

$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tga} - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}. \quad (4.42)$$

Putem scrie atunci direct:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tga} + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}. \quad (4.43)$$

Formule pentru unghiul dublu

$$1. \sin(2a) = 2 \sin a \cos a$$

Dacă în formula 4.41 facem $a = b$ obținem:

$$\sin(2a) = 2 \sin a \cos a. \quad (4.44)$$

$$2. \cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 1 - 2 \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1.$$

Facem $a = b$ în formula 4.39 și obținem:

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a \quad (4.45)$$

Scriind totul în funcție de sinus avem:

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2 a. \quad (4.46)$$

iar dacă scriem în funcție de cosinus:

$$\cos(2a) = 2 \cos^2 a - 1. \quad (4.47)$$

$$3. \operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}$$

Pornim de la formula 4.43 în care facem $a = b$ și obținem:

$$\operatorname{tg}(2a) = \frac{2 \operatorname{tga}}{1 - \operatorname{tg}^2 a}. \quad (4.48)$$

Formule pentru unghiul pe jumătate

Scriem aceste formule pentru cazul în care avem de a face cu unghiurile unui triunghi. Dacă, de exemplu, $\angle A = a < 180^\circ$ atunci $\frac{a}{2} < 90^\circ$ deci sinusul, cosinusul și tangenta acestui unghi sunt pozitive.

$$1. \sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

Adaptăm formula 4.46 scriind-o sub forma echivalentă

$$\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}.$$

Explicităm de aici pe $\sin^2 \frac{a}{2}$ și obținem

$$2 \sin^2 \frac{a}{2} = 1 - \cos a.$$

Deci

$$\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}. \quad (4.49)$$

$$2. \cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}.$$

Pentru acest caz procedăm ca și pentru sinus și ne rezultă:

$$\cos \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}. \quad (4.50)$$

$$3. \operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}.$$

Avem:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}}.$$

Înlocuind corespunzător și simplificând pe 2 avem:

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}} \quad (4.51)$$

Dacă în formula 4.51, sub radical înmulțim cu $1 + \cos a$ și numărătorul și numitorul obținem

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 a}{(1 + \cos a)^2}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a}.$$

Similar, înmulțind numărătorul și numitorul cu $1 - \cos a$ obținem și

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}.$$

Formule pentru $\sin a$, $\cos a$, tga în funcție de tangenta unghiului pe jumătate

Enunțăm următoarele formule fără a le demonstra și făcând notația

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = t$$

1.

$$\sin a = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

2.

$$\cos a = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

3.

$$\operatorname{tga} = \frac{2t}{1 - t^2}$$

4.4.2 Formule pentru transformarea produselor în sume

Pornim de la relațiile cunoscute deja:

1. $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
2. $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
3. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
4. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

Formula pentru $\cos a \cos b$

Adunăm relația 1 cu relația 2, împărțim la doi și rezultă:

$$\cos a \cos b = \frac{\cos(a - b) + \cos(a + b)}{2} \quad (4.52)$$

Formula pentru $\sin a \sin b$.

Scădem relația 2 din relația 1, împărțim la doi și avem:

$$\sin a \sin b = \frac{\cos(a - b) - \cos(a + b)}{2} \quad (4.53)$$

Formula pentru $\cos a \sin b$.

Scădem relația 3 din relația 4, împărțim la 2 obținând:

$$\cos a \sin b = \frac{\sin(a+b) - \sin(a-b)}{2}. \quad (4.54)$$

4.4.3 Formule pentru transformarea sumelor în produse

Facem următoarele notații

$$a+b=x \quad a-b=y$$

Explicităm a , b în funcție de x și y . Obținem:

$$a = \frac{x+y}{2}, \quad b = \frac{x-y}{2}. \quad (4.55)$$

Revenim la relațiile 1-4. Adunăm relația 1 cu relația 2

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b.$$

Utilizând formulele 4.4.3 și 4.55 rezultă:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}. \quad (4.56)$$

Dacă scădem relația 2 din relația 1 și facem înlocuirile corespunzătoare avem:

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad (4.57)$$

Din relațiile 3 și 4 adunate, cu înlocuirile de rigoare obținem:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}. \quad (4.58)$$

Formula pentru diferența de sinusuri o obținem scăzând relația 3 din relația 4. După înlocuiri rezultă:

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}. \quad (4.59)$$

Suma de tangente se transformă în produs astfel:

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b}.$$

Aducem la același numitor

$$\frac{\sin a}{\cos a} + \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a \cos b + \sin b \cos a}{\cos a \cos b} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}.$$

În concluzie:

$$\operatorname{tga} + \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a+b)}{\cos a \cos b}. \quad (4.60)$$

Pentru diferența de tangente formula este:

$$\operatorname{tga} - \operatorname{tgb} = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cos b}. \quad (4.61)$$

Exerciții:

1. Să se calculeze cu formula pentru $\cos(\alpha - \beta)$ următoarele valori:
 $\cos(15^\circ)$; , $\cos(150^\circ)$; $\cos(105^\circ)$; $\cos(225^\circ)$; $\cos(300^\circ)$; .
2. Să se calculeze cu formula pentru $\cos(\alpha + \beta)$ următoarele valori:
 $\cos(75^\circ)$; , $\cos(105^\circ)$; $\cos(120^\circ)$; $\cos(240^\circ)$; $\cos(330^\circ)$;
3. Să se calculeze cu formula pentru $\sin(\alpha - \beta)$ următoarele valori:
 $\sin(15^\circ)$; , $\sin(150^\circ)$; $\sin(105^\circ)$; $\sin(225^\circ)$; $\sin(300^\circ)$; .
4. Să se calculeze cu formula pentru $\sin(\alpha + \beta)$ următoarele valori:
 $\sin(75^\circ)$; , $\sin(105^\circ)$; $\sin(120^\circ)$; $\sin(240^\circ)$; $\sin(330^\circ)$;
5. Să se calculeze cu formula pentru $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ următoarele valori:
 $\operatorname{tg}(15^\circ)$; , $\operatorname{tg}(150^\circ)$; $\operatorname{tg}(105^\circ)$; $\operatorname{tg}(225^\circ)$; $\operatorname{tg}(300^\circ)$; .
6. Să se calculeze cu formula pentru $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ următoarele valori:
 $\operatorname{tg}(75^\circ)$; , $\operatorname{tg}(105^\circ)$; $\operatorname{tg}(120^\circ)$; $\operatorname{tg}(240^\circ)$; $\operatorname{tg}(330^\circ)$;
7. Să se calculeze cu formula pentru unghiul dublu
 $\sin(120^\circ)$; $\sin(150^\circ)$; $\sin(240^\circ)$;
8. Să se calculeze cu formula pentru unghiul dublu
 $\cos(120^\circ)$; $\cos(150^\circ)$; $\cos(240^\circ)$;
9. Să se calculeze cu formula pentru unghiul dublu
 $\operatorname{tg}(120^\circ)$; $\operatorname{tg}(150^\circ)$; $\operatorname{tg}(240^\circ)$;
10. Să se calculeze cu formula pentru unghiul pe jumătate:
 $\sin(15^\circ)$; $\sin(22^\circ 30')$; $\sin(30^\circ)$; $\sin(75^\circ)$; $\sin(120^\circ)$;
11. Să se calculeze cu formula pentru unghiul pe jumătate:
 $\cos(15^\circ)$; $\cos(22^\circ 30')$; $\cos(30^\circ)$; $\cos(75^\circ)$; $\cos(120^\circ)$;
12. Să se calculeze cu formula pentru unghiul pe jumătate:
 $\operatorname{tg}(15^\circ)$; $\operatorname{tg}(22^\circ 30')$; $\operatorname{tg}(30^\circ)$; $\operatorname{tg}(75^\circ)$; $\operatorname{tg}(120^\circ)$;

13. Să se transforme în sume următoarele produse:
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right);$
14. Să se transforme în sume următoarele produse:
 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$
15. Să se transforme în sume următoarele produse:
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$
16. Să se transforme în produs următoarele sume:
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right);$
17. Să se transforme în produs următoarele sume:
 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$
18. Să se transforme în produs următoarele sume:
 $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right);$
19. Să se transforme în produs următoarele sume:
 $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right);$
20. Să se transforme în produs următoarele sume:
 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right);$
21. Să se transforme în produs următoarele sume:
 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right); \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right); \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right);$

4.5 Funcții trigonometrice

4.5.1 Funcții periodice, perioadă principală

Prezentăm pentru început, fără demonstrații, aspectul pur teoretic al noțiunilor.

Definiția 4.5. Fie $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție și P mulțimea tuturor numerelor t , reale, pozitive, cu proprietatea

$$f(x+t) = f(x) \quad \forall x \in A \quad (4.62)$$

Dacă P nu este mulțimea vidă spunem că funcția f este periodică. Cel mai mic t cu proprietatea anterioară se numește perioada principală a funcției și se notează cu T .

Graficul unei funcții periodice se trasează pe intervalul $[0, T]$ și apoi se translatează pe orizontală pe toată mulțimea A .

Propoziția 4.1. *Dacă T este perioada principală a funcției f , atunci orice multiplu întreg, pozitiv, al lui T este perioadă a lui f .*

Propoziția 4.2. *Dacă f este o funcție periodică, de perioadă principală T și $a > 0$, atunci și funcția $g(x) = f(ax)$ este periodică de perioadă principală T_1 , unde $T_1 = \frac{T}{a}$.*

$$g\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right) = f(ax + T) = f(ax) = g(x).$$

Similar se poate demonstra propoziția:

Propoziția 4.3. *Dacă f este o funcție periodică de perioadă principală T , $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$ atunci funcția $g(x) = f(a+bx)$ este periodică de perioadă principală $T_1 = \frac{T}{b}$.*

Teorema 4.4. *Dacă f și g sunt două funcții periodice de perioade principale T , respectiv S și dacă cele două perioade sunt numere naturale atunci funcția $f + g$ este periodică și are perioada principală cel mai mic multiplu comun al lui S și T .*

Definiția 4.6. *Fie $f : A = (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție.*

1. *Dacă $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in A$ spunem că funcția este impară.*
2. *Dacă $f(-x) = f(x) \quad \forall x \in A$ spunem că funcția este pară.*

4.5.2 Funcția sinus

Pe cercul trigonometric considerăm un punct M . Lungimea arcului AM o notăm cu x . Coordonatele lui M sunt $x_m = \cos x$, $y_m = \sin x$. Corespondența dintre valoarea lungimii arcului de cerc x și sinusul lui x este o corespondență de tip funcție. Pentru M parcurgând întregul cerc o dată în sens direct trigonometric observăm că $\sin(x)$ variază astfel

x		0		$\pi/2$		π		$3\pi/2$		2π
$\sin(x)$		0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

Din formula pentru sinusul sumei de unghiuri avem:

$$\sin(x+2\pi) = \sin(x) \quad \text{și, în general,} \quad \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă că funcția sinus este periodică de perioadă principală 2π .

În plus,

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

deci funcția sinus este impară.

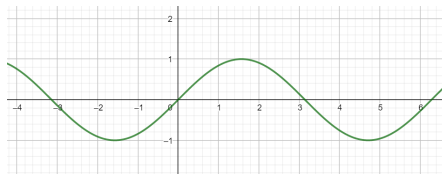


Fig. 4.22: Funcția $\sin(x)$.

Graficul funcției sinus este schițat în figura 4.22. De remarcat că pe intervalul $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ funcția este monoton strict crescătoare, deci este bijectivă și poate fi inversată. Acest interval poartă numele de *domeniu principal de definiție* al funcției sinus.

$$\sin(x) : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]. \quad (4.63)$$

Inversa ei este funcția

$$\arcsin(x) : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \quad (4.64)$$

Graficele celor două funcții, simetrice față de prima bisectoare, sunt redată în figura 4.23

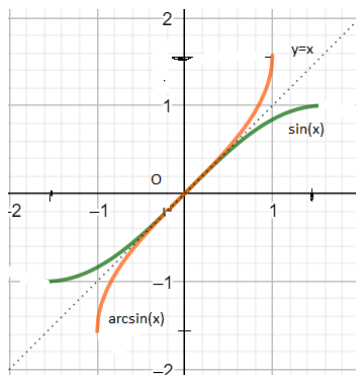


Fig. 4.23: Funcțiile $\sin(x)$ și $\arcsin(x)$.

4.5.3 Funcția cosinus

Ținem cont că în cercul trigonometric, din definiția cosinusului unui unghi cuprins între axa Ox și raza vectoare OM , acesta este proiecția lui OM pe axa Ox . Rezultă că pentru M parcurgând întregul cerc o dată în sens direct trigonometric $\cos(x)$ variază astfel

x		0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π				
$\cos(x)$		1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

Din formula pentru cosinusul sumei de unghiuri avem:

$$\cos(x+2\pi) = \cos(x) \quad \text{și, în general,} \quad \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Rezultă că funcția cosinus este periodică de perioadă principală 2π .

În plus,

$$\cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

deci funcția cosinus este pară.

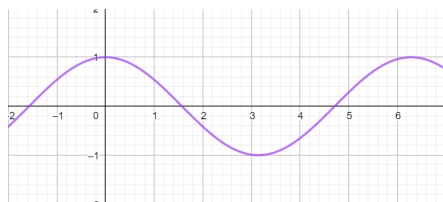


Fig. 4.24: Funcția $\cos(x)$.

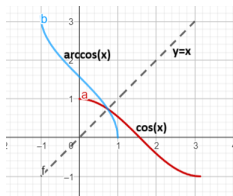
Graficul funcției cosinus este schițat în figura 4.24. De remarcat că pe intervalul $[0, \pi]$ funcția este monoton strict descrescătoare, deci este bijectivă și poate fi inversată. Acest interval poartă numele de *domeniu principal de definiție* al funcției cosinus.

$$\cos(x) : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]. \quad (4.65)$$

Inversa ei este funcția

$$\arccos(x) : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]. \quad (4.66)$$

Graficele celor două funcții, simetrice față de prima bisectoare, sunt redată în figura 4.25

Fig. 4.25: Funcțiile $\cos(x)$ și $\arccos(x)$.

4.5.4 Funcția tangentă

Reamintim că tangenta unui unghi x se definește ca raportul dintre sinusul și cosinusul aceluși unghi. Atunci funcția tangentă se va defini ca raportul funcțiilor sinus și cosinus. Va trebui să eliminăm din domeniul său de definiție punctele în care se anulează cosinusul și anume $\left\{ \dots - \frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \dots \right\}$. Observăm că funcția cosinus se anulează în orice multiplu impar de $\frac{\pi}{2}$. Mulțimea acestor puncte se scrie concentrat $\left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Funcția tangentă se definește:

$$\operatorname{tg}(x) : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (4.67)$$

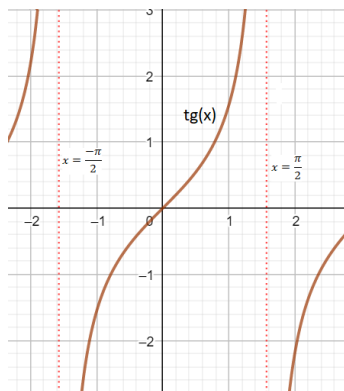
Din formulele pentru tangenta sumei de unghiuri reținem:

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi). \quad (4.68)$$

Această formulă ne indică faptul că funcția tangentă are perioada principală $T = \pi$. Pentru că sinusul e funcție impară, cosinusul e funcție pară, iar tangenta e raportul lor, rezultă că tangenta e funcție impară, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x)$. Variația funcției tangentă pe intervalul $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ este următoarea:

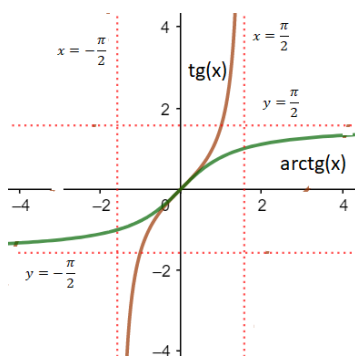
x		$-\pi/2$	0	$\pi/2$
$\operatorname{tg}(x)$		$-\infty$	$\nearrow 0 \nearrow$	∞

Domeniul ei principal de definiție este astfel $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dreptele $x = -\frac{\pi}{2}$ și $x = \frac{\pi}{2}$ sunt asimptote verticale ale graficului funcției tangentă pe domeniul principal de definiție.

Fig. 4.26: Funcția $\text{tg}(x)$ și asimptotele sale verticale.

În acest interval funcția este monoton strict crescătoare și deci inversabilă. Inversa ei se numește *arctangentă*. Avem:

$$\text{tg}(x) : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \text{arctg}(x) : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.69)$$

Fig. 4.27: Funcțiile $\text{tg}(x)$ și $\text{arctg}(x)$ și asimptotele lor.

Funcția arctangentă admite asimptotele orizontale $y = -\frac{\pi}{2}$ și $y = \frac{\pi}{2}$.

4.5.5 Reciprocele funcțiilor sinus, cosinus, tangentă

Funcția cosecantă

Reamintim că am definit cosecanta ca reciproca sinusului. Atunci funcția cosecantă va fi

$$\operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

Ea nu este definită în punctele unde sinusul se anulează. Știm că sinusul se anulează în punctele $\{.. - 2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi..\}$. Această mulțime se scrie $\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}$

$$\operatorname{cosec}(x) : \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Funcția cosecantă este periodică de perioadă principală $T = 2\pi$ și admite asimptotele verticale $x = k\pi, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$. Graficul ei alături de graficul sinusului este:

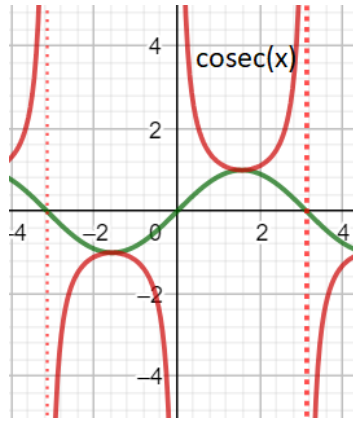


Fig. 4.28: Funcția cosecantă și asimptotele sale verticale alături de sinus.

Funcția secantă

Valoarea secantei pentru un unghi dat este reciproca valorii cosinusului acelui unghi. Deci:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}.$$

Funcția secantă nu va fi definită în punctele în care cosinusul se anulează și anume în

$$\left\{ \frac{(2k+1)k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Astfel avem:

$$\sec(x) : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Funcția secantă este periodică de perioadă principală $T = 2\pi$ și admite asimptotele verticale $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Graficul ei alături de graficul cosinusului este:

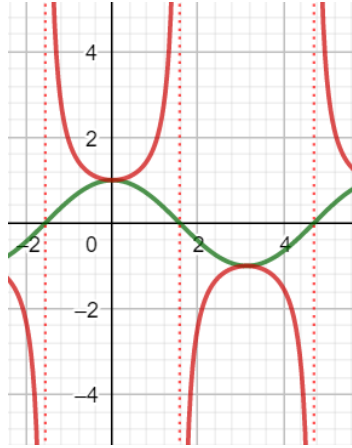


Fig. 4.29: Funcția secantă și asimptotele sale verticale alături de cosinus.

Funcția cotangentă

Cotangenta unui unghi se definește ca raportul dintre cosinusul și sinusul unghiului. Ca funcție, ea nu va fi definită unde se anulează sinusul, în acele puncte graficul ei admițând asimptote verticale. Perioada ei principală va fi $T = \pi$.

$$\text{ctg}(x) : \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Asimptotele funcției cotangentă sunt dreptele:

$$x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funcția cotangentă este reciproca funcției tangentă

$$\operatorname{ctg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}(x)}$$

Din relațiile

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right); \quad \cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

deducem că

$$\operatorname{ctg}(x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Graficul ei este:

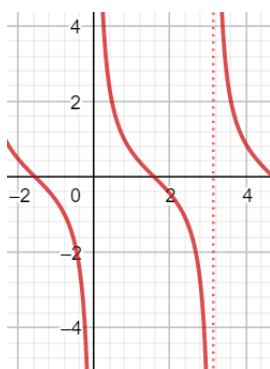


Fig. 4.30: Funcția cotangentă și asimptotele sale verticale.

Graficele funcțiilor $a \sin(x)$, $a \cos(x)$, $a \operatorname{tg}(x)$

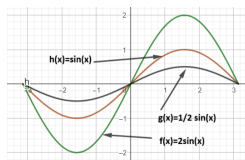


Fig. 4.31: Funcția $a \sin(x)$ pentru diverse valori ale lui a

- Pentru $a \neq 0$ funcțiile $a \sin(x)$, $a \cos(x)$, $a \operatorname{tg}(x)$ își păstrează perioadele principale.
- Pentru $a > 0$ ele își păstrează domeniile unde sunt crescătoare sau descrescătoare.

- Dacă $a < 0$ intervalele în care sunt crescătoare-descrescătoare se schimbă între ele.
- Constanta a este un factor de scalare pe verticală.

4.5.6 Graficele funcțiilor $\sin(ax)$, $\cos(ax)$, $\operatorname{tg}(ax)$

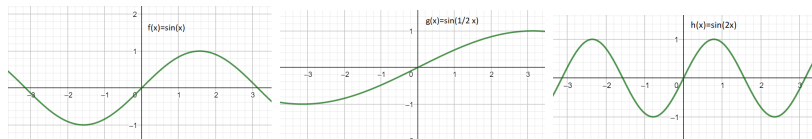


Fig. 4.32: Grafice ale funcțiilor $\sin(ax)$ pentru diverse valori ale lui a

Funcția $f(x) = \sin(ax)$ este tot o funcție periodică având graficul ase-mănător cu cel al funcției sinus. Determinăm perioada T a ei pornind de la definiția periodicității unei funcții și anume perioada T este cel mai mic număr strict pozitiv pentru care avem

$$f(x) = f(x + T) \quad \forall x \in D$$

unde D este domeniul de definiție al lui f .

Din

$$\sin(a(x + T)) = \sin(ax)$$

obținem

$$ax + aT = 2k\pi + ax.$$

Exprimând pe T avem

$$aT = 2k\pi \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2k\pi}{a}$$

Luând pentru k valoarea 1 rezultă că perioada principală pentru funcția $\sin(ax)$ este

$$T = \frac{2\pi}{a}.$$

Prezența lui a determină o scalare pe orizontală a graficului funcției sinus invers proporțională cu a . Pe verticală (codomeniul lui $\sin(ax)$) rămâne neschimbat.

Procedăm la fel pentru funcția $f(x) = \cos(ax)$ observând că obținem aceeași perioadă și același tip de scalare pe orizontală.

$$\cos(a(x + T)) = \cos(ax) \quad \Rightarrow \quad ax + aT = 2k\pi + ax \quad \Rightarrow$$

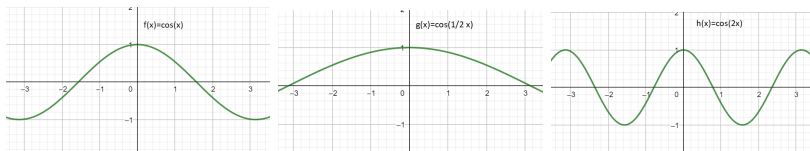


Fig. 4.33: Grafice ale funcțiilor $\cos(ax)$ pentru diverse valori ale lui a .

Reducem în ambii membri pe ax și rezultă că

$$aT = 2k\pi \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{a}.$$

Observăm că la fel ca în cazul funcției sinus prezența lui a produce o scalare pe orizontală a graficului invers proporțională cu a , codomeniul rămânând neschimbat.

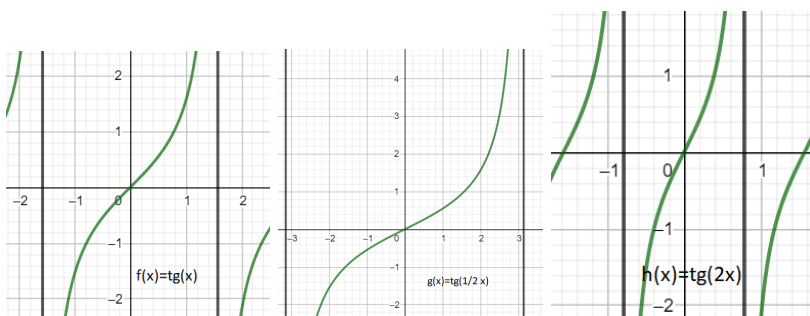


Fig. 4.34: Grafice ale funcțiilor $\text{tg}(ax)$ pentru diverse valori ale lui a

Pentru funcția $\text{tg}(ax)$ avem perioada determinată în același mod

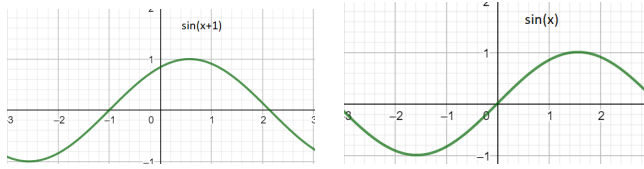
$$\text{tg}(a(x+T)) = \text{tg}(ax) \quad \Rightarrow \quad ax+aT = k\pi+ax \quad \Rightarrow \quad aT = k\pi \quad \forall k \in \mathbb{N}^*,$$

de unde

$$T = \frac{\pi}{a}.$$

4.5.7 Graficele funcțiilor $\sin(x+a)$, $\cos(x+a)$, $\text{tg}(x+a)$

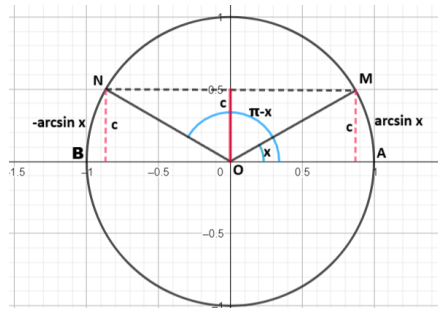
Graficele funcțiilor $\sin(x+a)$, $\cos(x+a)$, $\text{tg}(x+a)$ se obțin din graficele funcțiilor $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\text{tg}(x)$ printr-o translație a axei Oy cu valoarea a echivalentă cu translatarea graficului funcției pe direcția axei Ox cu valoarea $-a$.

Fig. 4.35: Grafice ale funcțiilor $\sin(x+a)$ și a lui $\sin(x)$

4.6 Rezolvarea ecuațiilor trigonometrice fundamentale

4.6.1 Rezolvarea ecuației $\sin(x) = c$.

Considerăm pentru exemplificare ecuația $\sin(x) = c$, $0 \leq c \leq 1$. Folosim cercul trigonometric cu notațiile uzuale. Măsurarea sinusului

Fig. 4.36: Soluțiile ecuației $\sin x = c$, $c \in [0, 1]$.

se face pe axa Oy , deci vom pune un segment de lungime c pe această axă, segmentul OD , în partea pozitivă a axei. Prin extremitatea acestui segment ducem o paralelă la Ox care taie cercul în punctele M și N . Unghiurile care au sinusul egal cu c vor fi $\widehat{AOM}$ și $\widehat{AON}$. Arcul de cerc AM care este măsurat de la A către M , deci în sens direct trigonometric, se va numi $\arcsin(c)$. Raportul dintre lungimea arcului și raza cercului ne va da mărimea în radiani a unghiului $\widehat{AOM}$. Observăm că lungimea arcului AM este egală cu lungimea arcului BN deci avem unghiul $\widehat{AOM} \equiv \widehat{BON}$. Arcul BN măsurat de la B către N va avea măsura $-\arcsin(c)$, deci măsura în radiani a unghiului $\widehat{AON}$ este $\pi - \arcsin(c)$. În concluzie, soluțiile ecuației

$$\sin(x) = c, \quad 0 \leq c \leq 1 \quad \text{sunt} \quad x = \arcsin(c), \quad x = \pi - \arcsin(c) \quad (4.70)$$

Observăm că în cazul în care $c = 0$ soluțiile sunt $x = 0$ și $x = \pi$ iar pentru $c = 1$ avem o singură soluție $x = \frac{\pi}{2}$.

Procedăm similar în cazul $-1 < c < 0$, ținând cont de sensul de parcurgere a arcelor. Soluțiile ecuației

$$\sin(x) = c \quad -1 < c < 0 \quad (4.71)$$

sunt

$$x = 2\pi - \arcsin(c), \quad x = \pi + \arcsin(c).$$

Având în vedere că funcția $\arcsin$ are aceeași paritate cu funcția $\sin$ și că $2\pi - \arcsin(c) = -\arcsin(c)$ rezultă că în intervalul $[0, 2\pi]$ soluțiile ecuației

$$\sin(x) = c \quad , \quad c \in [-1, 1]$$

sunt:

$$x = \arcsin(c), \quad \text{și} \quad x = \pi - \arcsin(c). \quad (4.72)$$

Observația 4.11. Dacă $x = \alpha$ este o soluție a ecuației $\sin x = c$, atunci orice x de forma α plus un multiplu de 2π este soluție a ecuației.

Putem astfel să determinăm forma soluției generale a ecuației $\sin x = c$. Pornind de la soluțiile date de 4.72 vedem că dacă adunăm un multiplu de 2π la soluția $x = \arcsin c$ obținem o soluție de forma

$$x = 2k\pi + \arcsin c \quad k \in \mathbb{Z},$$

iar dacă adunăm la soluția $x = \pi - \alpha$ obținem soluția

$$x = 2k\pi + \pi - \arcsin c = (2k + 1)\pi - \arcsin c \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Astfel că, la un număr par de multipli de π adunăm $\arcsin c$, iar la un număr impar de multipli de π scădem $\arcsin c$. Știm că $(-1)^k$ este 1 pentru k par și -1 pentru k impar deci putem scrie soluția generală a ecuației $\sin x = c$.

$$\sin x = c \quad \Leftrightarrow \quad x = k\pi + (-1)^k \arcsin c. \quad (4.73)$$

Rezolvarea ecuațiilor de forma $\sin(u) = \sin(v)$ unde u și v depind de o variabilă x

Fie $u = u(x)$ și $v = v(x)$, x într-un domeniu dat. Folosim formula 4.73 și obținem:

$$\sin(u) = \sin(v) \quad \Rightarrow \quad u = k\pi + (-1)^k \arcsin(\sin(v)).$$

Dar

$$\arcsin(\sin(v)) = v$$

deci relația anterioară devine

$$u = k\pi + (-1)^k v. \quad (4.74)$$

Din relația 4.74 determinăm două relații distincte, date de cazurile în care $k = 2n$ sau $k = 2n + 1$. Astfel:

$$u = 2n\pi + v \quad \text{și} \quad u = (2n + 1)\pi - v. \quad (4.75)$$

Relațiile anterioare ne dau **două ecuații ce nu formează sistem** și pe care, după ce înlocuim u și v cu expresiile lor în x , le rezolvăm și obținem soluțiile ecuației inițiale.

Exemple:

1. Ecuația $\sin x = \frac{1}{2}$ are soluțiile $x = \frac{\pi}{6}$ și $x = \pi - \frac{\pi}{6}$ adică $\frac{\pi}{6}$ și $x = \frac{5\pi}{6}$.

2. Ecuația $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ va avea soluțiile $x = \frac{\pi}{3}$ și $x = \frac{2\pi}{3}$.

3. Ecuația $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ are soluțiile $x = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ și $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$.

4. Să se rezolve ecuația $\sin\left(x + \frac{\pi}{9}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Soluțiile sunt: $x + \frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{4}$ de unde $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{9} = \frac{5\pi}{36}$ și

$x + \frac{\pi}{9} = \pi - \frac{\pi}{4}$, deci $x + \frac{\pi}{9} = \frac{3\pi}{4}$ de unde obținem soluția $x = \frac{23}{36}\pi$.

5. Să se determine soluția generală a ecuației $\sin x = 0,6$.
Folosim direct formula dată de 4.73:

$$x = k\pi + (-1)^k \arcsin(0,6) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Să se determine soluția generală a ecuației $\sin(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Scriem soluția generală pentru argumentul egal cu $2x$.

$$2x = k\pi + (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}.$$

Împărțim cu 2 ambii membri ai egalității

$$2x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{3}$$

și obținem

$$x = \frac{k\pi}{2} + (-1)^k \frac{\pi}{6} \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.76)$$

Dacă dorim să găsim soluția în intervalul $[0, 2\pi]$ va trebui să dăm patru valori lui k și anume 0, 1, 2, 3.

$$k = 0 \Rightarrow x = 0 + \frac{\pi}{6} \quad x = \frac{\pi}{6}.$$

Verificăm dacă soluția este bună $2x = \frac{\pi}{3}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Adevărat.

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Pentru verificare avem $2x = \frac{2\pi}{3}$ și $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$k = 2 \Rightarrow 2x = \pi + \frac{\pi}{6}, \quad x = \frac{7\pi}{6}$$

În acest caz avem $2x = \frac{7\pi}{3}$, $\sin\left(\frac{7\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$k = 3 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \quad x = \frac{8\pi}{6} = \frac{4\pi}{3}.$$

Avem $\sin\left(2 \cdot \frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{8\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. Să se rezolve ecuația

$$\sin(2x) = \sin(3x).$$

În acest caz avem $u(x) = 2x$, $v(x) = 3x$. Scriem direct, pe rând, ecuațiile 4.75 și avem:

$$2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow -x = 2k\pi$$

și cum $k \in \mathbb{Z}$ obținem prima soluție de forma

$$x = 2k\pi.$$

Din a doua ecuație avem:

$$2x = (2k + 1)\pi - 3x \Rightarrow 5x = (2k + 1)\pi.$$

A doua soluție este deci

$$x = \frac{(2k + 1)\pi}{5}.$$

Dacă în cazul primului tip de soluții se observă că $\sin(2x) = \sin(3x) = 0$ pentru cel de al doilea tip de soluții, deși nu este necesar, putem face o verificare a lor în intervalul $[0, 2\pi]$.

Pentru $k = 0$ avem $x = \frac{\pi}{5}$.

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$$

adevărat pentru că $\frac{3\pi}{5} = \pi - \frac{2\pi}{5}$ și $\sin(\alpha) = \sin(\pi - \alpha)$.

Dacă $k = 1$ soluția este $x = \frac{3\pi}{5}$.

$$\sin\left(\frac{6\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{5}\right)$$

adevărat și în acest caz fiindcă

$$\frac{6\pi}{5} = \pi + \frac{\pi}{5}, \quad \frac{9\pi}{5} = 2\pi - \frac{\pi}{5} \quad \text{și} \quad \sin(\pi + \alpha) = \sin(2\pi - \alpha).$$

8. Să se rezolve ecuația

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

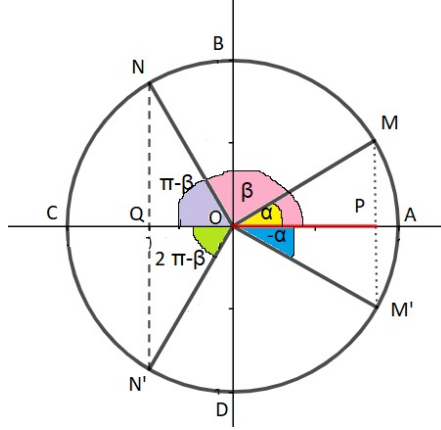
4.6.2 Rezolvarea ecuației $\cos(x) = c$.

Valorile funcției cosinus se măsoară pe axa Ox , deci pentru a rezolva ecuația $\cos(x) = c$, $c \in [-1, 1]$ raționăm astfel: Pe axa Ox plasăm, pornind din origine, un segment de lungime $|c|$ în sensul de creștere al lui x dacă c este pozitiv și în sens contrar dacă este negativ. Prin extremitatea acestui segment se duce o paralelă la axa Oy care taie cercul trigonometric în două puncte M și M' . Arcele AM și AM' au lungimea $\arccos(c)$. Cum AM' este măsurat în sens invers trigonometric rezultă că soluțiile ecuației

$$\cos(x) = c \quad \text{sunt} \quad x = \pm \arccos(c).$$

În general avem:

$$\cos(x) = c \quad \Leftrightarrow \quad x = 2k\pi \pm \arccos(c) \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.77)$$

Fig. 4.37: Soluțiile ecuației $\cos x = c$

Rezolvarea ecuațiilor de forma $\cos(u) = \cos(v)$, unde u și v depind de o variabilă x .

Sub forma generală, ecuația $\cos(u) = \cos(v)$ are soluția

$$u = 2k\pi \pm \arccos(\cos(v)), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ținem cont că $\arccos(\cos(v)) = v$ și rezultă:

$$u = 2k\pi \pm v, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.78)$$

Obținem astfel două ecuații în variabila x care nu formează sistem și anume:

$$u(x) + v(x) = 2k\pi$$

care rezolvată în raport cu variabila x ne conduce la un prim set de soluții ale ecuației inițiale, și

$$u(x) - v(x) = 2k\pi$$

de unde similar ca mai înainte obținem cel de al doilea set de soluții.

Rezolvarea ecuațiilor de forma $\cos(u) = \sin(v)$, unde u și v depind de o variabilă x .

Ținem cont că $\sin(v) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - v\right)$ și astfel ecuația se reduce la una de forma $\cos(u) = \cos(w)$.

Exerciții:

1. Să se rezolve ecuația $\cos(x) = \frac{1}{2}$.
Rez. Cosinusul ia valoarea $\frac{1}{2}$ în $\frac{\pi}{3}$. Soluția ecuației este $x = \pm \frac{\pi}{3}$.
2. Să se rezolve ecuația $\cos(x) = 0$.
Sol. $x = \pm \frac{\pi}{2}$
3. Să se rezolve ecuația $\cos(x) = -1$.
Sol. $x = \pi$.
4. Să se determine soluția generală a ecuației $\cos(x) = 0, 6$.
Sol. $x = 2k\pi \pm \arccos(0, 6)$.
5. Să se rezolve ecuația $\cos(5x) = \cos(2x)$.
Sol. Înlocuim direct în relația 4.78 $u = 5x$ și $v = 3x$ obținând:
 $5x = 2k\pi \pm 3x$.
De aici avem pe rând

$$5x - 3x = 2k\pi \Rightarrow 2x = 2k\pi \Rightarrow x = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}.$$

și

$$5x + 3x = 2k\pi \Rightarrow 8x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{4}. \quad k \in \mathbb{Z}.$$

6. Să se rezolve ecuația

$$\cos(3x) = \sin(2x).$$

Folosim identitatea $\sin(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right)$ și aducem ecuația inițială la forma

$$\cos(3x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right).$$

Înlocuim în relația 4.78 și avem:

$$3x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

Pe rând obținem ecuațiile:

(a)

$$3x + 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

de unde

$$5x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{(4k+1)\pi}{2},$$

cu soluția:

$$x = \frac{(4k+1)\pi}{10}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

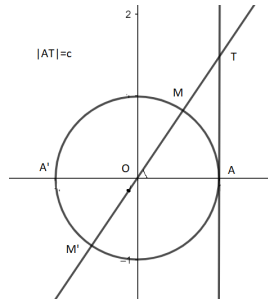
(b)

$$3x - 2x = 2k\pi - \frac{\pi}{2},$$

care ne conduce la soluția

$$x = \frac{(4k-1)\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

4.6.3 Rezolvarea ecuațiilor de forma $\operatorname{tg}(x) = c$

Fig. 4.38: Soluțiile ecuației $\operatorname{tg}(x) = c$

Considerăm tangenta în A la cercul unitate și plasăm pe ea segmentul AT a cărui lungime este c . În figura 4.38 observăm că arcul AM este egal cu arcul $A'M'$. Mărima în radiani a acestor arce o vom nota cu $\arctg(c)$. Vom avea astfel două soluții ale ecuației date și anume :

$$\operatorname{tg}(x) = c \quad \Rightarrow \quad x = \arctg(c) \quad \text{și} \quad x = \pi + \arctg(c). \quad (4.79)$$

Ținând cont că $\arctg(-\alpha) = -\arctg(\alpha)$ soluția dată de 4.79 își păstrează forma și pentru $c < 0$. Soluția generală a acestei ecuații este:

$$\operatorname{tg}(x) = c \quad \Rightarrow \quad x = k\pi + \arctg(c) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Rezolvarea ecuațiilor de forma $\operatorname{tg}(u) = \operatorname{tg}(v)$ unde u și v depind de variabila x

$$\operatorname{tg}(u) = \operatorname{tg}(v) \quad \Rightarrow \quad u = k\pi + v.$$

Trecem totul în variabila x și obținem o singură ecuație în x pe care o rezolvăm.

Rezolvarea ecuațiilor de forma $\operatorname{tg}(u) = \operatorname{ctg}(v)$ unde u și v depind de variabila x

Ținem cont că $\operatorname{ctg}(\alpha) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ și avem

$$\operatorname{tg}(u) = \operatorname{ctg}(v) \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg}(u) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - v\right) \quad \Leftrightarrow \quad u = k\pi + \frac{\pi}{2} - v.$$

Trecem tot în variabila x și rezolvăm această singură ecuație.

Exerciții

1. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}(x) = 1$.

Sol. Se scrie direct soluția $x = \frac{\pi}{4}$ și $x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$. Soluția generală este $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Să se rezolve ecuația $\operatorname{tg}(2x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Sol. Notăm $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = v$ și scriem soluția generală a ecuației $\operatorname{tg}(u) = v$. Avem:

$$u = k\pi + \operatorname{arctg}(v)$$

Cum $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(\alpha)) = \alpha$ rezultă că

$$\operatorname{arctg}(v) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right) = x - \frac{\pi}{3}.$$

Înlocuim în soluția generală pe u și $\operatorname{arctg}(v)$ obținând:

$$2x = k\pi + x - \frac{\pi}{3}.$$

Trecem x în membrul stâng și rezultă că soluția generală a ecuației date este

$$x = k\pi - \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

4.7 Mișcări oscilatorii

4.7.1 Oscilații de forma $f(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0)$

Mișcarea unui corp care se repetă la intervale egale de timp poartă numele de mișcare periodică. Ea este o mișcare oscilatorie regulată. Această mișcare se efectuează de o parte și de alta a unui punct fix numit poziție de echilibru. Mișcarea este simetrică față de acest punct și se produce între două poziții limită. Caracteristicile unei mișcări periodice sunt:

1. **Elongația** - este dată de distanța față de poziția de echilibru la un moment dat de timp.
2. **Amplitudinea** - este distanța maximă la care se poate afla corpul față de poziția de echilibru (punctul fix în raport cu care se face oscilația). Notăția uzuală este A . Se măsoară în metri.
3. **Perioada și frecvența** - Perioada este timpul în care se efectuează o oscilație completă. Inversul perioadei poartă numele de frecvență. Pentru perioadă notația uzuală este T și se măsoară în secunde. Pentru frecvență notația este ν , avem relația $\nu T = 1$. Frecvența se măsoară în Hertzi (notat Hz). Un $Hz = \frac{1}{s}$.
4. **Faza mișcării** - Se notează cu $\varphi(t)$ și caracterizează poziția oscilatorului la un moment de timp dat. Este formată din faza inițială, notată φ_0 , (o constantă care precizează poziția la momentul $t=0$) plus faza temporală, notată ωt , (dependentă de timp). Faza este o mărime care se măsoară în radiani. Faza mișcării va fi $\varphi(t) = \omega t + \varphi_0$ unde $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$. ω se numește **pulsația mișcării**.
5. **Ecuția elongației** - Mișcarea se poate produce, de exemplu, în lungul axei Ox (1), în lungul axei Oy (2) sau combinată (3). Ecuțiile elongației pentru cazurile (1), (2) și (3) sunt date de

$$\begin{array}{ll} 1. & x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0) \\ 2. & y(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0) \end{array} \quad 3. \left\{ \begin{array}{l} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{01}) \\ y(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_{02}) \end{array} \right. \quad (4.80)$$

Să presupunem că avem o mișcare oscilatorie în lungul axei Ox dată de ecuația

$$x(t) = 2 \cos(3t + 1)$$

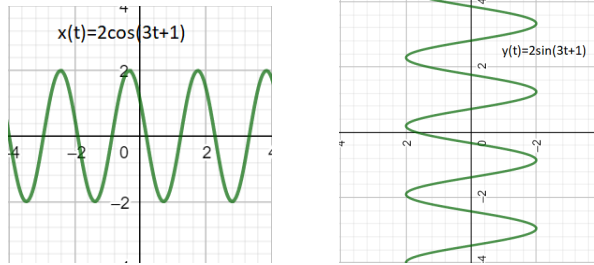


Fig. 4.39: Mișcare periodică în lungul axei Ox și în lungul axei Oy

și, simultan, în lungul axei Oy o mișcare dată de ecuația

$$y(t) = 2 \sin(3t + 1).$$

Cele două mișcări sunt redată în figura 4.39

Dacă cele două mișcări se produc simultan, observând că ele au aceeași amplitudine și aceeași fază, putem elimina variabila t în sistemul de ecuații (3).

$$(2 \cos(3t + 1))^2 + (2 \sin(3t + 1))^2 = 4$$

Ecuația carteziană implicită a mișcării va deveni:

$$x^2 + y^2 = 4$$

deci corpul se va mișca pe un cerc centrat în origine și de rază 2.

4.7.2 Oscilații de tipul $f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$

Să considerăm acum o mișcare de tipul

$$f(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t).$$

Expresia $a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ o vom prelucra astfel:

- Normalizăm expresia, adică dăm factor comun forțat pe $\sqrt{a^2 + b^2}$.
Avem

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos(\omega t) + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin(\omega t) \right) \quad (4.81)$$

Dar

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = \frac{a^2}{a^2 + b^2} + \frac{b^2}{a^2 + b^2} = 1. \quad (4.82)$$

Rezultă că există un unghi φ_0 pentru care $\sin(\varphi_0) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ și, simultan, $\cos(\varphi_0) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Atunci, putem rescrie funcția astfel

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} [\sin(\varphi_0) \cos(\omega t) + \cos(\varphi_0) \sin(\omega t)]. \quad (4.83)$$

Știind că:

$$\sin(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\beta) \cos(\alpha) = \sin(\alpha + \beta)$$

rezultă că:

$$f(t) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (4.84)$$

ceea ce reprezintă o mișcare periodică de amplitudine $A = \sqrt{a^2 + b^2}$, perioadă $T = \frac{2\pi}{\omega}$ și fază $\omega t + \varphi_0$.

4.7.3 Exerciții:

1. Considerăm o oscilație de amplitudine $\sqrt{2} \text{ cm}$, perioadă 2 s și fază inițială φ_0 . Să se determine pulsația, faza inițială dacă la $t=4 \text{ s}$ elongația este 1 cm și timpul la care elongația este prima dată egală cu amplitudinea.

Soluție: - Pulsația: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

- Faza inițială: La momentul $t = 4 \text{ s}$ elongația este 1 cm deci

$$y(4\text{s}) = A \sin(\omega \cdot 4 + \varphi_0) = \sqrt{2} \sin(4\pi + \varphi_0) = \sqrt{2} \sin(\varphi_0).$$

Știm că elongația la acest moment este 1 de unde rezultă că

$$\sqrt{2} \sin(\varphi_0) = 1, \quad \sin(\varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{de unde } \varphi_0 = \frac{\pi}{4}.$$

- Momentul la care elongația este prima dată egală cu amplitudinea. Ecuația de mișcare a oscilatorului este dată de

$$y(t) = \sqrt{2} \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right).$$

La momentul $t = 0$ amplitudinea este $y(0) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \text{ cm}$ și pentru început crește. Deci elongația va fi prima dată egală cu amplitudinea când sinusul va fi egal cu 1. De aici avem

$$\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \pi t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}, \quad \pi t = \frac{\pi}{4}, \quad t = \frac{1}{4}.$$

2. Considerăm o oscilație dată de ecuația

$$f(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 4 \sin\left(\frac{\pi}{4}t\right).$$

Transformați ecuația dată într-o ecuație a unui oscilator armonic și determinați amplitudinea ei, pulsația și faza inițială.

Soluție: Folosind formulele 4.81-4.84 rezultă

$$\text{Amplitudinea este } A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Perioada este } T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ cu } \omega = \frac{\pi}{4}, \quad \text{deci vom avea } T = 8s.$$

$$\text{Faza inițială verifică sistemul: } \sin(\varphi_0) = \frac{3}{5}, \quad \cos(\varphi_0) = \frac{4}{5},$$

$$\text{Soluția este în primul cadran, } \varphi_0 = 0,6435rad \approx 36^\circ 53'.$$

II

Aritmetică și algebră

Capitolul 5

Aritmetică

5.1 Mulțimi de numere

Mulțimile de numere cu care lucrăm sunt:

1. Mulțimea numerelor naturale notată cu $\mathbb{N}$. Notăția provine de la cuvântul "natural". Numerele naturale sunt singurul tip de numere care au apărut firesc în procesul de numărare.
2. Mulțimea numerelor întregi notată cu $\mathbb{Z}$. Notăția provine din cuvântul german "zählen", a număra.
3. Mulțimea numerelor raționale notată cu $\mathbb{Q}$, a cărei notație provine din cuvântul german "Quotient". Aceste numere sunt scrise, în general, sub formă de fracție ordinară cu numărător și numitor întreg.
4. Mulțimea numerelor reale notată cu $\mathbb{R}$ este mulțimea care conține numerele raționale și pe cele iraționale.
5. Mulțimea numerelor complexe notată cu $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor de forma $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$.

5.1.1 Cardinalul unei mulțimi

Spunem că mulțimile A și B au același cardinal dacă poate fi definită o funcție bijectivă între ele. Dacă o mulțime este finită cardinalul ei este dat de numărul elementelor din mulțime. Pentru mulțimile de numere, infinite, cu care lucrăm avem două posibilități:

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ pot fi puse în bijecție iar cardinalul lor $\aleph_0$ este numit infinitul numărabil. Simbolul $\aleph_0$ se citește *alef 0*.

2. Mulțimea numerelor iraționale $\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ nu pot fi puse în bijectie cu $\mathbb{N}$ dar pot fi puse în bijectie între ele. Cardinalul lor se numește infinit de puterea continuului, are valoarea $2^{\aleph_0}$ și se notează cu $\mathfrak{c}$.

5.1.2 Sistem pozițional de notare

Cifrele sunt un sistem de simboluri cu care sunt formate numerele. Numărul de simboluri din set ne dă baza de numerație folosită. În prezent folosim pentru cifre simbolurile 1,2,3,4,5,6,7,8,9,0 deci baza de numerație este 10. Simbolurile folosite pentru cifre provin din India pe filieră arabă și de aceea s-a încetățenit denumirea de cifre arabe. Pentru scrierea numerelor folosim alături de cifre și o convenție care se numește sistem pozițional zecimal de numerație. În cadrul acestui sistem o cifră dintr-un număr are valoarea dată de valoarea cifrei înmulțită cu o putere a lui 10 dependentă de poziția cifrei în număr. Numerele sunt formate din partea întreagă, marca zecimală și partea zecimală. Marca zecimală este reprezentată în cazul României, de exemplu, de „,” iar în cazul american de „.” Pornind de la marca zecimală spre stânga prima cifră, cifra unităților, are valoarea ei înmulțită cu 10^0 , a doua, care se numește cifra zecilor, are valoarea ei înmulțită cu 10^1 , a treia, cifra sutelor, are valoarea ei înmulțită cu 10^2 . Avem o organizare în ordine și ordinele sunt grupate în clase. Astfel avem ordinul unităților, zecilor, sutelor care formează clasa unităților, ordinul miilor, al zecilor de mii, al sutelor de mii, aceste trei formând clasa miilor, ordinul milioanei, al zecilor de milioane, al sutelor de milioane, care formează clasa milioanei și așa mai departe. Pentru partea zecimală se folosesc puterile negative ale bazei pornind spre dreapta de la 10^{-1} , ordinul zecimilor, 10^{-2} al sutimilor ș.a.m.d. 6543210,987 este numărul șasemilioanecincisutepatruzecișitreidemiidouă sutezece, nouă sutezeceșisăptedemiimi. Notăția cu gruparea pe clase este 6.543.210,987

Observația 5.1. *Denumirile și simbolurile cifrelor preluate de la indieni sunt:*

1 eka, 2 dvi, 3 tri, 4 catur, 5 panca, 6 șaș, 7 sapta, 8 așta, 9 nava, 0 sunya. Sunya ajunge în arabă sifr care se transforma în Europa în cifră, cuvânt care dă denumirea tuturor simbolurilor folosite în sistemul zecimal pozițional. Sifr se păstrează în limbile arabe pentru cifra zero dar în Europa în timpul Renășterii, în Italia, denumirea sifr pentru 0 se transformă în zefiro care mai târziu ajunge zero.

5.2 Numere naturale

Mulțimea numerelor naturale o putem prezenta sub formă de listă astfel

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Observația 5.2. 1. Numărul 0 nu este un număr natural. El a fost introdus în matematică din necesitate. Este cunoscut din jurul anilor 300 e.n. în matematica indiană, preluat de arabi în jurul anilor 800, folosit în Europa după 1200 prin lucrările lui Leonardo di Pisa (Fibonacci) și început să fie utilizat pe scară largă în Europa după 1400 împreună cu sistemul zecimal pozițional și cifrele indo-arabe. În manualele școlare din România, din rațiuni de notații unitare numărul 0 este inclus forțat în mulțimea numerelor naturale. Deși semnificația lui 0 poate să fie și nimic, prezența lui în sistemul zecimal pozițional este foarte importantă, existența lui într-o anumită poziție având semnificație în evaluarea mărimii numărului.

2. În descrierea mulțimii $\mathbb{N}$, prima secvență ... indică prezența acolo a tuturor numerelor naturale de la 4 la $n - 1$, iar a doua secvență de ... indică faptul că mulțimea este nemărginită la dreapta. **Pentru fiecare număr natural există un număr natural cu o unitate mai mare decât el.**

3. Mulțimea numerelor naturale are o infinitate de numere. Acest tip de infinit se numește infinit numărabil și este cel mai mic tip de infinit. Câte elemente sunt în $\mathbb{N}$ poartă numele de cardinalul lui $\mathbb{N}$. Cardinalul lui $\mathbb{N}$ se notează cu $\aleph_0$. Două proprietăți ale lui $\aleph_0$

i)

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avem } \aleph_0 + n = \aleph_0$$

ii)

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0.$$

Exemplu: Să presupunem că există două hoteluri HA și HB plasate pe câte o linie dreaptă și care au următoarele proprietăți:

- HA are un număr finit de camere toate ocupate;
- pentru orice cameră din hotelul HB există o cameră la dreapta ei.

Este evident că hotelul HB are o infinitate numărabilă de camere deci are $\aleph_0$ camere. Presupunem că și hotelul HB are toate camerele ocupate. Un turist vine și vrea să se cazeze la hotelul

HA dar primește răspuns că toate camerele sunt ocupate. Merge la hotelul HB iar aici primește răspunsul "Cu plăcere". La o comandă fiecare turist cazat în hotelul HB trece în camera următoare (care există pentru toți) și prima cameră devine liberă. Am verificat astfel că proprietatea i) este adevărată.

Dacă vin tot atâția clienți câți sunt cazați în HB, pentru toți poate exista o cameră liberă astfel: (identificăm clienții cu numărul camerei) 1 se muta în 3, 2 se muta în 5, 3 se mută în 7,..., n se mută în 2n+1,... Camerele 2, 4, 6, ... , 2n, ... devin libere și turiștii t1, t2, ..., tn, .. se vor muta în camerele libere t1 în 2, t2 în 4,..., tn în 2n,... Astfel am verificat și a doua proprietate.

5.3 Numere întregi

Mulțimea numerelor întregi cuprinde numerele naturale, numărul zero și numerele negative.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$$

Observația 5.3. 1. Numărul -1 apare în matematica indiană în jurul anu-lui 600 e.n. Este interesant și pare total nefiresc cum a fost el caracterizat când a fost introdus:

"Dacă într-o cameră se află o persoană și din cameră ies două persoane atunci trebuie să mai intre o persoană ca în cameră să nu fie nimeni."

$$1 + (-1) = 0.$$

Ajunge în lumea arabă în jurul anilor 800 și în Europa vestică după anul 1200.

5.3.1 Operații cu numere naturale și numere întregi

Adunarea numerelor naturale

Adunarea a două numere naturale se face astfel:

- Se scriu numerele unul sub celălalt aliniate la dreapta, unități sub unități, zeci sub zeci, s.a.m.d.
- Pornim de la cifrele din ordinul unităților și le adunăm. Dacă suma lor nu depășește 9 păstrăm rezultatul și trecem la ordinul următor. Dacă suma unităților este mai mare decât nouă păstrăm cifra unităților din sumă și cifra zecilor se reportează la adunarea cifrelor zecilor. Procedeu se păstrează pentru toate ordinele.

De exemplu:

$$\begin{array}{r} 23645 \\ + 5742 \\ \hline 29387 \end{array}$$

Avem: $2 + 5 = 7$ scriem la rezultat cifra unităților 7, trecem la ordinul zecilor, $4 + 8 = 12$, trecem 2 la ordinul zecilor în rezultat, trecem la ordinul sutelor, $3 + 6 = 9$, scriem 9 pe poziția sutelor în rezultat și ”ținem minte 1, cifra zecilor din adunarea lui 7 cu 6”. Acel 1 se reportează la ordinul miilor. Adunăm cifrele de pe poziția miilor din numerele date adunând și cifra 1 pe care am reportat-o. $3 + 5 + 1 = 9$, cifră pe care o scriem la ordinul miilor în rezultat. Zeci de mii avem numai în primul număr, nu avem nimic reportat de la ordinul miilor așa că scriem direct cifra zecilor de mii de la primul număr la ordinul zecilor de mii al numărului rezultat.

Scăderea numerelor naturale

Scăderea numărului natural b din numărul natural a are ca rezultat, în general, un număr întreg. Astfel, dacă $a > b$ obținem un număr natural, 0 dacă $a = b$ și un număr negativ dacă $a < b$. Scăderea este inversa operației de adunare. Astfel $a - b = c \Leftrightarrow b + c = a$.

Numărul a se numește descăzut, b este scăzător și c este diferența. Observăm că scăderea nu este o operație internă pe $\mathbb{N}$.

De exemplu, pentru $5742 - 29387$ avem $a < b$, efectuăm scăderea $b - a$ și schimbăm semnul rezultatului:

$$\text{Calculăm } \begin{array}{r} 29387 \\ - 5742 \\ \hline 23645 \end{array}, \text{ schimbăm semnul diferenței și rezultatul este}$$

-23645.

Observația 5.4. 1. Dacă adunăm sau scădem același număr la descăzut și scăzător diferența nu se schimbă.

2. Dacă adunăm sau scădem un număr la descăzut diferența se adaugă sau se scade cu același număr. De exemplu, dacă avem $24 - 17 = 7$ și mărim descăzutul cu 5 avem $29 - 17 = 12$, adică mărim descăzutul cu 5 mărim și diferența cu 5.

3. Dacă adunăm sau scădem un număr la scăzător la diferență scădem sau adunăm acel număr. De exemplu, dacă avem $13 - 8 = 5$ și pe 8 îl mărim la 10 operația devine $13 - 10 = 3$. Deci dacă mărim scăzătorul cu 2 micșorăm diferența cu 2.

Înmulțirea numerelor naturale

Pentru numere naturale înmulțirea poate fi privită ca o adunare repetată.

Dacă $a, b \in \mathbb{N}$ atunci $a \times b = \overbrace{a + a + \dots + a}^{b \text{ ori}}$. Numerele a și b sunt numiți factori ai produsului.

Numărul de cifre al unui produs

Propoziția 5.1. *Dacă numărul a are n cifre și numărul b are m cifre atunci $a \times b$ are $n+m-1$ sau $n+m$ cifre.*

5.3.2 Teorema împărțirii cu rest

Teorema 5.1. *Fie a și b două numere naturale, $a > b$. Există atunci numerele $k \in \mathbb{N}$ și $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ astfel încât*

$$a = b \cdot k + r, \quad 0 \leq r < b. \quad (5.1)$$

a se numește deîmpărțit, b se numește împărțitor, k se numește cât iar r se numește rest.

Observația 5.5. *Teorema împărțirii cu rest funcționează și pentru numere întregi. În acest caz enunțul este:*

Fie a, b două numere întregi, $|a| > |b|$, $b \neq 0$. Există numerele $k \in \mathbb{Z}$ și $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ astfel încât

$$a = b \cdot k + r, \quad 0 \leq r < |b|.$$

În continuare vom considera doar cazul $a, b \in \mathbb{N}$.

Observația 5.6. *Dacă $r=0$ spunem că b divide pe a . Numărul b se numește divizor al lui a .*

Notăm mulțimea divizorilor lui a cu $\mathcal{D}_a$.

Observația 5.7. $\mathcal{D}_a \neq \emptyset$.

Afirmația este evidentă pentru că 1 și a aparțin lui $\mathcal{D}_a$.

Elementele 1 și a se numesc divizori improprii iar restul divizorilor lui a sunt divizori proprii.

Exemple:

$$\mathcal{D}_{(24)} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12, 24\}$$

$$\mathcal{D}_7 = \{1, 7\}.$$

5.3.3 Criterii de divizibilitate

- Divizibilitatea cu 2 - ultima cifră a numărului trebuie să se dividă cu 2.
- Divizibilitatea cu 3 - suma cifrelor numărului trebuie să se dividă cu 3.
- Divizibilitatea cu 4 - ultimele două cifre ale numărului trebuie să fie un număr divizibil cu 4.
- Divizibilitatea cu 5 - ultima cifră trebuie să fie 0 sau 5.
- Divizibilitatea cu 6 - numărul să fie divizibil cu 2 și cu 3.
- Divizibilitatea cu 7 - Un număr este divizibil cu 7 dacă diferența dintre suma claselor de ordin impar și suma claselor de ordin par este un număr divizibil cu 7. De exemplu pentru numărul 10.025.435 suma claselor de ordin impar este $435+10=445$ iar suma claselor de ordin par este 25; $445-25=420$ care e un număr divizibil cu 7 deci 10.025.435 este divizibil cu 7. La fel pentru 23.145.031.332 avem: $(332+145)-(31+23)=477-54=423=\mathcal{M}_7 + 3$ deci numărul nu e divizibil cu 7.
- Divizibilitatea cu 8 - ultimele trei cifre ale numărului trebuie să fie un număr divizibil cu 8.
- Divizibilitatea cu 9 - Suma cifrelor numărului trebuie să fie multiplu de 9.
- Divizibilitatea cu 10 - ultima cifră trebuie să fie 0.
- Divizibilitatea cu 11 - Diferența dintre suma cifrelor situate pe poziții pare și suma cifrelor de pe poziții impare trebuie să fie multiplu de 11. De exemplu, pentru 534217 avem $7+2+3=12$, $1+4+5=10$, $12-10=2$. Numărul este $\mathcal{M}_{11} + 2$, numărul nu este divizibil cu 11. Pentru 7843 avem $3+8=11$, $4+7=11$, $11-11=0$, deci este divizibil cu 11.

Observația 5.8. *Notăția pentru afirmația "a divizibil cu b" este $a:b$. Notăția pentru afirmația echivalentă "b divide pe a" este $b \mid a$.*

5.3.4 Numere prime

Definiția 5.1. *Spunem că $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ este număr prim dacă $\mathcal{D}_p = \{1, p\}$.*

Numerele întregi care au și divizori proprii se numesc numere compuse.

Observația 5.9. *Numărul 1 NU este nici prim nici compus. Primul număr prim este 2 și este singurul număr par care este prim.*

Teorema 5.2. *Cel mai mic divizor propriu al unui număr compus este un număr prim.*

Observația 5.10. *Dacă b este un divizor al lui a atunci și $c = \frac{a}{b}$ este divizor al lui a .*

Următoarea afirmație nu este una elementară dar rezultatul ei trebuie menționat.

Teorema 5.3. *Mulțimea numerelor prime este infinită.*

Ciurul lui Eratostene

Fie $n \in \mathbb{N}$. Ciurul lui Eratostene este un algoritm care ne permite să determinăm toate numerele prime mai mici decât n .

- Scriem toate numerele de la 2 la n .
- În secvența numerică anterioară ștergem multiplii lui 2 începând cu 2^2 .
- Ștergem multiplii lui 3 începând cu 3^2 .
- Continuăm cu ștergerea multiplilor următorului număr prim începând cu p^2 și $p^2 < n$.
Ceea ce rămâne în secvență sunt toate numerele prime mai mici decât n .

Teorema 5.4. *Dacă numărul a admite un divizor compus $b < a$ atunci a admite și un divizor prim $p < b$.*

Pentru a determina dacă un număr a este prim determinăm întâi toate numerele prime p cu proprietatea că $p^2 < a$. Dacă niciunul dintre numerele prime determinate nu divide pe a atunci a este un număr prim.

Exemplu: Să determinăm dacă 197 este număr prim. Cel mai mic număr prim p cu $p^2 > 197$ este 17 pentru că $17^2 = 289 > 197$. Verificăm dacă 197 este divizibil cu 2, 3, 5, 7, 11, 13 și cum el nu este divizibil cu acești primi rezultă că 197 este număr prim.

Descompunerea unui număr natural în factori primi

Propoziția 5.2. *Orice număr natural admite o descompunere unică în factori primi*

Exemplu de astfel de descompunere și algoritmul utilizat

$$\begin{array}{r|l}
 9996 & 2 \\
 4998 & 2 \\
 2499 & 3 \\
 833 & 7 \\
 119 & 7 \\
 17 & 17
 \end{array}$$

$$9996 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 17$$

Numărul divizorilor unui număr natural

Propoziția 5.3. *Considerăm numărul natural n a cărui descompunere în factori primi este*

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

Atunci numărul divizorilor lui n este

$$(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_k + 1).$$

De exemplu, $3960 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$. Atunci avem $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 2$, $\alpha_3 = 1$ și $\alpha_4 = 1$. Numărul divizorilor lui 3960 este dat de $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot (\alpha_3 + 1) \cdot (\alpha_4 + 1)$ adică $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 48$.

Cel mai mare divizor comun

Definiția 5.2. *Fie a și b două numere naturale. Numim cel mai mare divizor comun al lor, prescurtat c.m.m.d.c. și notat (a, b) , cel mai mare număr care divide pe a și pe b .*

Propoziția 5.4. 1. *Orice divizor comun a două numere divide și pe (a, b) .*

2. *Dacă numerele a și b sunt înmulțite cu numărul natural c atunci*

$$(a \cdot c, b \cdot c) = c \cdot (a, b).$$

3. Căturile împărțirii lui a și b la (a, b) sunt două numere prime între ele

$$\frac{a}{(a, b)} = c_1, \quad \frac{b}{(a, b)} = c_2 \Rightarrow (c_1, c_2) = 1.$$

4. Dacă c divide produsul $a \cdot b$ și este prim cu a atunci c divide b .

Cel mai mic multiplu comun

Definiția 5.3. Cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b , prescurtat c.m.m.m.c. și notat $[a, b]$ este cel mai mic număr divizibil cu a și cu b .

Propoziția 5.5.

1. Dacă știm descompunerea în factori primi a două numere a, b atunci $[a, b]$ este dat de factorii lor comuni și necomuni luați la puterea cea mai mare.

$$1188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11, \quad 3675 = 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2. \Rightarrow$$

$$[1188, 3675] = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 = 1.455.300$$

2. Dacă știm descompunerea în factori primi a numerelor a și b atunci (a, b) este dat de produsul factorilor comuni luați la cea mai mică putere.

$$60984 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 11^2, \quad 2940 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2. \quad (60984, 2940) = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

- 3.

$$[a, b] \times (a, b) = a \cdot b.$$

De exemplu: Fie numerele 75 și 9. Atunci $(75, 9) = 3$, $[75, 9] = 225$,

$$[75, 9] \cdot (75, 9) = 225 \cdot 3 = 675 = 75 \cdot 9.$$

4. Pentru două numere prime între ele c.m.m.m.c. este dat de produsul lor. Formal acest lucru se scrie:

$$\text{Dacă } (a, b) = 1 \text{ atunci } [a, b] = a \cdot b.$$

De exemplu pentru $a=22$ și $b=13$ avem $[22, 13] = 22 \cdot 13 = 286$.

5. Dacă $c = \frac{[a, b]}{a}$ și $d = \frac{[a, b]}{b}$ atunci $(c, d) = 1$.

5.3.5 Algoritmul lui Euclid

Algoritmul lui Euclid este un procedeu prin care putem determina c.m.m.d.c. al unor numere date a și b , $a > b$.

1. Scriem teorema împărțirii cu rest pentru a și b :

$$a = b \cdot c_1 + r_1.$$

Dar c.m.m.d.c. al lui a și b divide pe a , divide pe b deci divide și pe r_1

2. Aplicăm teorema împărțirii cu rest pentru b și r_1 .

$$b = r_1 c_2 + r_2.$$

Rezultă că c.m.m.d.c. al lui a și b divide pe r_2 .

3. Continuăm procedeul până obținem restul egal cu 0. Dacă $r_{k+1} = 0$ atunci r_k este c.m.m.d.c al lui a și b .

Exemple: Fie $a=9075$ și $b=1155$.

$$\begin{aligned} 9075 &= 1155 \cdot 7 + 990 & r_1 &= 990 \\ 1155 &= 990 \cdot 1 + 165 & r_2 &= 165 \\ 990 &= 165 \cdot 6 + 0 & r_3 &= 0 & \text{ultimul rest nenul este } 165 \\ \textcolor{red}{(9075, 1155)} &= \textcolor{red}{165} \end{aligned}$$

Fie $a=3211$ și $b=482$. Avem pe rând

$$\begin{aligned} 3211 &= 482 \cdot 6 + 319 & r_1 &= 319 \\ 482 &= 319 \cdot 1 + 163 & r_2 &= 163 \\ 319 &= 163 \cdot 1 + 156 & r_3 &= 156 \\ 163 &= 156 \cdot 1 + 7 & r_4 &= 7 \\ 156 &= 7 \cdot 22 + 2 & r_5 &= 2 \\ 7 &= 2 \cdot 3 + 1 & r_6 &= 1 \\ 2 &= 1 \cdot 2 + 0 & r_7 &= 0 & \text{ultimul rest nenul este } 1 \\ \textcolor{red}{(3211, 482)} &= \textcolor{red}{1} & & & \text{cele două numere sunt prime între ele} \end{aligned}$$

5.4 Numere raționale

Mulțimea numerelor raționale este dată de numerele care pot fi scrise sub formă de raport de numere întregi. Această mulțime se notează cu $\mathbb{Q}$.

$$x \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}, \quad b \neq 0, \quad \text{a.i. } x = \frac{a}{b}.$$

Expresia $\frac{a}{b}$ poartă numele de fracție, a este numărătorul fracției, b este numitorul ei. Frațiile pot fi

$$\frac{a}{b} = \begin{cases} \textit{supraunitare} & a > b & \textit{Ex : } \frac{7}{5} \\ \textit{unitare} & a = b & \textit{Ex : } \frac{4}{4} \\ \textit{subunitare} & a < b & \textit{Ex : } \frac{3}{8} \end{cases}$$

Amplificarea unei fracții: Se realizează înmulțind numărătorul și numitorul cu același număr întreg n . Valoarea ei nu se modifică.

$$\frac{a}{b} = \frac{an}{bn}.$$

Simplificarea unei fracții: Considerăm fracția $\frac{a}{b}$. Dacă a și b admit divizor comun numărul n , adică $\exists k, l \in \mathbb{Z}$ a.i. $a = kn$, $b = ln$, fracția se poate simplifica împărțind numărătorul și numitorul ei la n . Valoarea fracției nu se schimbă.

$$\frac{a}{b} = \frac{kn}{ln} = \frac{k}{l}.$$

Compararea fracțiilor care au același numitor: Într-un șir de fracții care au același numitor ordinea crescătoare este dată de ordinea crescătoare a numărătorilor.

$$\frac{2}{7} < \frac{3}{7} < \frac{5}{7} < \frac{9}{7}.$$

Compararea fracțiilor care au același numărător: Într-un șir de fracții care au același numărător ordinea crescătoare a fracțiilor este dată de ordinea descrescătoare a numitorilor.

$$\frac{5}{9} < \frac{5}{7} < \frac{5}{4} < \frac{5}{2}.$$

Compararea fracțiilor care au numărători diferiți și numitori diferiți: Pentru a compara acest tip de fracții se aduc fracțiile la același numitor (prin amplificare) și apoi se face comparația.

$$\frac{7}{9} ? \frac{5}{6}. \quad \frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 2}{9 \cdot 2}, \quad \frac{5}{6} = \frac{5 \cdot 3}{6 \cdot 3}, \quad \frac{14}{18} < \frac{15}{18} \Rightarrow \frac{7}{9} < \frac{5}{6}.$$

5.4.1 Operații cu numere raționale

Un număr rațional $\frac{a}{b}$ pentru care $(a, b) = 1$ se numește *ireductibil*.

Considerăm două numere raționale ireductibile $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{d}$.

1. Adunarea numerelor raționale.

Adunarea a două numere raționale are ca rezultat tot un număr rațional. Ea se poate efectua dacă cele două numere au același numitor. Operația prin care se realizează acest deziderat se numește aducere la același numitor.

i) Dacă $b = d$ atunci numitorul comun este b și

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$

ii) Dacă b și d sunt prime între ele atunci numitorul comun este dat de produsul lor. Adunarea se face astfel:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

iii) Dacă b și d nu sunt prime între ele calculăm c.m.m.m.c $[b, d]$. Fie m acest multiplu și $m = kb$, $m = ld$. Atunci:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ka}{kb} + \frac{lc}{ld} = \frac{ka}{m} + \frac{lc}{m} = \frac{ka+lc}{m}.$$

2. Scăderea numerelor raționale

Scăderea numerelor raționale are ca rezultat tot un număr rațional. Ea se efectuează după aceleași reguli ca adunarea lor.

i) Dacă $b = d$ atunci numitorul comun este b și

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$

ii) Dacă b și d sunt prime între ele atunci numitorul comun este dat de produsul lor. Scăderea se face astfel:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} - \frac{cb}{bd} = \frac{ad-bc}{bd}.$$

iii) Dacă b și d nu sunt prime între ele calculăm c.m.m.m.c $[b, d]$. Fie m acest multiplu și $m = kb$, $m = ld$. Atunci:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ka}{kb} - \frac{lc}{ld} = \frac{ka}{m} - \frac{lc}{m} = \frac{ka-lc}{m}.$$

3. Înmulțirea numerelor raționale.

Rezultatul operației este tot număr rațional. Pentru a înmulți două numere raționale se înmulțesc numărătorii între ei și numitorii între ei.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}.$$

4. Împărțirea numerelor raționale

A împărți două numere raționale se reduce la a înmulți primul număr cu răsturnatul celui de al doilea număr. Se obține tot un număr rațional.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

5. Ridicarea la o putere întreagă a unui număr rațional.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} \frac{a^n}{b^n} & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ \frac{b^{-n}}{a^{-n}} & n < 0 \end{cases}$$

5.4.2 Forma zecimală a unui număr rațional

Forma zecimală a unui număr rațional se obține prin împărțirea numărătorului la numitor. Rezultatul se numește fracție zecimală și este un număr de forma

$$\frac{a}{b} = i_1 i_2 \dots i_p, z_1 z_2 \dots z_n \dots$$

unde $i_1 i_2 \dots i_p$ reprezintă cifrele care formează partea întreagă a numărului, „,” reprezintă marca zecimală iar $z_1 z_2 \dots z_n \dots$ reprezintă cifrele care formează partea zecimală a numărului. Avem, în cazul numerelor raționale, exact trei cazuri:

1. Dacă există k astfel încât toate cifrele situate la dreapta lui z_k sunt 0 (le putem deci omite) numărul admite o reprezentare zecimală finită.

$$\frac{1027}{8} = 128,325$$

2. Există k astfel încât secvența $z_1 z_2 \dots z_k$ se repetă la nesfârșit. Numărul se cheamă în acest caz număr periodic simplu de perioadă $z_1 z_2 \dots z_k$.

$$\frac{5}{7} = 0,714285714285714285\dots \stackrel{not}{=} 0,(714285).$$

3. Există l și k astfel încât partea zecimală a numărului să fie formată dintr-o parte neperiodică și o perioadă, $z_1 z_2 \dots z_l (z_{l+1} z_{l+2} \dots z_{l+k})$.

$$\frac{232}{700} = 0,33142857142857142857\dots = 0,33(142857)$$

5.4.3 Scrierea unei fracții zecimale sub formă de număr rațional

Toate numerele zecimale cu reprezentare finită sau periodice pot fi scrise sub forma unui număr rațional.

- Un număr zecimal cu reprezentare finită se obține scris sub formă de fracție astfel: La numărător se trec toate cifrele care formează numărul iar la numitor avem 10^k unde k este numărul de zecimale. Dacă această formă nu este ireductibilă se fac simplificările pentru a obține o fracție ireductibilă.

- Pentru numerele periodice simple avem următoarea regulă de scriere a părții zecimale formată dintr-o perioadă: la numărător scriem cifrele care formează perioada iar la numitor atâți de 9 câte cifre are perioada.

$$0,(325) = \frac{325}{999}, \quad 0,(3) = \frac{3}{9} \text{ care se poate reduce la } \frac{1}{3}$$

$$\textbf{ATENȚIE!} \quad 0,(9)=1.$$

- Scrierea părții zecimale a unui număr periodic mixt sub formă de fracție rațională se face astfel: la numărător se trec toate cifrele zecimale (atât partea neperiodică cât și cifrele care alcătuiesc perioada și din ele se scade partea care nu e perioadă. La numitor se scriu atâți de 9 câte cifre are perioada urmate de atâți de zero câte cifre are partea neperiodică.

$$0,123(45678) = \frac{12345678 - 123}{99999000}$$

5.4.4 Împărțirea a două numere zecimale

Fie a și b două numere zecimale în care a are n zecimale și b are m zecimale. Ca să facem împărțirea lui a la b utilizând teorema

împărțirii cu rest trebuie în primul rând să înmulțim pe a și pe b cu 10^m . Observăm că $a = b \cdot c + r \mid \cdot 10^m$ conduce la relația

$$10^m \cdot a = 10^m \cdot b \cdot c + 10^m \cdot r.$$

Câtul c nu se schimbă iar restul se înmulțește cu 10^m . Dacă $n \leq m$ deîmpărțitul și împărțitorul devin numere întregi, se face împărțirea cu rest obișnuită, iar pentru împărțirea originală câtul se păstrează și restul se împarte la 10^m .

Exemplu: Fie $a = 456,7$, $b = 6,35$. Să se calculeze $a : b$ folosind teorema împărțirii cu rest.

Observăm că $n = 1$ (a are o singură zecimală) și $m = 2$ (b are două zecimale). Teorema împărțirii cu rest este $a = b \cdot c + r$, $0 \leq r < b$. Înlocuind a și b rezultă

$$456,7 = 6,35 \cdot c + r, \quad 0 \leq r < 6,35.$$

Înmulțim această relație cu 10^2 și obținem:

$$45670 = 635 \cdot c + 100r$$

Astfel, în acest caz împărțirea devine o împărțire de numere naturale. Obținem $c = 71$, $100r = 585$ deci rezultatul final este

$$456,7 = 6,35 \cdot 71 + 5,85$$

Dacă $n > m$ fie $k = n - m$. Scriem teorema împărțirii cu rest, înmulțim cu 10^m și obținem

$$10^m \cdot a = 10^m \cdot b \cdot c + 10^m \cdot r.$$

Pentru ca operația să devină o împărțire de numere naturale trebuie să facem și deîmpărțitul număr natural așa că vom înmulți relația anterioară cu 10^k . Obținem:

$$10^m \cdot 10^k \cdot a = 10^m \cdot b \cdot 10^k \cdot c + 10^m \cdot 10^k \cdot r.$$

Rescriem ultima egalitate ținând cont că $m + k = n$

$$10^n \cdot a = 10^m \cdot b \cdot 10^k \cdot c + 10^n \cdot r. \quad (5.2)$$

Observăm că deîmpărțitul și împărțitorul au devenit numere naturale, câtul s-a înmulțit cu 10^k iar restul s-a înmulțit cu 10^n . Ținând cont de aceste lucruri putem scrie rezultatul final al împărțirii lui a la b utilizând teorema împărțirii cu rest.

Exemple:

1. Să se determine câtul și restul împărțirii lui 4321,857 la 24,35. Avem $n = 3$, $m = 2$, $k = n - m = 1$. Scriem împărțirea sub forma dată de teorema împărțirii cu rest

$$4321,857 = 24,35 \cdot c + r.$$

Vom face întâi împărțitorul număr natural înmulțind relația cu 100

$$432185,7 = 2435 \cdot c + 100r$$

Facem și deîmpărțitul număr natural înmulțind relația cu $10^k = 10$.

$$4321857 = 2435 \cdot 10 \cdot c + 1000r.$$

Efectuăm împărțirea lui 4321857 la 2435 folosind teorema împărțirii cu rest și obținem

$$4321857 = 2435 \cdot 1774 + 2167$$

De aici avem

$$10c = 1774 \Rightarrow c = 177,4, \quad 1000r = 2167 \Rightarrow r = 2,167$$

2. Încă un exemplu. Să determine câtul și restul împărțirii lui 4,5631 la 0,27. Avem $n = 4$, $m = 2$, $k = 2$. Scriem direct transformata dată de formula 5.2 și obținem:

$$45631 = 27 \cdot 100c + 10000r$$

Obținem:

$$100c = 1690, \Rightarrow c = 16,9, \quad 10000r = 1, \quad r = 0,00001$$

.

5.5 Numere reale

Mulțimea numerelor reale este compusă din mulțimea numerelor raționale $\mathbb{Q}$ și a celor iraționale $\mathbb{I}$. Numerele iraționale sunt numere zecimale cu o infinitate de zecimale și care nu sunt periodice. Există două categorii de numere iraționale, iraționalele algebrice și iraționalele transcendente. Iraționalele algebrice pot fi obținute ca soluții ale unei ecuații polinomiale cu coeficienți raționali. De exemplu $\sqrt{2}$ este una dintre soluțiile ecuației $x^2 = 2$. Existența lui a fost pusă în evidență încă de pe vremea lui Pitagora. Atunci s-a demonstrat că

lungimea diagonalei unui pătrat cu latura egală cu 1 nu poate fi scrisă ca raportul dintre două numere naturale. Numerele de tipul acesta au zdruncinat puternic concepțiile școlii lui Pitagora unde se considera că întreg universul era patronat de armonia rapoartelor raționale. Pitagora a numit aceste numere ca fiind "imposibile", în afara a ceea ce poate gândirea să producă, deci iraționale.

Pe lângă iraționalele algebrice există și iraționalele transcendente, numere care sunt iraționale dar nu pot fi obținute ca soluție a unei ecuații polinomiale cu coeficienți raționali. Exemple de astfel de numere sunt π și e -baza logaritmului natural.

Mulțimea numerelor iraționale este infinită și mult mai bogată decât $\mathbb{Q}$ care e numărabilă. Cardinalul lui $\mathbb{I}$ este al doilea ca mărime dintre cardinalele infinite. El se numește cardinal de puterea continuului și se notează cu $\mathfrak{c}$.

Teorema 5.5. 1. *Între oricare două numere raționale există un număr irațional.*

2. *Orice număr irațional poate fi obținut ca limita unui șir de numere raționale.*

3. *Orice număr rațional poate fi obținut ca limita unui șir de numere raționale.*

4. *Orice număr rațional poate fi obținut ca limita unui șir de numere iraționale.*

5. *Orice număr irațional poate fi obținut ca limita unui șir de numere iraționale.*

6. *Între oricare două numere reale există un număr real.*

5.5.1 Operații cu numere reale, ordinea operațiilor

Principalele operații cu numere reale sunt adunarea, înmulțirea, ridicarea la o putere. Scăderea și împărțirea sunt inversele operațiilor de adunare și înmulțire.

Formule de calcul prescurtat

Dăm în continuare câteva formule de calcul prescurtat utile .

$$\begin{aligned}
 a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\
 a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\
 a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\
 (a \pm b)^2 &= a^2 \pm 2ab + b^2 \\
 (a \pm b)^3 &= a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 \\
 a^3 + b^3 + c^3 - 3abc &= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc) \\
 a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc &= \frac{1}{2} [(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2] .
 \end{aligned}$$

Ordinea operațiilor

Într-o secvență cu mai multe operații ordinea executării lor este dată de următoarea precedență:

- Paranteze în ordinea $()$, $[\]$, $\{ \}$
- Ridicările la putere
- Înmulțiri și împărțiri, în ordinea apariției
- Adunări și scăderi, în ordinea apariției.

Această precedență poartă numele de PRIIAS.

Exemple:

1. Să se determine valoarea expresiei:

$$9 - 2 : (5 - 2)$$

Se fac calculele din paranteză $5 - 2 = 3$

Se face împărțirea obținând $\frac{2}{3}$

$$\text{Se face scăderea } 9 - \frac{2}{3} = \frac{27}{3} - \frac{2}{3} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3} = 8, (3).$$

2. Să se aducă la forma cea mai simplă expresia:

$$\left[\left(1\frac{1}{3} + 2\frac{2}{3} \right)^2 - (2, (6) - 0, (6))^2 \right] : \left(\frac{4}{3} + 2 \cdot 2\frac{2}{3} - 0, (6) \right)$$

În paranteza pătrată avem prima paranteză rotundă $\frac{4}{3} + \frac{8}{3} = \frac{12}{3} = 4$ iar a doua paranteza rotundă are valoarea 2. Paranteza dreaptă putem să o calculăm direct $16 - 4 = 12$ sau să scriem $(4 - 2)(4 + 2) = 2 \cdot 6$. Facem calculele în ultima paranteză

rotundă și obținem $\frac{4}{3} + 2 \cdot \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 6$. Rezultatul calculelor va da 2. Atenție la rolul parantezelor rotunde din exercițiu, când sunt delimitatoare și când sunt indicatoare de perioadă.

5.6 Modulul unui număr real

Definim modulul unui număr real astfel

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ avem } |x| = \begin{cases} x & \text{dacă } x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

5.7 Forma științifică a unei fracții zecimale

Forma științifică sau formatul științific al unei fracții zecimale a fost introdus pentru a facilita scrierea fracțiilor zecimale foarte mari sau foarte mici. Această notație este specifică bazei de numerație 10. În notația științifică, fracțiile zecimale nenule r sunt scrise sub forma

$$r = m \times 10^n.$$

m este un număr real nenul care în modul este cuprins între 1 și 10 și este prima cifră nenulă a lui r ; m se numește mantisa numărului r . Exponentul n este un număr întreg. Dacă numărul r este negativ un semn minus precede formatul său științific. Alături de notația științifică avem și "E notația" în care 10^n se notează E_n

Example:

0,321	3.21 × 10 ⁻¹	← 3,21 : 10 = 0,321	3.21E - 1
345,6789	3.456789 × 10 ²		3.456789E2
0,0000000234	2.34 × 10 ⁻⁸		2.34E - 8

5.8 Proporții

Considerăm patru numere a, b, c, d care îndeplinesc condiția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Numim proporție egalitatea celor două fracții. În această proporție numerele b și c se numesc mezi iar a și d extremi.

Propoziția 5.6. Într-o proporție produsul mezilor este egal cu produsul extremilor.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

5.8.1 Proporții derivate

Considerăm proporția $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Proporțiile obținute din proporția dată le numim proporții derivate.

1. Dacă schimbăm mezii între ei sau extremii între ei obținem tot o proporție.

$$\text{Dacă } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ și } \frac{d}{b} = \frac{c}{a}.$$

2. O proporție derivată obținem și dacă inversăm fiecare fracție $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$.
3. Dacă înmulțim fiecare fracție din proporție cu aceeași fracție obținem o proporție derivată.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ap}{bq} = \frac{cp}{dq}, \quad q \neq 0.$$

În acest format intră toate cazurile $q = 1$ sau $p = 1$ sau $p = \frac{1}{m}$, $q = \frac{1}{n}$ simultan sau independent.

4. Sunt adevărate egalitățile:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d}.$$

5. Aceeași combinație liniară aplicată numărătorilor și numitorilor fiecărei fracții din proporție conduce tot la o proporție:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{am + bn}{ap + qb} = \frac{cm + dn}{cp + dq}$$

Câteva cazuri particulare:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}; \quad \frac{a-b}{a+b} = \frac{c-d}{c+d}; \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}.$$

6. O proporție derivată cu termenii proporției în expresii de gradul al doilea este:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{ma^2 + nab + pb^2}{qa^2 + rab + sb^2} = \frac{mc^2 + ncd + pd^2}{qc^2 + rcd + sd^2}$$

Câteva cazuri particulare:

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}; \quad \frac{ab}{a^2 + b^2} = \frac{cd}{c^2 + d^2}; \quad \frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{(c+d)^2}{cd}.$$

Șiruri de rapoarte egale

O relație de forma $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n}$ poartă numele de șir de rapoarte egale.

Propoziția 5.7. *Este adevărată egalitatea:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{m}{n} = \frac{a+b+m}{b+d+n}$$

Aplicații:

1. Împărțirea unui număr în părți proporționale cu numere date. De exemplu, să se împartă numărul 123 în părți proporționale cu 2, 3 și 5.

Fie x, y, z cele trei părți. Proporționalitatea lor cu 2, 3, 5 conduce la $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5}$. De aici, ținând cont că avem $x+y+z = 123$, rezultă

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{123}{10}.$$

Egalând primele trei rapoarte cu ultimul determinăm x, y, z .

$$\frac{x}{2} = \frac{123}{10} \quad x = \frac{2 \cdot 123}{10} = 24,6; \quad \frac{y}{3} = \frac{123}{10}, \quad y = \frac{3 \cdot 123}{10} = 36,9;$$

$$\frac{z}{5} = \frac{123}{10} \quad z = 61,5$$

2. Împărțirea unui număr în părți invers proporționale cu numere date. De exemplu, Să se împartă numărul 133 în părți invers proporționale cu 2, 4 și 5. Invers proporționalitatea cu 2, 4, 5 ne conduce la

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{4}} = \frac{z}{\frac{1}{5}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}} = \frac{133}{\frac{19}{20}} = \frac{133 \cdot 20}{19} = 7 \cdot 20 = 140.$$

Prima fracție sub cea mai simplă formă este $2x$, egalăm cu 140 și rezultă $x = 70$. Cea de a doua fracție ne dă $4y$ care egalat cu 140 ne dă o ecuație cu soluția $y=35$. Similar, obținem $z = 28$.

5.9 Rezolvarea problemelor de aritmetică**5.9.1 Metoda figurativă**

Această metodă presupune reprezentarea schematică a datelor problemei.



Fig. 5.1: Metoda figurativă

Exemplu: Doi copii au împreună 100 de lei. Primul are cu 20 de lei mai mult decât al doilea. Câți lei are fiecare copil?

Rezolvare: Dacă al doilea copil ar avea cât primul, împreună ar avea cu 20 de lei mai puțin adică 80 de lei și fiecare ar avea câte 40 de lei. Deci primul copil are 40 de lei iar al doilea are 60 de lei.

5.9.2 Metoda reducerii la unitate

Metoda presupune compararea mărimilor date cu o mărime luată ca etalon.

Exemple:

1. Teri mingi de fotbal costă 270 de lei. Cât costă 7 mingi de fotbal?

Rezolvare: Dacă trei mingi costă 270 de lei atunci o minge costă de trei ori mai puțin adică 90 de lei. Șapte mingi vor costa de șapte ori mai mult decât una adică $90 \times 7 = 630$ de lei.

Observație: Mai multe mingi costul este mai mare.

2. Patru robinete identice umplu un bazin în trei ore. În câte ore umplu bazinul șase robinete?

Rezovare: Dacă patru robinete umplu un bazin în 3 ore atunci un singur robinet umple bazinul într-un timp de patru ori mai mare deci în 12 ore. Dacă un robinet umple bazinul în 12 ore șase robinete vor umple bazinul de șase ori mai repede deci în $12 : 6 = 2$ ore.

Observație: Mai multe robinete umplu mai repede bazinul.

5.9.3 Metoda comparației

Metoda comparației presupune compararea valorilor șirurilor de date ale problemei și un proces de eliminare a unor variabile.

Exemplu: Șapte kilograme de mere costă cât nouă kilograme de prune și încă un leu. Șapte kilograme de prune costă cât cinci kilo-

grame de mere și încă un leu. Cât costă kilogramul de mere și cât cel de prune?

Rezolvare:

Pentru început vom rescrie afirmațiile din textul problemei astfel încât în fiecare afirmație să avem aceeași cantitate de mere. În prima afirmație avem 7 kg de mere iar în a doua 5 kg. Cel mai mic multiplu comun al lui 7 și 5 este $35 = 5 \cdot 7$. Atunci prima afirmație din problemă o vom înmulți cu 5 iar a doua afirmație o vom înmulți cu șapte. Avem: Dacă 7 kg de mere costă cât 9 kg de prune și 1 leu atunci 35 kg de mere costă cât 45 kg de prune și 5 lei.

Din a doua afirmație înmulțită cu 7 obținem: Dacă 7kg de prune costă cât 5 kg de mere și 1 leu atunci 49 kg de prune costă cât 35 kg de mere și 7 lei.

De aici rezultă că 35 de kg de mere costa cât 45 kg de pune și 5 lei și tot 35 kg de mere costă cât 49 kg de prune mai puțin 7 lei. Deci 45 kg de prune și 5 lei au aceeași valoare ca 49 kg de prune fără 7 lei. Acest lucru înseamnă că 4 kg de prune costă 12 lei, adică un kg de prune costă 3 lei. Revenind în prima afirmație din problemă avem că 7 kg de mere costă $3 \cdot 9$ lei și încă un leu, deci un kg de mere costă 4 lei. Așa se rezolvă problema aritmetic, "povestită". Dacă însă facem notații și "povestea" o rescriem, rezolvarea se urmărește mult mai ușor.

Notăm pentru ușurință prețul kilogramului de mere cu m și cel de prune cu p . Avem:

$$7m = 9p + 1 \text{ și } 7p = 5m + 1 \text{ Rescriem eceste relații}$$

$$7m - 9p = 1$$

$$5m - 7p = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Înmulțim prima relație cu 5 și pe a doua cu 7 obținând } 35m - 45p &= 5 \\ 35m - 49p &= -7 \end{aligned}$$

Scădem din prima relație pe cea de a doua și obținem

$4p = 12$ deci un kilogram de prune costă 3 lei. Revenim la prima relație și găsim că

$$7m = 9 \cdot 3 + 1 = 28. \text{ Un kilogram de mere costă 4 lei.}$$

5.9.4 Metoda falsei ipoteze

Această metodă constă în a atribui rezultatelor căutate valori arbitrare, a verifica dacă ele convin problemei, iar în caz de nepotrivire a deduce soluția corectă.

Exemplu: 38 de bancnote de 20 și de 50 de lei valorează împreună 1000 de lei. Câte bancnote de fiecare fel sunt?

Rezolvare: Dacă presupunem că toate bancnotele erau de 20 de lei am fi avut în total $38 \times 20 = 760$ de lei deci cu $1000 - 760 = 240$ de lei mai puțin. Această sumă este acoperită de bancnotele de 50 de lei. Fiecare bancnotă de 50 de lei aduce în plus 30 de lei. În total sunt $240 : 30 = 8$ bancnote de 50 de lei. Înseamnă ca avem $38 - 8 = 30$ de bancnote de 20 de lei.

5.9.5 Metoda retrogradă

Metoda mersului invers cere urmărirea enunțului de la sfârșit către început și la fiecare pas efectuarea operațiilor inverse celor date.

Exemplu: O persoană are în două buzunare 128 de lei. Ea scoate din buzunarul unde avea mai mult o sumă egală cu cât avea în celălalt buzunar. Efectuează această operație de 6 ori și constată ca are în fiecare buzunar aceeași suma. Cât avea în fiecare buzunar la început?

Rezolvare: La pasul al șaselea are în buzunare aceeași sumă deci suma inițială împărțită la 2, adică 64 de lei.

La pasul al cincelea, în buzunarul cu mai puțini bani, ținând cont că primea aceeași sumă pe care o avea, rezultă că erau jumătate din suma finală adică 32 de lei iar în celălalt 96 de lei.

La pasul al patrulea avea în același buzunar jumătate din suma de la pasul 5 deci 16 lei și în buzunarul celălalt 112 lei.

La pasul al treilea în buzunarul cu mai puțini bani avea 8 lei iar dincolo 120.

La pasul al doilea în buzunarul sărac avea 4 lei iar dincolo 124 de lei.

La început în buzunarul cu mai puțini bani avea 2 lei iar dincolo 126 de lei.

5.10 Reguli de trei

5.10.1 Proportionalitate directă și inversă

Definiția 5.4. *Două mărimi numerice se numesc direct proporționale dacă măbind-o pe prima de n ori cea de a doua crește și ea de n ori.*

Exemplu: Prețurile la București și Craiova ale unui obiect sunt direct proporționale cu 4 și 5. Dacă obiectul costă la București 300 de lei cât costă la Craiova?

Fie a prețul la București și b prețul la Craiova. Direct proporționalitatea

cu 4 și 5 ne conduce la relația

$$\frac{a}{4} = \frac{b}{5}.$$

Înlocuim în egalitate pe a cu 300 și aflăm

$$\frac{300}{4} = \frac{b}{5} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{300 \cdot 5}{4} = 375.$$

Definiția 5.5. Două mărimi se numesc *invers proporționale* dacă mărind-o pe prima de n ori cea de a doua se micșorează de n ori.

Exemplu: Prețurile unui obiect la București și Craiova sunt invers proporționale cu 4 și 5. Dacă obiectul costă la București 300 de lei cât costă la Craiova?

Fie a prețul la București și b prețul la Craiova. Invers proporționalitatea cu 4 și 5 ne duce la relația

$$\frac{a}{\frac{1}{4}} = \frac{b}{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad a \cdot 4 = b \cdot 5.$$

Înlocuim în ultima egalitate pe a cu 300 și aflăm

$$300 \cdot 4 = b \cdot 5 \quad \Rightarrow \quad b = \frac{300 \cdot 4}{5} = 240.$$

5.10.2 Regula de trei simplă

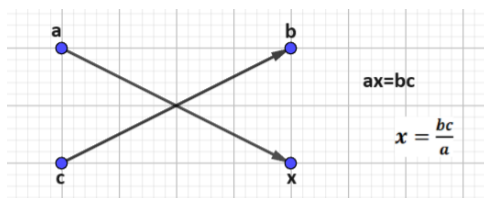


Fig. 5.2: Regula de trei simplă pentru mărimi direct proporționale

Regula de trei simplă pentru cazul mărimilor direct proporționale funcționează astfel:

Se dau două mărimi a și b , direct proporționale. Prima crește multiplicativ la valoarea c . Se cere cât devine mărimea b . Notăm această nouă valoare cu x și respectând diagrama din figura 5.2 îl determinăm pe x .

$$x = \frac{b \cdot c}{a}.$$

Regula de trei simplă pentru cazul mărimilor invers proporționale acționează astfel:

Se dau două mărimi invers proporționale. Prima ajunge multiplicativ

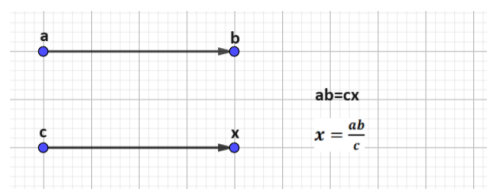


Fig. 5.3: Regula de trei simplă pentru mărimi invers proporționale

la valoarea c și se cere cât devine a doua mărime. Dacă notăm această valoare cu x , respectând diagrama 5.3 îl determinăm pe x astfel:

$$x = \frac{ab}{c}.$$

5.10.3 Reguli de trei compuse

Regula de trei compusă este în principiu formată din două reguli de trei simple concatenate. Dacă notăm prima regulă cu I și a doua cu II, direct proporționalitatea cu dp și invers proporționalitatea cu ip avem următoarele patru cazuri:

1. $I_{dp}II_{dp}$

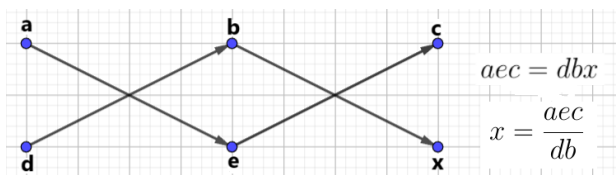
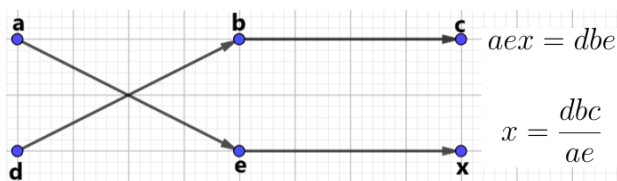
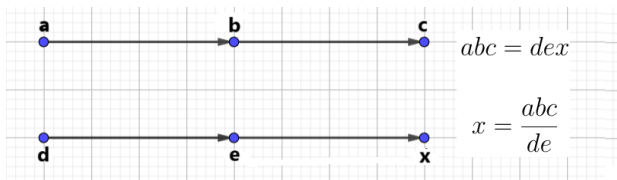
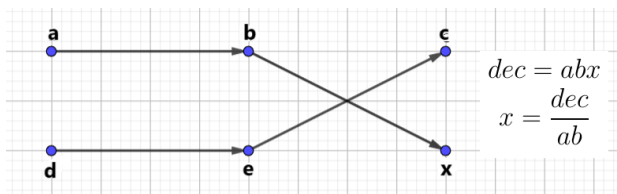


Fig. 5.4: Regula de trei compusă $I_{dp}II_{dp}$

2. $I_{dp}II_{ip}$

Fig. 5.5: Regula de trei compusă $I_{dp}II_{ip}$ 3. $I_{ip}II_{ip}$ Fig. 5.6: Regula de trei compusă $I_{ip}II_{ip}$ 4. $I_{ip}II_{dp}$ Fig. 5.7: Regula de trei compusă $I_{ip}II_{dp}$ **Exemple:**

1. Dacă 4 metri de asfalt sunt turnați în 5 ore de 8 muncitori de câți muncitori este nevoie ca 6 metri de asfalt să fie turnați în două ore?

Avem direct proporționalitate între numărul de metri de asfalt și numărul de ore și invers proporționalitate cu numărul de muncitori. Suntem astfel în cazul celui de al doilea tip de regulă de trei compusă. Aplicând direct formula obținem

$$x = \frac{5 \cdot 6 \cdot 8}{4 \cdot 2} = 30 \text{ muncitori}$$

2. Dacă 8 muncitori lucrând 8 ore pe zi termină lucrarea în 18 zile în câte zile 9 muncitori lucrând 10 ore pe zi termină lucrarea? Suntem în cazul unei duble invers proporționalități

$$\begin{array}{lcl} 5m & \rightarrow & 8h/zi \rightarrow 18zile \\ 9m & \rightarrow & 10h/zi \rightarrow xzile \end{array}$$

$$x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 18}{9 \cdot 10} = 8 \text{ zile}$$

5.11 Aproximarea unui număr zecimal

Când nu dorim să lucrăm cu un număr zecimal (fracție zecimală) ci dorim să utilizăm un număr apropiat pe care putem să îl manipulăm mai ușor avem două procedee la dispoziție:

1. Aproximare, care la rândul ei poate să fie
 - a) Aproximare prin lipsă.
 - b) Aproximare prin adaos.
2. Rotunjire, care la rândul ei poate să fie de trei feluri

Prin lipsă.

Prin adaos.

Financiară.

5.11.1 Aproximarea prin lipsă la un anumit ordin de mărime

Se procedează astfel: se stabilește cifra care se găsește pe poziția ordinului de mărime la care se face aproximarea prin lipsă. Dacă în număr nu există cifre situate la dreapta poziției la care se face aproximarea prin lipsă sau toate cifrele în acele poziții sunt 0 numărul aproximat coincide cu cel dat. Dacă există o cifră la dreapta poziției la care se face aproximarea atunci toate cifrele situate în dreapta se iau zero, astfel obținându-se aproximarea prin lipsă. Notăm aproximarea prin lipsă cu a.l.

123401 a.l. la zeci este 123400

123400 a.l. la sute este 123400

123400 a.l. la mii este 123000

12,345 a.l. la sutimi este 12,34

12,345 a.l. la zecimi este 12,3

5.11.2 Aproximarea la un anumit ordin prin adaos

Notăm aproximarea prin adaos cu a.a. Se procedează astfel: se stabilește cifra care se găsește pe poziția ordinului de mărime la care se face aproximarea prin adaos. Dacă în număr nu există cifre situate la dreapta poziției la care se face aproximarea prin adaos sau toate cifrele în acele poziții sunt 0 numărul aproximat coincide cu cel dat. Dacă există o cifră la dreapta poziției la care se face aproximarea atunci toate cifrele situate în dreapta ei se iau zero iar cifra situată pe poziția la care se face aproximarea se mărește cu 1, astfel obținându-se aproximarea prin adaos.

123400 a.a. la sute este 123400

123400 a.a. la mii este 124000

12,345 a.a. la sutimi este 12,35

12,345 a.a. la zecimi este 12,4

12,9045 a.a. la zecimi este 13

5.11.3 Rotunjirea fracțiilor zecimale

Rotunjirea ca procedeu are mai multe reguli decât aproximarea. Considerăm secvența de numere

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1. Dacă cifra de pe poziția următoare ordinului la care dorim să facem rotunjirea este strict mai mică decât 5 atunci rotunjirea coincide cu aproximarea prin lipsă.

123,462 rotunjit la sutimi este 123,46

2. Dacă cifra de pe poziția următoare ordinului la care dorim rotunjirea este strict mai mare ca 5 atunci rotunjirea coincide cu aproximarea prin adaos.

123,462 rotunjit la zecimi este 123,5

3. În cazul în care cifra de pe poziția următoare ordinului la care se face rotunjirea este 5 deosebim două posibilități:

a) Dacă la dreapta acestui cinci există cifre diferite de zero se face aproximare prin adaos.

123,4522 rotunjit la zecimi este 123,5

b) Dacă la dreapta acestui 5 nu există alte cifre sau toate sunt 0 atunci rotunjirea se face la cel mai apropiat număr par. (rotunjirea financiară).

123,825 rotunjit la sutimi este $123,820 = 123,82$

123,835 rotunjit la sutimi este $123,840 = 123,84$

În primul exemplu avem 25 de rotunjit și 20 e mai aproape de 25 decât 40 deci 2 e cel mai apropiat par. În al doilea exemplu 40 e mai apropiat de 35 decât 20 deci rotunjirea se face la 4.

5.11.4 Calcule aproximative

Definiția 5.6. Diferența dintre valoarea unui număr real și aproximarea sa se numește eroare absolută. Eroarea absolută poate fi pozitivă dacă aproximarea este obținută prin lipsă sau negativă dacă aproximarea este făcută prin adaos.

Lucrul cu numere cu foarte multe zecimale sau lucrul cu valori obținute în urma unor măsurători, conduce aproape întotdeauna la calcule aproximative. De exemplu, dacă avem un teren dreptunghiular cu lungimea cuprinsă între 5,5m și 6m iar lățimea este cuprinsă între 3,5m și 4m atunci aria domeniului este cuprinsă între $3,5 \cdot 5,5 = 19,25m^2$ și $4 \cdot 6 = 24m^2$. Diferența dintre cele două valori obținute aproximativ este semnificativă. Dacă măsurătorile sunt făcute cu o precizie mai mare și $3,75 < l < 4$ și $5,75 < L < 6$ atunci aria reală $\mathcal{A}$ este aproximată cu valorile $21,5625 < \mathcal{A} < 24$.

$19,25m^2 < \mathcal{A} < 24m^2$ la eroare de măsurare maximă de 50cm

și

$21,5625m^2 < \mathcal{A} < 24m^2$ la eroare maximă de măsurare de 25cm.

5.11.5 Operații cu aproximări ale numerelor, propagarea erorilor

Adunre. Eroarea sumei este suma erorilor termenilor.

Fie numerele r_i , $i = 1, 2$ două numere reale pentru care aproximările

prin lipsă au erorile maxime α_1, α_2 , atunci

$$\frac{\begin{array}{ccc} r_1 - \alpha_1 & < & r_1 < & r_1 + \alpha_1 \\ r_2 - \alpha_2 & < & r_2 < & r_2 + \alpha_2 \end{array}}{r_1 + r_2 - (\alpha_1 + \alpha_2) < r_1 + r_2 < r_1 + r_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Scădere. În cazul diferenței dacă nu se cunoaște tipul aproximării numerelor nu poate fi determinat nici tipul aproximării rezultatului. Eroarea este însă sigur mai mică decât suma erorilor termenilor.

Înmulțire. Folosim aceleași notații ca la adunare și în plus notăm cu ω_{ab} eroarea produsului. Dacă α_1 și α_2 sunt suficient de mici atunci putem ignora produsul $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ și regula de propagare a erorilor devine

$$\omega_{ab} = a \cdot \alpha_2 + b \cdot \alpha_1 \quad (5.3)$$

De exemplu, considerăm numerele 0, (3) și 0, (7) pe care le aproximăm la miimi.

$$0, (3) \times 0, (7) = 0, (259), \quad 0, 333 \times 0, 778 = 0, 259074$$

Diferența lor aproximată la a șasea zecimală este 0,000185. Calculul lui ω dat de expresia 5.3 ne dă rotunjit tot la a șasea zecimală

$$\omega_{ab} = 0, (3) \times (0, (7) - 0, 778) + 0, (7) \times (0, (3) - 0, 333) = 0, 000185$$

.

Împărțire. Vom folosi aceleași notații ca la înmulțire iar pentru eroarea la împărțire folosim notația $\omega_{a:b}$. În cazul în care nu știm tipul de aproximare folosit pentru a și b nu vom ști exact tipul de aproximare pentru $a : b$ dar putem estima eroarea cu formula:

$$\omega_{a:b} = \frac{a\alpha_2 + b\alpha_1}{b(b + \alpha_2)} \quad (5.4)$$

De exemplu, $0, (3) : 0, (7) = 0, (428571)$ calcul exact. Rotunjind la a treia zecimală calculul este $0, 333 : 0, 778 = 0, 428021$ cu rezultatul rotunjit la a șasea zecimală. Eroarea de calcul rotunjită la fel este $0, 428571 - 0, 428021 = 0, 00055$.

Avem ca la exemplul de la înmulțire $\alpha_1 = 0, (3) - 0, 333 = 0, 000333$ și

$\alpha_2 = 0, (7) - 0, 778 = -0, 000223$. Atunci, folosind formula dată de 5.4 obținem estimarea rotunjită la a șasea zecimală

$$\omega_{a:b} = \frac{0, (3) \times (0, (7) - 0, 778) + 0, (7) \times (0, (3) - 0, 333)}{0, (7) \times (0, (7) - 0, 000222)} = \frac{0, 000185}{0, 604764}$$

$$\omega_{a:b} = 0, 000306$$

rezultat obținut cu rotunjire la fel. Pentru calculul cu rotunjirea numerelor la miime și rotunjirea rezultatului tot la miime eroarea de calcul coincide cu eroarea estimată.

5.11.6 Eroare relativă

Definiția 5.7. *Numim eroare relativă a unui număr raportul dintre eroarea absolută și valoarea exactă a numărului. Dacă notăm cu r numărul exact, cu a aproximarea sa și cu $\varepsilon(r)$ eroarea relativă a lui r avem*

$$\varepsilon(r) = \frac{r - a}{r}$$

De exemplu, considerăm numărul $r = 1, 2346$ și aproximarea sa $a = 1, 23$. Eroarea absolută este $r - a = 0, 0046$ iar eroarea relativă este:

$$\varepsilon(r) = \frac{1, 2346 - 1, 23}{1, 2346} = 0, 0037259$$

rezultat rotunjit la a șaptea zecimală.

Propoziția 5.8. 1. *Eroarea relativă a produsului este egală cu suma erorilor relative ale factorilor.*

$$\varepsilon(r_1 \cdot r_2) = \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_2).$$

2. *Valoarea erorii relative a câtului dintre două numere este aproximativ egală cu suma erorilor relative ale celor două numere.*

$$\varepsilon(r_1 : r_2) \approx \varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_2).$$

Exemplu:

Fie $r_1 = 2, 12345$, $r_2 = 3, 5432$ și aproximările $a_1 = 2, 12$, $a_2 = 3, 54$. Atunci:

$$\varepsilon(r_1) = \frac{2, 12345 - 2, 12}{2, 12345} = 0, 0016247;$$

$$\varepsilon(r_2) = \frac{3, 5432 - 3, 54}{3, 5432} = 0, 0009031;$$

$$\varepsilon(r_1 \cdot r_2) = \frac{7,523808 - 7,5048}{7,523808} = 0,0025359$$

iar

$$\varepsilon(r_1) + \varepsilon(r_2) = 0,0025278.$$

Dacă considerăm erorile relative approximate la a patra zecimală atunci propoziția este verificată.

Capitolul 6

Numere complexe

6.1 Definiția numerelor complexe

Pornim de la ecuația

$$x^2 + 1 = 0.$$

Aceasta nu are soluții în mulțimea numerelor reale. Pentru a putea rezolva și această ecuație va trebui să ne definim un concept nou, o mărime care nu este număr real și pe care o vom numi element complex fundamental

$$\sqrt{-1} = i.$$

Această definiție alături de impunerea ca regulile de calcul formal din algebra reală să se păstreze ne conduc la următoarele rezultate valabile pentru elementul complex i .

$$i + i = 2i; \quad i * i = i^2 = -1; \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \alpha * i = \alpha i;$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad (\alpha + \beta) * i = \alpha i + \beta i;$$

$$i^1 = i; \quad i^2 = -1; \quad i^3 = -i; \quad i^4 = 1$$

și, în general

$$i^n = i^{\hat{n} \bmod 4}.$$

De aici avem:

$$i^0 = 1;$$

$$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i} * \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = \frac{i}{-1} = \frac{1}{-1} * i = (-1) * i = -i.$$

În general

$$i^p * i^q = i^{p+q} \quad \forall p, q \in \mathbb{Z}.$$

Ne definim mulțimea numerelor complexe astfel:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\}$$

Dacă $z = a + bi$ definim partea sa reală astfel

$$Re(z) = a$$

iar partea sa imaginară

$$Im(z) = b.$$

Dacă $Im(z) = 0$ numărul complex este strict real deci orice număr real poate fi privit ca un număr complex cu partea imaginară egală cu zero de unde:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Pentru cazul în care $Re(z) = 0$ spunem că numărul complex este pur imaginar.

6.1.1 Egalitatea a două numere complexe

Fie $z_1 = a_1 + b_1 i$ și $z_2 = a_2 + b_2 i$. Atunci

$$z_1 = z_2 \quad \Leftrightarrow \quad a_1 = a_2 \quad \text{și} \quad b_1 = b_2.$$

Reprezentarea unui număr complex ca $z = a + b \cdot i$ poartă numele de forma algebrică a unui număr complex și din condiția de egalitate a două numere complexe rezultă faptul că orice număr complex are o reprezentare unică sub această formă.

6.1.2 Operații cu numere complexe

Definim adunarea numerelor complexe, înmulțirea lor și înmulțirea unui număr complex cu un număr real astfel încât să fie respectate regulile de calcul formal și proprietatea că $i^2 = -1$. Astfel, dacă $z_1 = a_1 + b_1 \cdot i$, $z_2 = a_2 + b_2 \cdot i$ sunt două numere complexe oarecare iar $\alpha \in \mathbb{R}$ avem:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) + (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 + b_1 \cdot i + a_2 + b_2 \cdot i = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) \cdot i$$

adică

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2) \cdot i$$

operație care se mai poate scrie și sub forma

$$z_1 + z_2 = Re(z_1) + Re(z_2) + (Im(z_1) + Im(z_2)) \cdot i.$$

Acest mod de a scrie adunarea celor două numere complexe ne conduce la concluzia că

$$Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2); \quad Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2).$$

Pentru înmulțire avem

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 \cdot i) \cdot (a_2 + b_2 \cdot i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 \cdot i + b_1 \cdot i \cdot a_2 + b_1 \cdot i \cdot b_2 \cdot i$$

Ținem cont că $i^2 = -1$ și separând partea reală și cea imaginară a numărului complex obținut, rezultă:

$$z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cdot i.$$

Definim înmulțirea unui număr complex cu un număr real astfel:

$$\alpha \cdot z = \alpha \cdot (a + b \cdot i) = \alpha a + \alpha b \cdot i.$$

Făcând convenția ca toate înmulțirile să le scriem prin juxtapunere avem formulele:

$$z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2 + (a_2 b_1 + a_1 b_2)i$$

$$\alpha z = \alpha a + \alpha b i.$$

Observația 6.1. *Pe mulțimea numerelor complexe nu se poate defini o relație de ordine deci scrierea $z_1 \leq z_2$ nu are sens.*

6.2 Planul complex

Forma algebrică a unui număr complex $z = x + yi$ ne indică faptul că z este caracterizat de cele două componente ale sale x , y și astfel suntem conduși la ideea reprezentării unui număr complex într-un plan. Vom numi acest plan "planul complex".

Similar cu planul real căruia îi asociem un reper ortogonal, în planul complex vom considera o axă orizontală pe care avem reprezentată partea reală a numerelor complexe și o axă verticală pe care reprezentăm partea lor imaginară. Cele două axe se vor numi corespunzător, axa reală și axa imaginară. Numărul complex $z = x + yi$ îl vom determina astfel: Plasăm $x = Re(z)$ pe axa reală și $y = Im(z)$ pe axa imaginară. Prin x ducem o dreaptă paralelă cu axa imaginară, prin y ducem o paralelă la axa reală. Intersecția celor două drepte va da punctul din plan care reprezintă numărul complex $z = x + yi$.

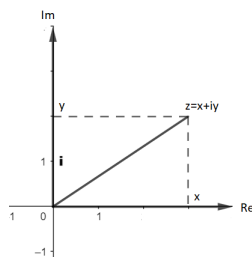


Fig. 6.1: Planul complex

Mulțimea punctelor z din planul complex pentru care $Re(z) > 0$ se numește semiplanul drept. Similar $Re(z) < 0$ va fi semiplanul stâng, $Im(z) > 0$ este semiplanul superior iar $Im(z) < 0$ semiplanul inferior. Numim semiaxa reală pozitivă mulțimea $\{Re(z) > 0\} \cap \{Im(z) = 0\}$. Similar ne definim semiaxa reală negativă, semiaxa imaginară pozitivă și semiaxa imaginară negativă.

6.2.1 Conjugatul și modulul unui număr complex

Fie numărul complex $z = a + bi$. Numim conjugatul lui z , notat $\bar{z}$, numărul $\bar{z} = a - bi$.

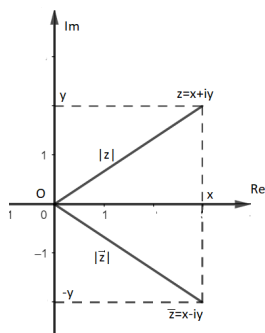


Fig. 6.2: Conjugatul și modulul unui număr complex

În planul complex observăm că numerele complexe z și $\bar{z}$ sunt simetrice față de axa reală.

Numim modulul unui număr complex, notat $|z|$, distanța de la punctul care dă reprezentarea sa în planul complex și originea sistemului de coordonate.

Din figura 6.2 observăm că modulul lui z are valoarea egală cu

lungimea segmentului Oz deci

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

.

6.3 Proprietăți ale numerelor complexe

Propoziția 6.1. *Pentru orice numere complexe $z = x + yi$, $z_1 = x_1 + y_1i$, $z_2 = x_2 + y_2i$ sunt îndeplinite următoarele relații:*

1. *Conjugatul sumei este suma conjugatelor, conjugatul produsului este produsul conjugatelor, conjugatul conjugatului unui număr complex este chiar acel număr.*

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}; \quad \overline{\bar{z}} = z.$$

2. *Produsul dintre un număr complex și conjugatul său este egal cu modulul numărului complex la pătrat.*

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2.$$

3. (a)

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0;$$

- (b)

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|;$$

- (c)

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|; \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|.$$

- (d)

$$|z_1 + z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) + |z_2|^2$$

- (e)

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

4. *Împărțirea cu un număr complex. Dacă $z \neq 0$ și $z_2 \neq 0$ atunci:*

- (a)

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z};$$

- (b)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2} = \frac{1}{|z_2|^2} z_1 \overline{z_2}.$$

5.

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

6. *Legea paralelogramului:*

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

7.

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|.$$

8.

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

6.4 Forma trigonometrică a unui număr complex

Reamintim că în planul real, pe lângă sistemul de coordonate carteziene poate fi introdus și un sistem de coordonate polare astfel:

Se consideră în plan un punct fix O , numit pol și o dreaptă Ox fixă pe care o vom numi axă polară. Poziția unui punct oarecare M din plan poate fi determinată în mod unic dacă se cunosc distanța de la pol la el, $\rho = |OM|$ numită rază polară sau modul, și unghiul θ măsurat în sens direct trigonometric, între axa polară și raza vectorie, numit unghi polar sau argument. Argumentul lui M poate fi determinat

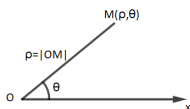


Fig. 6.3: Coordonate polare

pană la un multiplu întreg de 2π .

$$M(\rho, \theta) \equiv M(\rho, \theta + 2k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$$

și de aceea se face convenția ca

$$0 \leq \theta < 2\pi.$$

Formulele de transformare între coordonatele carteziene și cele polare sunt date de

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctg \frac{y}{x} \end{cases} \quad x \neq 0, \quad \text{cu determinarea inițială a cadranelui} \quad (6.1)$$

Pentru trecerea de la coordonate polare la cele carteziene avem formulele:

$$\begin{cases} x = \rho \cdot \cos \theta \\ y = \rho \cdot \sin \theta \end{cases} \quad \rho \in \mathbb{R}, \quad \theta \in [0, 2\pi) \quad (6.2)$$

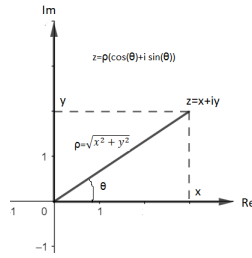


Fig. 6.4: *Forma trigonometrică sau reprezentarea polară a unui număr complex*

Reprezentarea unui număr complex $z(x, y)$ în plan ne permite să îi asociem acestuia în mod natural coordonatele sale polare $z(\rho, \theta)$

$$z = x + iy = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

legătura dintre x , y , ρ , θ fiind date de sistemele 6.1 și 6.2.

6.4.1 Exemple

1. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = 1 + i$.

Partea reală a numărului z este $x = \operatorname{Re}(z) = 1$ iar partea sa imaginară este $y = \operatorname{Im}(z) = 1$. Cum x, y sunt ambele pozitive numărul complex z se află în primul cadran. Pentru el avem

$$\rho = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \theta = \arctg \frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}.$$

$$z = 1 + i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

2. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z=3i$.

În acest caz avem $\Re(z) = 0$ și $\Im(z) = 3 > 0$ deci se află pe axa imaginară pozitivă. Rezultă că $\rho = 3$ și $\theta = \frac{\pi}{2}$ deci $z = 3i \sin \frac{\pi}{2}$.

3. Să se scrie sub formă trigonometrică numărul complex $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Determinăm întâi cadranul în care se află z . $\Re(z) = -1 < 0$ și $\Im(z) = \sqrt{3} > 0$ deci z se află în cadranul al doilea. $\rho = \sqrt{1+3} = 2$, $\theta = \arctg(-\frac{\sqrt{3}}{1})$. Știm că soluția generală a ecuației $\tg(\theta) = -\sqrt{3}$ este $\theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi$ și cum trebuie să alegem soluția din cadranul al doilea vom lua $\theta = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2\pi}{3}$. Astfel,

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

4. Să se determine forma trigonometrică a numărului complex $z=-2$.

Numărul se află pe axa reală negativă și avem $\rho = |-2| = 2$, $\theta = \pi$.

$$z = -2 = 2 \cos(\pi).$$

5. Să se găsească forma polară a numărului $z = -\sqrt{3} - i$.

Numărul se află în cadranul al treilea.

$$x = \Re(z) = -\sqrt{3}, \quad y = \Im(z) = -1.$$

Determinarea principală pentru $\arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Cum argumentul numărului z este în cadranul al treilea rezultă că $\theta = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ iar $\rho = \sqrt{3+1} = 2$. Forma trigonometrică a numărului complex va fi

$$z = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right).$$

6. Determinați forma trigonometrică a numărului complex $z = -4i$.

Numărul se află pe semiaxa negativă complexă și deci $\rho = |-4| = 4$ iar $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Atunci $z = 4i \sin \frac{3\pi}{2}$.

7. Să se determine forma trigonometrică a numărului $z = 3 - 3i$. Numărul se află în cadranul al patrulea. $\rho = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$. Apoi $x = \operatorname{Re}(z) = 3$, $y = \operatorname{Im}(z) = -3$, Determinarea principală pentru $\arctg\left(\frac{-3}{3}\right) = \arctg(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Unghiul fiind în cadranul al patrulea avem argumentul numărului complex z egal cu $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$. Forma trigonometrică a numărului va fi:

$$z = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

6.4.2 Operații cu numere complexe sub formă trigonometrică

Adunarea și scăderea numerelor complexe sub formă trigonometrică

Acest tip de operații nu aduce simplificări ale calculelor ci dimpotrivă ele sunt mai complicate. Dacă $z_1 = \rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ și $z_2 = \rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$ atunci:

$$z_1 \pm z_2 = (\rho_1 \cos(\theta_1) \pm \rho_2 \cos(\theta_2) + i(\rho_1 \sin(\theta_1) \pm \rho_2 \sin(\theta_2))).$$

Înmulțirea și împărțirea numerelor complexe sub formă trigonometrică

Aceste operații se fac respectând regulile de calcul formal iar rezultatul poate fi exprimat concis și enunțat sub o formă ușor de memorat. Pentru înmulțire avem:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) = \\ &= \rho_1 \cos \theta_1 \cdot \rho_2 \cos \theta_2 - \rho_1 \sin \theta_1 \cdot \rho_2 \sin \theta_2 + i[\rho_1 \sin \theta_1 \cdot \rho_2 \cos \theta_2 + \rho_1 \cos \theta_1 \cdot \rho_2 \sin \theta_2]. \end{aligned}$$

Dăm factor comun pe $\rho_1 \rho_2$ și avem:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_2 \cos \theta_1)].$$

Folosind formulele pentru cosinus și sinus de suma a două unghiuri obținem:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)). \quad (6.3)$$

Regula pe care o deducem din formula anterioară este:

Numerele complexe sub formă trigonometrică se înmulțesc astfel:

se înmulțesc modulele și se adună argumentele.

Pentru împărțire avem:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_2|^2}$$

Dar, $|\bar{z}_2| = |z_2| = \rho_2$ iar $|z_2|^2 = \rho_2^2(\cos^2(\theta_2) + \sin^2(\theta_2)) = \rho_2^2$ iar

$$\begin{aligned} z_1 \cdot \bar{z}_2 &= \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 - i \sin \theta_2) = \\ &= \rho_1 \cdot \rho_2[(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i \cdot (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1)] = \\ &= \rho_1 \rho_2[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)]. \end{aligned}$$

Rezultă că:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2^2} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2))}{\rho_2^2}.$$

Deci

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))}{\rho_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 - \theta_2)) \quad (6.4)$$

Regula pe care o deducem din formula anterioară este:

Numerele complexe sub formă trigonometrică se împart astfel:

se împart modulele și se scad argumentele.

Ridicarea la putere a unui număr complex sub formă trigonometrică

Pornind de la formula 6.3 observăm că:

$$z^2 = z \cdot z = [\rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))]^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i \sin(2\theta))$$

De aici, prin inducție, rezultă că:

$$z^n = \rho^n[\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)] \quad (6.5)$$

Formula lui Moivre

Un caz particular al formulei 6.5 este cel în care modulul numărului complex z este egal cu 1. Formula astfel obținută poartă numele de *Formula lui Moivre*

$$[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta) \quad (6.6)$$

Extragerea radicalului de ordin n dintr-un număr complex pus sub formă trigonometrică

Cu ajutorul formei trigonometrice putem să dăm o exprimare mai simplă a rădăcinilor de ordin n ale unui număr complex.

Definiția 6.1. Numim rădăcină de ordin n a unui număr complex z orice număr complex w cu proprietatea $w^n = z$.

Teorema 6.1. Fie numărul complex nenul $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$, $\theta \in [0, 2\pi)$ și considerăm $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Atunci toate numerele w cu proprietatea $w^n = z$ sunt de forma

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Pentru $z = 0$ singura sa rădăcină de ordin n este 0 .

Schițăm o demonstrație: Dacă $w = \rho_1(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ atunci din $w^n = z$ rezultă ecuațiile

$$\begin{cases} \rho_1^n = \rho \\ \cos(n\alpha) = \cos(\theta) \\ \sin(n\alpha) = \sin(\theta) \end{cases}$$

Din prima ecuație rezultă $\rho_1 = \sqrt[n]{\rho}$ iar din ultimele două ecuații $n\alpha = \theta + 2k\pi$ cu $k \in \mathbb{Z}$. Deci

$$w = z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funcțiile cosinus și sinus având perioada 2π limitează valorile lui k la mulțimea $0, 1, 2, \dots, n-1$. De aici rezultă că: $\sqrt[n]{z}$ are n valori distincte și ele sunt

$$\sqrt[n]{z} = z_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \quad (6.7)$$

6.5 Rezolvarea ecuațiilor binome $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$

În mulțimea numerelor complexe ecuația $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}$ are exact n soluții complexe. Pentru determinarea acestor soluții se scrie a sub formă trigonometrică, $a = |a|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ și se obțin cele n soluții z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.8)$$

Se verifică imediat că $z_k^n = a$.

$$\begin{aligned} z_k^n &= \left\{ |a|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \right\}^n = \\ &= |a|(\cos(\theta + 2k\pi) + i \sin(\theta + 2k\pi)) = |a|(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = a \end{aligned}$$

6.5.1 Rădăcinile de ordin 3 ale unității

Considerăm ecuația

$$z^3 = 1.$$

Soluțiile ei le vom numi rădăcinile de ordin trei ale unității. Abordăm rezolvarea acestei ecuații în două moduri.

1.

$$z^3 - 1 = 0 \Rightarrow (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

de unde obținem ecuațiile:

$$z - 1 = 0 \text{ și } z^2 + z + 1 = 0$$

care rezolvate ne conduc la

$$z_0 = 1 \quad z_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Calcul direct ne conduc la următoarele egalități

$$z_1^2 = z_2, \quad z_1^3 = 1, \quad z_1^2 + z_1 + 1 = 0, \quad z_1^n = z_1^{\hat{n} \bmod 3}$$

$$z_2^2 = z_1, \quad z_2^3 = 1, \quad z_2^2 + z_2 + 1 = 0, \quad z_2^n = z_2^{\hat{n} \bmod 3}$$

unde $\hat{n} \bmod 3$ înseamnă restul împărțirii lui n la 3. Relațiile anterioare ne permit să facem notațiile:

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \varepsilon, \quad z_2 = \varepsilon^2$$

cu proprietățile

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0, \tag{6.9}$$

$$\varepsilon^n = \varepsilon^{\hat{n} \bmod 3}. \tag{6.10}$$

Tripleta $(1, \varepsilon, \varepsilon^2)$ poartă numele de rădăcinile de ordin trei ale unității.

2. Plecând de la forma trigonometrică, ecuația $z^3 = 1$ devine:

$$z^3 = \cos(0) + i \sin(0),$$

cu soluțiile

$$\begin{aligned} z_0 &= 1 = \cos(0) \\ z_1 &= \cos \frac{0+2\pi}{3} + i \sin \frac{0+2\pi}{3} = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}, \\ z_2 &= \cos \frac{0+2 \cdot 2\pi}{3} + i \sin \frac{0+2 \cdot 2\pi}{3} = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Proprietățile 6.9 și 6.10 se verifică evident.

Aplicații:

1. Să se arate că ε și ε^2 sunt rădăcini și pentru ecuația $z^4 + z^2 + 1 = 0$.
Se verifică direct în ecuație și avem:

$$(\varepsilon)^4 + (\varepsilon)^2 + 1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^2 + 1 = \varepsilon^{1+3} + \varepsilon^2 + 1 = \varepsilon \cdot \varepsilon^3 + \varepsilon^2 + 1 = \varepsilon + \varepsilon^2 + 1 = 0.$$

și

$$(\varepsilon^2)^4 + (\varepsilon^2)^2 + 1 = \varepsilon^8 + \varepsilon^4 + 1 = \varepsilon^{2+6} + \varepsilon^{1+3} + 1 = \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

2. Pentru $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ să se calculeze z^5 .

Varianta 1. Se trece z sub formă trigonometrică și se calculează z^5 .

Varianta 2. Observăm că $z = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \varepsilon$. Dar $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$ deci $1 + \varepsilon = -\varepsilon^2$. Prin urmare avem de calculat

$$z^5 = (-\varepsilon^2)^5 = (-1)^5(\varepsilon)^{10} = -\varepsilon = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. Să se calculeze $(\sqrt{3} - i)^7$ în funcție de rădăcinile de ordin trei ale unității.

Rezolvarea o vom încerca pornind de la ideea din exercițiul 2 varianta a doua. Numărul $z = \sqrt{3} - i$ îl vom exprima în funcție de ε .

$$z = \sqrt{3} - i = \frac{2}{2}(\sqrt{3} - i) = 2 \frac{\sqrt{3} - i}{2} = 2 \frac{\sqrt{3}(-1) \cdot (-1) - i}{2} = 2 \frac{-\sqrt{3} \cdot (i)^2 - i}{2}$$

Dăm i factor comun la numărător și avem

$$z = 2 \frac{i(-\sqrt{3} \cdot i - 1)}{2} = 2i \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = 2i\varepsilon^2.$$

Atunci,

$$z^7 = (2i\varepsilon^2)^7 = 2^7 i^7 (\varepsilon^2)^7 = 2^7 i^7 \varepsilon^{14}.$$

Dar $i^7 = -i$ și $\varepsilon^{14} = \varepsilon^{2+12} = \varepsilon^2$. În concluzie

$$z^7 = -2^7 \cdot i \cdot \varepsilon^2.$$

4. Fie ecuația $z^2 - z + 1 = 0$ cu rădăcinile z_1 și z_2 . Să se calculeze $z_1^5 + z_2^5$.

Rezolvăm direct ecuația și obținem:

$$z_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} = -\varepsilon^2, \quad z_2 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} = -\varepsilon.$$

Atunci:

$$z_1^5 + z_2^5 = (-\varepsilon^2)^5 + (-\varepsilon)^5 = -\varepsilon - \varepsilon^2 = 1.$$

5. Fie ecuația $z^2 + 3z + 3 = 0$ cu rădăcinile z_1, z_2 . Arătați că $z_1^3 + z_2^3 = 0$.

6.6 Formulele lui Euler

Pornind de la formulele Taylor în jurul originii pentru funcțiile e^{ix} , $\sin(x)$, $\cos(x)$ putem determina următoarele egalități:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x); \quad (6.11)$$

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \quad (6.12)$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}; \quad (6.13)$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \quad (6.14)$$

Capitolul 7

Elemente de teoria mulțimilor

Noțiunea de mulțime este una fundamentală pentru matematică și totuși nu poate fi dată o definiție riguroasă a ei. Georg Cantor (1845-1918), fondatorul teoriei mulțimilor, spunea că prin mulțime se înțelege ”cuprinderea de obiecte diferite, bine determinate, ale gândirii sau intuiției noastre într-un tot.” În sens foarte larg vom spune că o mulțime este o colecție de obiecte. Obiectele care compun mulțimea le vom numi elemente ale mulțimii. Convenim ca, în general, o mulțime să o notăm cu litere majuscule, A, B, M.. iar elementele ei să le notăm, atât cât este posibil, cu litere mici. Putem descrie o mulțime în două moduri:

- Sub forma unei liste. Un exemplu de mulțime finită este $A = \{a, b, c\}$ iar unul de mulțime infinită, numerică, este $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Secvența de ”...” ne sugerează că la dreapta oricărui număr natural din listă există un alt număr natural. În cadrul unei liste un element poate să apară o singură dată.

- Prin indicarea unei proprietăți a elementelor ei și numai a lor. De exemplu, mulțimea I a punctelor din intervalul $[a, b]$ o putem defini

$$I = \{x \mid x \text{ număr cu proprietatea } a \leq x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Observația 7.1. *Elementele unei mulțimi pot fi la rândul lor mulțimi.*

7.1 Apartenența și incluziunea

Fie A o mulțime oarecare. Dacă elementul a este din mulțimea A spunem că a aparține lui A și notăm această apartenență cu simbolul

$\in$,

$$a \in A$$

iar dacă a nu aparține lui A scriem

$$a \notin A.$$

Există o mulțime specială care nu conține niciun element. Această mulțime se numește mulțimea vidă și este notată cu $\emptyset$.

Considerăm acum două mulțimi A și B . Dacă toate elementele lui A se găsesc și în mulțimea B spunem că mulțimea A este inclusă în mulțimea B . Această incluziune este o relație între două mulțimi pe care o notăm cu simbolul $\subset$ sau cu simbolul $\subseteq$.

Observația 7.2. 1. Orice mulțime A are proprietatea că $A \subset A$.

2. Mulțimea vidă este inclusă în orice mulțime. $\emptyset \subset A$ oricare ar fi A .

3. Relația de incluziune este tranzitivă. Dacă $A \subset B$ și $B \subset C$ atunci $A \subset C$.

Exemplu:

Fie $A = \{1, 2, \{1\}, \{3, 4\}\}$. Atunci:

1. $1 \in A$ pentru că elementul 1 se găsește în această formă în A .
2. $\{1\} \in A$ pentru că acest element care la rândul lui este o mulțime se găsește în această formă în A .
3. $\{1\} \subset A$ pentru că este mulțimea care conține elementul 1, iar $1 \in A$.
4. $\{3, 4\} \in A$
5. $\{3, 4\} \not\subset A$ pentru că elementele 3 și 4 nu aparțin lui A .

Egalitatea a două mulțimi

Definiția 7.1. Spunem că mulțimile A și B sunt egale dacă $A \subset B$ și $B \subset A$.

Observația 7.3. Dacă A este o submulțime a lui B și B nu este submulțime a lui A spunem că A este o parte strictă a lui B .

În general, notația $A \subset B$ nu exclude ca A să fie egală cu B , notația $A \subseteq B$ indică faptul că A poate să fie și egală cu B iar notația $A \not\subseteq B$

indică faptul că A nu e submulțime a lui B .

Din definiția egalității dintre două mulțimi rezultă că mulțimea vidă este unică. Presupunem că mulțimea vidă nu este unică și fie $\emptyset$ și $\emptyset'$ două mulțimi vide. Observația 7.2. ne asigură că $\emptyset \subset \emptyset'$ și $\emptyset' \subset \emptyset$ de unde rezultă că $\emptyset = \emptyset'$.

7.2 Operații cu mulțimi

7.2.1 Reuniunea a două mulțimi

Definiția 7.2. Fie A și B două mulțimi. Definim reuniunea lor și o notăm cu $A \cup B$ mulțimea formată cu toate elementele lui A și B comune și necomune luate o singură dată.

Proprietăți ale reuniunii

Propoziția 7.1. 1. Reuniunea mulțimilor este comutativă.

$$A \cup B = B \cup A, \quad \forall A, B.$$

2. Dacă $A \subset B$ atunci $A \cup B = B$.

3. Reuniunea mulțimilor este asociativă. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ oricare ar fi mulțimile A , B și C .

7.2.2 Intersecția a două mulțimi

Definiția 7.3. Fie A și B două mulțimi. Numim intersecția lor mulțimea notată $A \cap B$ formată cu elementele comune celor două mulțimi luate o singură dată.

Proprietăți ale intersecției a două mulțimi

Propoziția 7.2. 1. Intersecția mulțimilor este comutativă.

$$A \cap B = B \cap A, \quad \forall A, B.$$

2. Dacă $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$.

3. Intersecția mulțimilor este asociativă.

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad \forall A, B, C.$$

Propoziția 7.3. Intersecția mulțimilor este distributivă față de reuniunea lor.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Propoziția 7.4. *Reuniunea este distributivă față de intersecție.*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

7.2.3 Diferența a două mulțimi

Definiția 7.4. *Numim diferență a două mulțimi mulțimea $A \setminus B$ dată de toate elementele care sunt în mulțimea A și nu sunt în mulțimea B .*

Propoziția 7.5. 1. *Diferența mulțimilor nu este comutativă.*

$$A \setminus B \neq B \setminus A.$$

2. *Dacă $A \subset B$ atunci $A \setminus B = \emptyset$.*

3. *Diferența mulțimilor nu este asociativă.*

$$A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C.$$

7.2.4 Mulțimea părților unei mulțimi și complementara unei mulțimi

Presupunem că avem un raționament în care sunt implicate mai multe mulțimi. Toate aceste mulțimi sunt cuprinse într-o mulțime fixă, numită mulțime universală, notată U .

Definiția 7.5. *Fie U o mulțime universală. Toate submulțimile lui U inclusiv mulțimea vidă și U formează o mulțime pe care o numim mulțimea părților lui U și o notăm cu $\mathcal{P}(U)$.*

De exemplu dacă U este mulțimea claselor de resturi modulo 3 atunci $U = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}$ și

$$\mathcal{P}(U) = \{\emptyset, \{\hat{0}\}, \{\hat{1}\}, \{\hat{2}\}, \{\hat{0}, \hat{1}\}, \{\hat{0}, \hat{2}\}, \{\hat{1}, \hat{2}\}, \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}\}\}.$$

Rezultă că, dacă $A \subset U$ atunci $A \in \mathcal{P}(U)$.

Propoziția 7.6. *Dacă U are n elemente atunci $\mathcal{P}(U)$ are 2^n elemente.*

Definiția 7.6. *Numim complementara unei mulțimi A în raport cu mulțimea universală U , notată $\mathbf{C}_U A$, mulțimea formată cu toate elementele din U care nu sunt conținute în A .*

În cazul în care avem o mulțime universală U și $A \subset U$ atunci și $\mathbf{C}_U A \subset U$ adică dacă $A \in \mathcal{P}(U) \Rightarrow \mathbf{C}_U A \in \mathcal{P}(U)$. Avem relațiile

$$A \cap \mathbf{C}_U A = \emptyset, \quad A \cup \mathbf{C}_U A = U.$$

În general, dacă $A \subset B$ atunci putem defini complementara lui A în raport cu B și $\mathbf{C}_B A = B \setminus A$.

Pentru a avea o scriere mai simplă, în cazul în care nu există posibilitatea unor confuzii, putem să renunțăm la indicele complementarei și să notăm:

$$\mathbf{C}_U A = \mathbf{C}A.$$

Proprietăți ale complementarei

Propoziția 7.7. *Dacă $A \subset U \Rightarrow \mathbf{C}(\mathbf{C}A) = A$.*

Propoziția 7.8. *Fie $A, B \in \mathcal{P}(U)$. Atunci*

$$A \subset B \Leftrightarrow \mathbf{C}B \subset \mathbf{C}A,$$

și

$$A = B \Leftrightarrow \mathbf{C}A = \mathbf{C}B.$$

Propoziția 7.9. *Sunt adevărate următoarele egalități (formulele lui De Morgan);*

$$\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B,$$

$$\mathbf{C}(A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B.$$

7.2.5 Diferența simetrică a două mulțimi

Definiția 7.7. *Fie A și B două mulțimi. Numim diferența lor simetrică, notată $A \Delta B$, mulțimea dată de:*

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Proprietăți ale diferenței simetrice

Propoziția 7.10. *Fie A și B două mulțimi. Atunci:*

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \Delta B = A \cup B.$$

Propoziția 7.11. *Diferența simetrică a mulțimilor este asociativă.*

$$A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C.$$

7.2.6 Produsul cartezian de mulțimi

Definiția 7.8. Fie A și B două mulțimi. Numim produs cartezian al mulțimilor A și B mulțimea notată $A \times B$ formată din toate perechile ordonate care au pe prima componentă un element din A și pe a doua componentă un element din B . Astfel:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemplu: Dacă $A = \{1, 2, 3\}$ și $B = \{a, b\}$ atunci:

$$A \times B = \{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a), (3, b)\}.$$

Spunem că două perechi ordonate (x, y) , (u, v) sunt egale dacă și numai dacă $x = u$ și $y = v$.

Propoziția 7.12. Produsul cartezian nu este comutativ.

$$A \times B \neq B \times A.$$

Exerciții: Dacă în plan avem un sistem cartezian de coordonate atunci putem asocia fiecărui punct din plan o pereche ordonată formată din abscisa punctului și ordonata sa. Identificăm în acest caz planul cu $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Considerăm mulțimea $I = \{x \mid x \in [2, 5)\}$ și mulțimea $J = \{2\}$. Să se determine $I \times J$.

Mulțimea $I \times J$ va fi o mulțime în plan dată de

$$I \times J = \{(x, y) \mid x \in [2, 5), y = 2\}.$$

Rewprezentarea grafică o avem dată în figura 7.1.

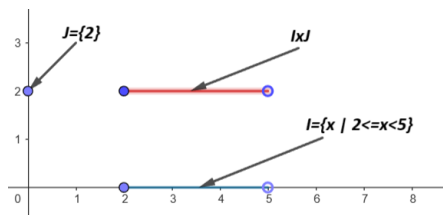


Fig. 7.1:

2. Să se calculeze $I \times J$ dacă

$$I = [a, b] \text{ și } J = [c, d].$$

Rezultatul acestui produs va fi dreptunghiul

$$I \times J = \{(x, y) \mid x \in [a, b], \quad y \in [c, d]\}$$

și este ilustrat în figura 7.2.

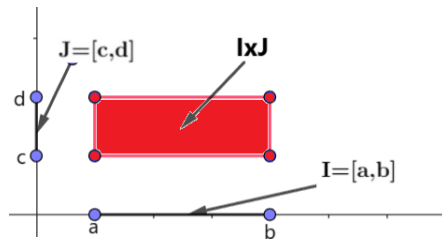


Fig. 7.2:

3. Să se determine produsul cartezian dintre mulțimile I și J , unde

$$I = [a, b] \cup \{c\} \text{ și } J = [d, e].$$

Reprezentarea grafică a rezultatului este dată în figura 7.3.

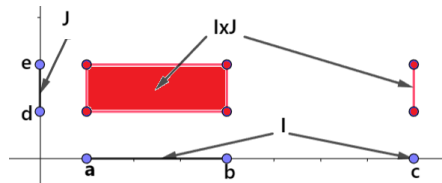


Fig. 7.3:

4. Formalizați matematic produsul cartezian a cărei reprezentare grafică este dată în figura 7.4.

7.4 Exerciții

1. Se dau mulțimile $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$, $C = \{1, 2, 3, 5\}$. Determinați x , y astfel încât $A \cup B = C$.
2. Fie $A = [2, 6]$ și $B = (4, 7)$ și mulțimea universală $U = (0, 10)$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $A \Delta B$, $A \times B$, $\mathbf{C}A$, $\mathbf{C}(A \Delta B)$, $\mathbf{C}(A \cap B)$, $\mathbf{C}(A \cup B)$.
3. Fie $A = \{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ și $B = \{x \mid x^3 - 4x^2 + 5x - 2 = 0\}$. Arătați că $A = B$.
4. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid x = \frac{8n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$.
5. Dacă A este o mulțime cu n elemente determinați câte perechi de forma $(X \subset A, \mathbf{C}_A X)$ sunt în $\mathcal{P}(A)$?
6. Arătați că $\mathbf{C}_{A \cup B}(A \Delta B) = A \cap B$.
7. Determinați mulțimea $A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x = \frac{n+12}{n}, \quad n \in \mathbb{N}\right\}$.
8. Dacă mulțimea A are n elemente și mulțimea B are m elemente câte elemente are mulțimea $A \times B$? Dar mulțimea $B \times A$?
9. Fie mulțimea $A = \{1, 2, \{1, 2\}\}$. Determinați $\mathcal{P}(A)$.
10. Fie A, B două mulțimi. Arătați că $A \Delta B = (A \cap \mathbf{C}B) \cup (B \cap \mathbf{C}A)$.

Capitolul 8

Funcții

8.1 Definiția noțiunii de funcție

Una dintre noțiunile importante din matematică este cea de funcție. Fie două mulțimi nevide A și B .

Definiția 8.1. Numim funcție definită pe A cu valori în B , notată cu

$$f : A \rightarrow B,$$

o corespondență care atașează fiecărui element din A un singur element din mulțimea B .

Definiția 8.2. 1. Mulțimea A se numește domeniul de definiție al funcției.

2. În corespondența $x \rightarrow f(x)$, dacă notăm cu y pe $f(x)$, atunci spunem că y este valoarea funcției f în punctul x sau y este imaginea lui x prin funcția f .

3. Mulțimea B este codomeniul sau mulțimea de valori sau mulțimea de imagini pentru funcția f .

4. Considerăm un element $y \in B$. Definim mulțimea

$$f_{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}. \quad (8.1)$$

Această submulțime a lui A poartă numele de mulțime de preimagini ale lui y . Să observăm că $f_{-1}(y)$ poate să fie mulțimea vidă, poate să conțină un singur element sau poate să aibă mai multe elemente.

O funcție poate fi dată în mai multe feluri printre care enumerăm:

1. În cazul în care A este finită, prin intermediul unui tabel cu două linii în care se pune în evidență corespondența $x \rightarrow f(x)$

x	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	...	$f(x_n)$

2. Tot pentru cazul în care A este finită, prin intermediul unei diagrame Venn. În cadrul unei astfel de diagrame se pune în evidență cu ajutorul săgeților corespondența $x \rightarrow f(x)$. Se observă că din fiecare element al mulțimii A pleacă obligatoriu o săgeată și numai una. Nu este obligatoriu ca pornind din două elemente diferite ale mulțimii A să se ajungă în două elemente diferite ale mulțimii B . Nu este obligatoriu ca în fiecare element al mulțimii B să ajungă săgeți.

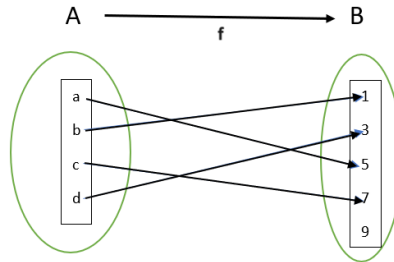


Fig. 8.1: Diagramă Venn de tip funcție

3. Prin intermediul unei liste de perechi ordonate

$$G = \{(a, f(a)), (b, f(b)), \dots\}.$$

Observăm că mulțimea G , numită graficul funcției f , este inclusă în mulțimea $A \times B = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B\}$.

4. Dacă se dorește ca unei funcții $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow B \subset \mathbb{R}$ să îi fie atașată o reprezentare grafică într-un plan în care avem dat un reper cartezian xOy , convențional, luăm A pe axa Ox și B pe axa Oy iar graficul G îl definim ca

$$G = \{(x, y) \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\}.$$

5. Prin intermediul unui triplet

$$f = (A, B, G)$$

în care A este domeniul de definiție, B codomeniul și G graficul funcției.

6. Prin intermediul unei expresii matematice. Mulțimea A va fi în acest caz, mulțimea pe care expresia este definită sau o submulțime precizată a acesteia. De exemplu, considerăm funcția dată de $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Expresia funcției f este definită în orice punct de pe axa reală mai puțin $x = 1$.
7. Printr-o descriere a ei. Descrierea trebuie făcută de așa manieră încât funcția să fie predictibilă, adică pentru un x dat funcția să aibă întotdeauna aceeași valoare.
8. Prin intermediul reprezentării ei grafice. De menționat că nu orice curbă din plan reprezintă graficul unei funcții. Ca să fie graficul unei funcții trebuie ca orice paralelă cu axa Oy să intersecteze graficul **cel mult într-un punct**.

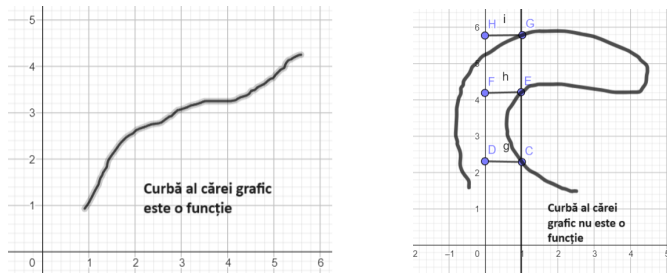


Fig. 8.2: Curbe în plan

Restricția unei funcții la o submulțime a domeniului de definiție

Fie funcția $f : A \rightarrow B$ și $C \subset A$. Numim restricția funcției f la mulțimea C funcția definită pe C astfel:

$$f|_C(x) = f(x) \quad \forall x \in C.$$

Prelungirea unei funcții într-un punct

Fie $f : A \rightarrow B$ și $x_0 \notin A$. Numim prelungirea funcției f în punctul x_0 funcția $\tilde{f} : A \cup \{x_0\} \rightarrow B$ definită astfel

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ \alpha \in B & x = x_0 \end{cases}$$

Funcții definite în scară

Considerăm funcțiile $f_1 : A \rightarrow B$ și $f_2 : C \rightarrow D$, $A \cap C = \emptyset$. Numim funcție în scară funcția $f : A \cup C \rightarrow B \cup D$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A \\ f_2(x) & x \in C \end{cases}$$

8.2 Egalitatea a două funcții

Definiția 8.3. Fie $f : A \rightarrow B$ și $g : C \rightarrow D$ două funcții. Spunem că cele două funcții sunt egale dacă au același domeniu, același codomeniu și stabilesc aceeași corespondență.

$$f = g \text{ dacă } \begin{cases} A = C \\ B = D \\ \text{stabilesc aceeași corespondență} \end{cases} \quad (8.2)$$

De menționat că dacă funcțiile sunt date prin intermediul unor formule nu este obligatoriu ca cele două formule să coincidă, trebuie să realizeze însă aceeași corespondență. De exemplu:

Dacă $f, g : \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x+1$, $g(x) = x^3+x^2-x+1$ atunci $f = g$

pentru că cele două funcții au același domeniu, același codomeniu și stabilesc aceeași corespondență $f(0) = 1 = g(0)$ și $f(1) = 2 = g(1)$.

8.3 Operații cu funcții

O funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ se numește funcție reală.

8.3.1 Operații aritmetice cu funcții reale

Adunarea funcțiilor

Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prin definiție

$$f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Putem defini adunarea funcțiilor reale și în general.

Fie $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ și $A \cap C \neq \emptyset$. Definim adunarea celor două funcții ca fiind funcția $f + g$ dată de

$$f + g : A \cap C \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in A \cap C.$$

Înmulțirea unei funcții cu un număr real

Considerăm $f : A \rightarrow B$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Produsul dintre numărul α și funcția f este tot o funcție, notată prin juxtapunere αf

$$\alpha f : A \rightarrow \mathbb{R}, \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x), \quad \forall x \in A.$$

Înmulțirea a două funcții

Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prin definiție

$$f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Putem defini înmulțirea funcțiilor reale și în general.

Fie $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ și $A \cap C \neq \emptyset$. Definim înmulțirea celor două funcții ca fiind funcția $f \cdot g$ dată de

$$f \cdot g : A \cap C \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall x \in A \cap C.$$

Împărțirea două funcții

Împărțirea funcțiilor se definește asemănător celorlalte operații aritmetice cu funcții.

Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Prin definiție

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) \neq 0.$$

Putem defini împărțirea funcțiilor reale și în general.

Fie $f : A \rightarrow B$, $g : C \rightarrow D$ și $A \cap \{C \setminus \{x \mid g(x) = 0\}\} \neq \emptyset$. Definim împărțirea celor două funcții ca fiind funcția $\frac{f}{g}$ dată de

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : A \cap \{C \setminus \{x \mid g(x) = 0\}\} &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \forall x \in A \cap \{C \setminus \{x \mid g(x) = 0\}\} \neq \emptyset. \end{aligned}$$

8.3.2 Compunerea a două funcții

Această operație cu funcții nu mai este una aritmetică, este o operație care combină acțiunile funcțiilor implicate în ea. Considerăm funcțiile $f : A \rightarrow B$ și $g : B \rightarrow C$. Un element $x \in A$ este dus prin funcția f într-un element $y \in B$ cu $y = f(x)$. La rândul său elementul $y \in B$ este dus de funcția g în elementul $z \in C$, $z = g(y) = g(f(x))$. Definim compunerea funcțiilor f și g ca fiind funcția $g \circ f : A \rightarrow C$ dată de

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

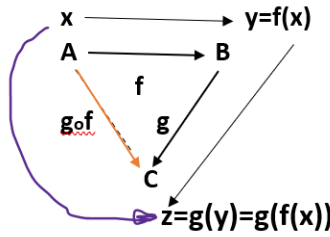


Fig. 8.3: Compunerea a două funcții

Observația 8.1.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \quad (8.3)$$

În diagrama 8.3 funcțiile apar în ordinea f și apoi g . Funcția rezultată, compunerea celor două funcții, se scrie $g \circ f$ pentru că variabilei $x \in A$ îi aplicăm funcția f .

Observația 8.2. Operațiile cu funcții prezentate anterior sunt asociative.

Exemple:

1. Fie $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - x$. Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(x^2 - x) \stackrel{\text{not}}{=} f(y) = 2y + 1 = 2(x^2 - x) + 1 = \\ &= 2x^2 - 2x + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = g(2x + 1) \stackrel{\text{not}}{=} g(y) = y^2 - y = (2x + 1)^2 - (2x + 1) = \\ &= 4x^2 + 2x \end{aligned}$$

2. Să considerăm $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x^2 - x$. Să se determine $f \circ g$, $g \circ f$ și domeniile lor de definiție.

Să observăm întâi că cele două funcții alese au aceleași expresii ca în exemplul precedent. Expresiile compunerilor celor două funcții nu se modifică dar ele vor avea, în principiu domenii de definiție diferite de $\mathbb{R}$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) \stackrel{\text{not}}{=} g(y)$$

Conform definiției lui g trebuie ca $y \in [1, 3]$ deci

$$y \in [1, 3] \Rightarrow 1 \leq 2x + 1 \leq 3 \Rightarrow x \in [0, 1].$$

În concluzie,

$$g \circ f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (g \circ f)(x) = 4x^2 + 2x.$$

Pentru $f \circ g$ avem f definit pe $\mathbb{R}$, g definit pe $[1, 3]$ deci

$$f \circ g : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}; \quad (f \circ g)(x) = 2x^2 - 2x + 1.$$

3. Considerăm funcțiile

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x - 2 & x \geq 2 \\ x + 2 & x < 2 \end{cases}; \quad g(x) = 2x + 4.$$

Să se determine $f \circ g$ și $g \circ f$.

Avem pe rând

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 4) \stackrel{\text{not}}{=} f(y) = \begin{cases} y - 2 & y \geq 2 \\ y + 2 & y < 2 \end{cases}$$

Dar $y \geq 2 \Rightarrow 2x + 4 \geq 2 \Rightarrow x \geq -1$. Deci

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = f(2x + 4) = \\ &= \begin{cases} 2x + 4 - 2 & x \geq -1 \\ 2x + 4 + 2 & x < -1 \end{cases} \Rightarrow f(g(x)) = \begin{cases} 2x + 2 & x \geq -1 \\ 2x + 6 & x < -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Pentru cealaltă compunere avem

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) = \begin{cases} g(x - 2) & x \geq 2 \\ g(x + 2) & x < 2 \end{cases} \stackrel{\text{not}}{=} \begin{cases} g(y) & x \geq 2 \\ g(z) & x < 2 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2y + 4 & x \geq 2 \\ 2z + 4 & x < 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - 4 + 4 & x \geq 2 \\ 2x + 4 + 4 & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} 2x & x \geq 2 \\ 2x + 8 & x < 2 \end{cases}. \end{aligned}$$

4. Considerăm funcțiile

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 1 \\ 2x & x < 1 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}.$$

Să se determine funcțiile $(f \circ g)(x)$ și $(g \circ f)(x)$.

Rezolvarea este mai laborioasă și impune studiul compunerii pe patru cazuri pentru fiecare dintre cele două funcții cerute.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(3x+1) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$$

Determinăm $f(3x+1)$ pentru $x \geq 0$.

$$f(3x+1) = \begin{cases} (3x+1)^2 & \text{pentru } (3x+1 \geq 1) \cap (x \geq 0) \\ 6x+2 & \text{pentru } (3x+1 < 1) \cap (x \geq 0) \end{cases}$$

Dar

$$(3x+1 \geq 1) \cap (x \geq 0) = (3x \geq 0) \cap (x \geq 0) = (x \geq 0),$$

$$(3x+1 < 1) \cap (x \geq 0) = \emptyset.$$

Deci $f(3x+1)$ are o singură ramură anume

$$f(3x+1) = (3x+1)^2 \quad x \geq 0.$$

Determinăm pentru $x < 0$ pe $f(-x)$.

$$f(-x) = \begin{cases} (-x)^2 & (-x \geq 1) \cap (x < 0) \\ 2(-x) & (-x < 1) \cap (x < 0) \end{cases}$$

$$(-x \geq 1) \cap (x < 0) = (x \leq -1) \cap (x < 0) = (x \in (-\infty, -1])$$

$$(-x < 1) \cap (x < 0) = (x > -1) \cap (x < 0) = (x \in (-1, 0)).$$

Atunci

$$f(-x) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, -1] \\ -2x & x \in (-1, 0) \end{cases}.$$

De aici obținem că

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} x^2 & x \in (-\infty, -1] \\ -2x & x \in (-1, 0) \\ (3x+1)^2 & x \in [0, \infty) \end{cases}$$

Procedăm similar pentru funcția $g \circ f$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x^2) & x \geq 1 \\ g(2x) & x < 1 \end{cases}$$

Calculăm întâi $g(x^2)$ pentru $x \geq 1$.

$$g(x^2) = \begin{cases} 3x^2+1 & (x^2 \geq 0) \cap (x \geq 1) \\ -x^2 & (x^2 < 0) \cap (x \geq 1) \end{cases}$$

Dar

$$(x^2 \geq 0) \cap (x \geq 1) = (x \in [1, \infty))$$

iar

$$(x^2 < 0) \cap (x \geq 1) = \emptyset.$$

De aici rezultă că

$$g(x^2) = 3x^2 + 1 \quad x \in [1, \infty).$$

Calculăm $g(2x)$ pentru $x < 1$.

$$g(2x) = \begin{cases} 3(2x) + 1 & (2x \geq 0) \cap (x < 1) \\ -(2x) & (2x < 0) \cap (x < 1) \end{cases}$$

adică

$$g(2x) = \begin{cases} 6x + 1 & x \in [0, 1) \\ -2x & x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

În concluzie

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & x \in [1, \infty) \\ 6x + 1 & x \in [0, 1) \\ -2x & x \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

8.4 Graficul unei funcții

Să aprofundăm niște noțiuni legate de graficul unei funcții. Fie $f : A \rightarrow B$ o funcție. Numim graficul funcției f mulțimea $G_f \subset A \times B$, definită astfel

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in A\}.$$

Dacă A și B sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ atunci graficului lui f putem să îi asociem o reprezentare grafică în plan. Reprezentarea grafică a lui f în reperul dat de axele Ox și Oy va fi mulțimea

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in A, y \in B, y = f(x)\}$$

De exemplu, funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dată de $f(x) = ax + b$ este o funcție a cărei expresie este una liniară, funcția se cheamă funcție liniară iar reprezentarea ei grafică este o dreaptă și anume dreapta $y = ax + b$. Dacă însă considerăm funcția $g : \{0, 1, 2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = ax + b$ vom avea tot o funcție liniară dar reprezentarea sa grafică nu va fi o dreaptă ci va fi dată de trei puncte $\{(0, b), (1, a + b), (2, 2a + b)\}$.

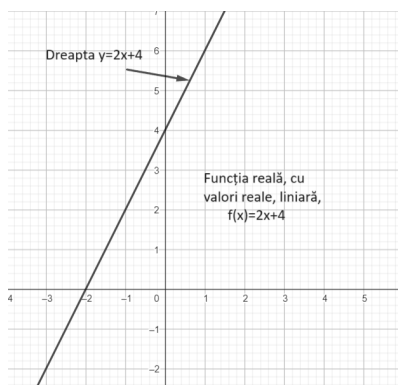


Fig. 8.4: O funcție reală cu valori reale, liniară și reprezentarea ei grafică

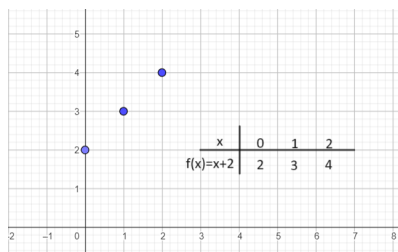


Fig. 8.5: O funcție definită pe o mulțime finită, liniară și reprezentarea ei grafică

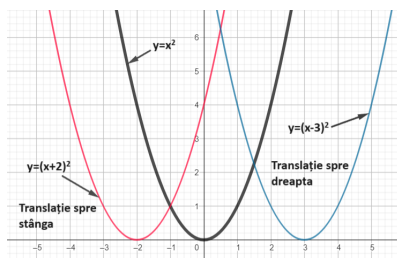
8.4.1 Acțiunea unei translații asupra graficului unei funcții

Considerăm o funcție $f(x)$ împreună cu graficul său și dorim să vedem care este influența unei translații grafice asupra funcției și graficului său, cu alte cuvinte dorim să vedem în paralel reprezentările grafice și expresiile unei funcții după o transformare de forma 1) $f(x + a)$ și 2) $f(x) + a$.

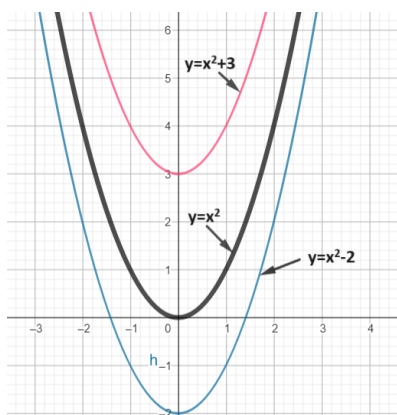
De exemplu, considerăm funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$. Să determinăm ce înseamnă ca expresie și ca grafic acțiunea translațiilor asupra funcției f .

$$f(x) \rightarrow g(x) = f(x + a); \quad x^2 \rightarrow (x + a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

Transformările de tip 1) translatează graficul funcției paralel cu axa Ox spre stânga dacă $a > 0$ și spre dreapta dacă $a < 0$.

Fig. 8.6: $f(x) \rightarrow f(x + a)$, translație paralelă cu Ox .

Transformările de tip 2) translatează graficul funcției paralel cu axa Oy în sus dacă $a > 0$ și în jos dacă $a < 0$.

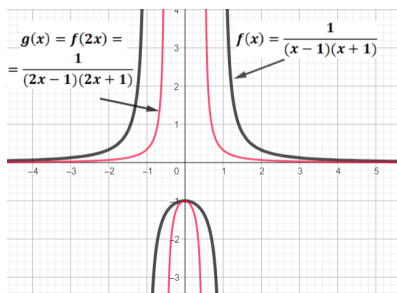
Fig. 8.7: $f(x) \rightarrow f(x) + a$, translație paralelă cu Oy .

8.4.2 Acțiunea unei transformări multiplicative asupra reprezentării grafice a unei funcții

Fie funcția $f(x)$ împreună cu graficul său. Dorim să vedem cum sunt afectate expresia și reprezentarea grafică prin intermediul unor transformări de tipul 1) $f(x) \rightarrow g(x) = f(\alpha x)$ și 2) $f(x) \rightarrow \alpha f(x)$.

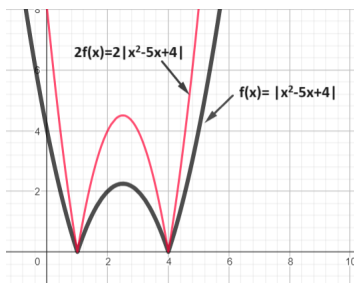
Pentru transformarea de tip 1) noua funcție poate să își schimbe domeniul de definiție, caracteristicile reprezentării grafice rămânând aceleași.

De exemplu, dacă avem $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+1)}$,

Fig. 8.8: $f(x) \rightarrow g(x) = f(\alpha x)$. Cazul $\alpha = 2$

$\alpha = 2$ atunci funcția g va fi $g(x) = \frac{1}{(2x-1)(2x+1)}$ și pentru că trebuie să avem $2x \neq -1$ și $2x \neq 1$ rezultă că domeniul de definiție al lui g este $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\}$.

Pentru transformarea de tip 2) funcția rezultat își păstrează domeniul de definiție iar valorile ei sunt toate obținute prin înmulțirea valorilor lui $f(x)$ cu α .

Fig. 8.9: $f(x) \rightarrow \alpha f(x)$ Cazul $f(x) = |x^2 - 5x + 4|$ și $\alpha = 2$

8.5 Simetricele unei funcții față de axe și origine

8.5.1 Simetrica funcției $f(x)$ față de axa Ox .

Propoziția 8.1. Simetrica funcției f față de axa Ox este funcția $g = -f$.

Considerăm în general, un punct $M_1(x_1, y_1)$ și o dreaptă (d) . Fie $M_2(x_2, y_2)$ proiecția lui M_1 pe dreapta (d) . Simetricul lui M_1 față de dreapta (d) este punctul $M_3(x_3, y_3)$ cu proprietatea că M_2 este mijlocul segmentului M_1M_3 . Acest lucru înseamnă că

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2}, \quad y_2 = \frac{y_1 + y_3}{2}.$$

De aici obținem că

$$x_3 = 2x_2 - x_1, \quad y_3 = 2y_2 - y_1. \quad (8.4)$$

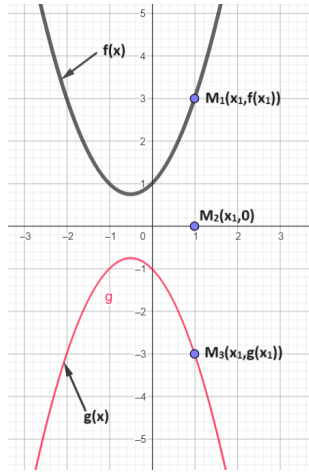


Fig. 8.10: Simetrica lui f față de axa Ox

În cazul nostru considerăm M_1 un punct oarecare de pe graficul lui $f(x)$ având deci coordonatele $M_1(x_1, f(x_1))$. Dreapta (d) va fi în cazul nostru chiar axa Ox . Proiecția lui M_1 pe Ox va fi punctul $M_2(x_1, 0)$. Folosind formulele date de 8.4 rezultă că punctul M_3 va avea coordonatele

$$x_3 = 2x_2 - x_1 = 2x_1 - x_1 = x_1; \quad y_3 = 2y_2 - y_1 = 0 - y_1 = -y_1 = -f(x_1).$$

Dar punctul M_3 aparține graficului funcției g , simetrica lui f față de Ox adică $M_3(x_1, g(x_1))$. Rezultă că

$$g(x_1) = -f(x_1)$$

și cum x_1 a fost ales oarecare în domeniul de definiție al lui f obținem că $g = -f$. ■

8.5.2 Simetrica funcției $f(x)$ față de axa Oy

Propoziția 8.2. Simetrica lui f față de axa Oy este funcția g cu proprietatea $g(x) = f(-x)$ și cu determinarea corespunzătoare a domeniului de definiție al funcției g .

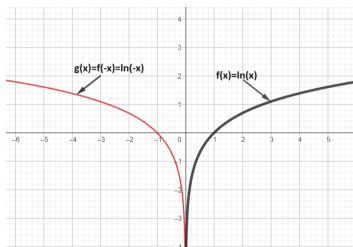


Fig. 8.11: Simetrica lui $f(x) = \ln(x)$ față de axa Oy

Domeniul de definiție al funcției g este simetricul față de axa Oy al domeniului funcției f . Procedăm similar ca în cazul simetricii față de axa Ox . Considerăm un punct oarecare $M_1(x_1, f(x_1))$ de pe graficul funcției f . Proiecția lui pe axa Oy este punctul $M_2(0, f(x_1))$. Folosind formulele date de relația 8.4 obținem că punctul $M_3(x_3, g(x_3))$ are coordonatele $M_3(-x_1, f(-x_1))$. În concluzie domeniul lui g este simetricul domeniului lui f față de axa Oy iar $g(x) = f(-x)$.

În figura 8.11 avem simetrica funcției $f(x) = \ln(x)$ față de axa Oy . Domeniul de definiție al funcției f este $(0, \infty)$. Funcția g , simetrica lui f față de axa Oy va avea domeniul $(-\infty, 0)$ iar $g(x) = \ln(-x)$. Considerăm încă un exemplu cu reprezentarea grafică dată de 8.12. Fie funcția $f(x) = x^2 - 5x + 4$. Domeniul său de definiție este $\mathbb{R}$. Simetrica sa față de axa Oy este funcția g definită tot pe $\mathbb{R}$ având expresia $g(x) = f(-x) = x^2 + 5x + 4$.

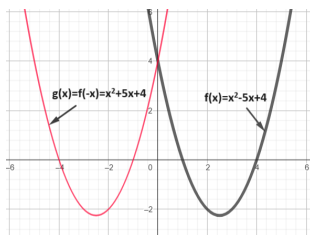
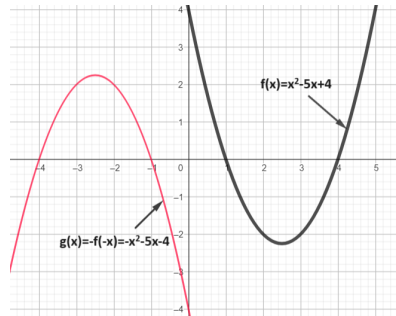


Fig. 8.12: Simetrica lui $f(x) = x^2 - 5x + 4$ față de axa Oy

8.5.3 Simetrica unei funcții față de origine

Fig. 8.13: Simetrica lui $f(x) = x^2 - 5x + 4$ față de origine

Pentru a determina simetrica unei funcții față de originea sistemului de coordonate folosim tot formulele date de relația 8.4 ținând cont că punctul M_1 este pe graficul lui f , deci $M_1(x_1, f(x_1))$, M_2 este originea sistemului de coordonate, $M_2(0, 0)$, iar $M_3(x_3, g(x_3))$. Atunci $x_3 = -x_1$ și $g(x_3) = -f(-x_1)$. Domeniul de definiție al lui g va fi simetricul față de axa Oy al domeniului lui f iar $g(x) = -f(-x)$. Un exemplu avem în figura 8.13.

8.6 Funcții injective, surjective, bijective

8.6.1 Funcții injective

Definiția 8.4. Fie $f : A \rightarrow B$. Spunem că f este injectivă dacă oricare ar fi $x, y \in A$, $x \neq y$ avem $f(x) \neq f(y)$.

Propoziția 8.3. 1. Dacă f este funcție injectivă, atunci din $f(x) = f(y)$ rezultă că $x = y$.

2. Dacă funcția f este injectivă și ecuația $f(x) = a$ are o soluție, atunci aceea este singura soluție a ecuației.

3. Dacă $f : A \rightarrow B$ este o funcție injectivă atunci pentru orice element $y \in B$ mulțimea $f^{-1}(y)$ are cel mult un element.

8.6.2 Metode de a demonstra că o funcție este injectivă

1. **Metoda directă.** Avem de demonstrat o afirmație care începe cu cuantificatorul universal $\forall$. Trebuie să ne alegem două elemente din A , oarecare și diferite. Acest lucru se face cu ajutorul

”cuvântului cheie FIE”. Deci

Fie $x, y \in A$, $x \neq y$. Printr-un șir de echivalențe logice trebuie să ajungem la concluzia $f(x) \neq f(y)$. Din păcate lucrul cu $\neq$ este foarte restrictiv și această metodă nu se poate aplica decât pe anume tipuri de funcții, de exemplu funcțiile liniare.

2. Metoda reducerii la absurd. Cuvintele cheie sunt ”Presupunem că”. Metoda funcționează astfel:

Presupunem că funcția nu este injectivă. Acest lucru se face pornind de la definiția injectivității păstrând ipoteza și negând concluzia.

Afirmația este:

$$\forall x, y \in A, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

Ipoteza:

$$x \neq y$$

Concluzia:

$$f(x) \neq f(y)$$

Câteva reguli generale de negare:

$$\forall \leftrightarrow \exists, \quad = \leftrightarrow \neq, \quad \Rightarrow \leftrightarrow a.i.$$

Păstrând ipoteza, negând concluzia și aplicând regulile de negare, presupunerea că f nu e injectivă se traduce în

$$\exists x, y \in A, \quad x \neq y \quad a.i. \quad f(x) = f(y)$$

De aici, printr-un șir de echivalențe logice trebuie să ajungem la o contra-dicție, cea mai frecventă fiind $x = y$ și astfel am demonstrat că f este injectivă. Dacă nu ajungem la o contradicție rezultă că f nu e injectivă.

Exemple: Folosind metoda reducerii la absurd să se determine dacă următoarele funcții sunt injective:

a)

$$f(x) = \frac{3}{2x - 4}.$$

Presupunem că $\exists x, y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $x \neq y$ astfel încât $\frac{3}{2x - 4} = \frac{3}{2y - 4}$. De aici avem $2x - 4 = 2y - 4$ adică $x = y$, contradicție pentru că am presupus $x \neq y$.

b)

$$g(x) = x^2.$$

Presupunem că există $x, y \in \mathbb{R}$, $x \neq y$ astfel încât $g(x) = g(y)$. De aici avem $x^2 = y^2$ adică $(x-y)(x+y) = 0$ egalitate adevărată dacă $x = y$ sau $x = -y$. Funcția nu este injectivă pe tot domeniul său de definiție. Revenim la egalitatea $(x-y)(x+y) = 0$. Dacă $x > 0, y > 0$ $x + y \neq 0$ deci egalitatea ne conduce la $x - y = 0$ adică $x = y$. Deci funcția este injectivă pe $\mathbb{R}_+$. Similar, dacă $x < 0, y < 0$ avem că $x + y \neq 0$ deci $x - y = 0$, adică $x = y$. Rezultă că funcția este injectivă și pe $\mathbb{R}_-$. În concluzie, funcția g este injectivă pe $\mathbb{R}_+$, este injectivă pe $\mathbb{R}_-$ dar nu este injectivă pe $\mathbb{R}$.

3. **Metoda contrareii.** Dacă avem afirmația directă $p \Rightarrow q$ atunci contrara ei $\text{non } q \Rightarrow \text{non } p$ are aceeași valoare de adevăr cu afirmația directă. Cu această metodă, în cazul injectivității avem:

Dacă $\forall x, y \in A$, din $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ atunci f este injectivă.

Exemple: Folosind metoda contrareii demonstrați următoarele afirmații:

a) Considerăm $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$, f și g injective. Arătați că funcția $g \circ f$ este injectivă.

Fie $x, y \in A$, $x \neq y$ a.î. $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y)$. De aici rezultă că $g(f(x)) = g(f(y))$. Funcția g este injectivă și atunci din $g(u) = g(v)$ rezultă $u = v$ adică $f(x) = f(y)$. La rândul ei f este injectivă deci $x = y$. Cum x, y au fost alese oarecare ajungem la concluzia că funcția $g \circ f$ este injectivă.

b) Arătați că funcția $f(x) = 2x^8 - 6x^7 + 3$ nu este injectivă. Dacă

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad 2x^8 - 6x^7 + 3 = 2y^8 - 6y^7 + 3 \Rightarrow x^8 - 3x^7 = y^8 - 3y^7.$$

Dăm factor comun în fiecare membru și obținem

$$x^7(x - 3) = y^7(y - 3).$$

Observăm că pentru $x = 0$ avem egalitatea atât pentru $y=0$ cât și pentru $y=3$ deci funcția nu este injectivă.

4. **Metoda grafică.** Dacă domeniul și codomeniul funcției sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ atunci ea are o reprezentare grafică. Condiția ca funcția să fie injectivă este ca orice paralelă cu axa Ox să intersecteze reprezentarea ei grafică cel mult o dată.

8.6.3 Funcții monotone

Fie funcția $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$.

Definiția 8.5. *Spunem că funcția f este monoton crescătoare dacă*

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y).$$

Spunem că funcția f este strict crescătoare dacă

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(y).$$

Definiția 8.6. *Spunem că funcția f este monoton descrescătoare dacă*

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y).$$

Spunem că funcția f este strict descrescătoare dacă

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(y).$$

O funcție care este strict crescătoare sau strict descrescătoare spunem că este monotonă strict.

Propoziția 8.4. *Orice funcție strict monotonă este injectivă.*

Exercițiu: *Să se rezolve ecuația $3^x + 4^x = 5^x$.*

Pentru că $5^x \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ putem împărți ecuația dată cu 5^x . Obținem:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$$

Funcțiile $\left(\frac{3}{5}\right)^x$, $\left(\frac{4}{5}\right)^x$ sunt strict descrescătoare și deci și suma lor este strict descrescătoare. Atunci funcția $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este injectivă. Observăm că $x = 2$ este soluție a ecuației și conform propoziției 8.3. este singura soluție.

8.6.4 Funcții surjective

Definiția 8.7. Fie funcția $f : A \rightarrow B$. Spunem că funcția f este surjectivă dacă

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad \text{a.î.} \quad f(x) = y.$$

Propoziția 8.5. 1. Dacă $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ este surjectivă atunci orice paralelă la axa Ox dusă printr-un punct din B taie reprezentarea grafică a lui f cel puțin într-un punct.

2. Dacă f este surjectivă atunci $f_{-1}(y)$ are cel puțin un element oricare ar fi $y \in B$.

3. Fie $f : A \rightarrow B$ și $a \in B$. Dacă f este surjectivă atunci ecuația $f(x) = a$ admite cel puțin o soluție.

8.6.5 Metode de a determina mulțimea pe care f este surjectivă

Metoda directă

Fie $y \in B$. Egalăm expresia lui $f(x)$ cu y și explicităm (dacă se poate) pe x . Obținem "o funcție" $g(y)$. Se pot obține mai multe funcții g dar toate au același domeniu de definiție. Domeniul de definiție al lui g este mulțimea pe care f este surjectivă.

Exemple:

1. Să se determine mulțimea pe care funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 4$ este surjectivă.

Fie $y \in \mathbb{R}$. Pornim de la egalitatea $f(x) = y$ și încercăm să îl explicităm pe x .

$$x^2 + x + 4 = y \Rightarrow x^2 + x + 4 - y = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 16 + 4y}}{2}$$

Observăm că obținem două funcții g .

$$g_1(y) = \frac{-1 + \sqrt{4y - 15}}{2}, \quad g_2(y) = \frac{-1 - \sqrt{4y - 15}}{2}.$$

Ambele funcții sunt definite acolo unde radicalul din expresia lor este definit, deci trebuie să avem

$$y \geq \frac{15}{4}.$$

Rezultă că funcția noastră f este surjectivă pe mulțimea $\left[\frac{15}{4}, \infty\right)$. Funcția f este o funcție de gradul al doilea cu coeficientul termenului x^2 pozitiv. Punctul său de minim este $x_{vf} = -\frac{1}{2}$, $y_{vf} = \frac{15}{4}$. Domeniul său de surjectivitate observăm că este dat de mulțimea $[y_{vf}, \infty)$.

2. Fie $f : [-1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Să se determine mulțimea pe care f este surjectivă.

Funcția f este o funcție de gradul al doilea cu coeficientul

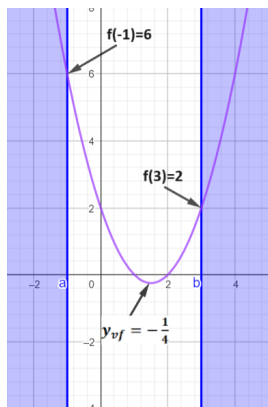


Fig. 8.14: Surjectivitate pentru restricția unei funcții

lui x^2 pozitiv. Dacă ar fi fost definită pe $\mathbb{R}$ răspunsul ar fi fost obținut direct, ca în cazul precedent $[y_{vf}, \infty)$ și anume $\left[-\frac{1}{4}, \infty\right)$. Funcția noastră este definită doar pe mulțimea $[-1, 3]$. Observăm că $x_{vf} = \frac{3}{2} \in [-1, 3]$ și, în consecință, ea este surjectivă pe mulțimea

$$[y_{vf}, \max(f(-1), f(3))].$$

Dar $f(-1) = 6$, $f(3) = 2$ și $y_{vf} = -\frac{1}{4}$. Deci funcția este surjectivă pe mulțimea $\left[-\frac{1}{4}, 6\right]$.

Metoda grafică

Dacă domeniul și codomeniul lui f sunt submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ atunci funcția este surjectivă pe submulțimea lui B din care orice paralelă la axa Ox taie graficul funcției cel puțin o dată.

Propoziția 8.6. *Compunerea a două funcții surjective este o funcție surjectivă.*

Să demonstrăm această propoziție. Fie $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ surjective și funcția $g \circ f : A \rightarrow C$. Trebuie să demonstrăm că pentru orice element $z \in C$ există $x \in A$ astfel încât $(g \circ f)(x) = z$.

Fie $z \in C$. Funcția g este surjectivă deci există $y \in B$ a.î. $g(y) = z$. Dar și funcția f este surjectivă deci există $x \in A$ astfel încât $f(x) = y$. Atunci:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z. \quad q.e.d.$$

8.6.6 Exerciții:

1. Să se determine $Im(f)$ pentru $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4x - 5$.
2. Să se determine mulțimea pe care $f : [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 5x - 6$ este surjectivă.
3. Arătați că funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x + 3 & x < 0 \\ x^2 - 4x + 7 & x \geq 0 \end{cases}$$

este surjectivă.

4. Arătați grafic că funcția

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & 0 < x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

este și injectivă și surjectivă.

5. Se dă funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ surjectivă pe intervalul $[a, \infty)$. Pentru ce valori ale lui a ecuația $f(x) = -a$ are soluție?

8.6.7 Funcții bijective

Definiția 8.8. *Numim funcție bijectivă o funcție care este injectivă și surjectivă.*

Propoziția 8.7. 1. O ecuație care este generată de o funcție bijectivă admite soluție iar soluția este unică.

2. Compunerea a două funcții bijective este tot o funcție bijectivă.

Propoziția 8.8. Fie $f : A \rightarrow A$. Dacă A este mulțime finită atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Funcția f este injectivă.
2. Funcția f este surjectivă.
3. Funcția f este bijectivă.

Propoziția 8.9. Fie $f : A \rightarrow B$ bijectivă. Pentru orice $y \in B$ mulțimea $f^{-1}(y)$ are un element și numai unul.

Observația 8.3. Afirmația anterioară ne asigură că în cazul funcțiilor bijective, prin intermediul mulțimilor $f^{-1}(y)$ se stabilește o corespondență de tip funcție între mulțimile B și A .

8.7 Inversa unei funcții

Definiția 8.9. Considerăm $f : A \rightarrow B$. Numim inversa funcției f , o funcție $f^{-1} : B \rightarrow A$ cu proprietățile:

1.

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{f^{-1}} A, \quad f^{-1} \circ f = 1_A \quad \text{unde } 1_A(x) = x \quad \forall x \in A.$$

2.

$$B \xrightarrow{f^{-1}} A \xrightarrow{f} B, \quad f \circ f^{-1} = 1_B \quad \text{unde } 1_B(y) = y \quad \forall y \in B.$$

Dacă f^{-1} există spunem că f este inversabilă.

Teorema 8.1. Funcția $f : A \rightarrow B$ este inversabilă dacă și numai dacă este bijectivă.

Observația 8.4. Știm că în plan simetricul punctului $M(x, y)$ față de prima bisectoare este punctul $M'(y, x)$. O consecință a acestui fapt este că reprezentarea grafică a funcției f^{-1} este simetrica față de prima bisectoare a reprezentării grafice a funcției f .

Exemple:

Procedeeul de determinare a funcției inverse este, atunci când este posibil, similar cu cel al determinării domeniului de surjectivitate. În cazul funcțiilor bijective se obține o singură funcție g care este chiar inversa funcției f .

1. Să se determine inversa funcției $f(x)=3x-2$.

Ecuția în x , $3x - 2 = y$ are în $\mathbb{R}$, $\forall y$, soluția unică $x = \frac{y+2}{3}$

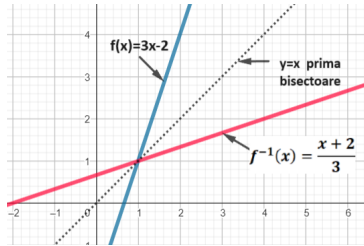


Fig. 8.15: Inversa unei funcții liniare

deci funcția f este bijectivă. Funcția inversă $f^{-1}(y)$ este chiar $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{3}$. Revenind la variabila x avem $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$.

2. Fie $f : [2, \infty) \rightarrow [-1, \infty)$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Să se determine f^{-1} și să se traseze graficele celor două funcții.

Funcția cu reprezentarea grafică $y = x^2 - 4x + 3$ este injectivă pentru $x \in [2, \infty)$ și surjectivă pentru $y \in [-1, \infty)$. Explicităm x în expresia reprezentării grafice și obținem $x = 2 + \sqrt{1+y}$. Deci funcția inversă va fi $f^{-1} : [-1, \infty) \rightarrow [2, \infty)$, $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$.

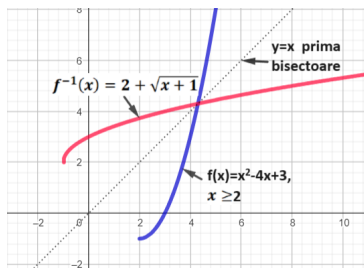


Fig. 8.16: Inversa unei funcții polinomiale de gradul al doilea

3. Să se determine inversa funcției $f(x) = \begin{cases} 0,5x+1 & x \leq 0 \\ x^2+1 & x > 0 \end{cases}$ și să se reprezinte grafic funcția și inversa sa. Funcția f este bi-

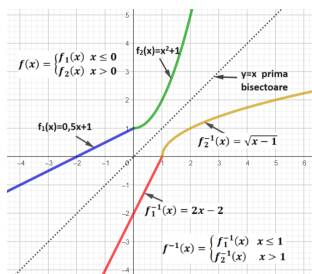


Fig. 8.17: Inversa unei funcții etajate

jectivă pe $\mathbb{R}$. Inversăm ca în exemplele anterioare fiecare ramură a funcției și obținem

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 2x-2 & x \leq 1 \\ \sqrt{x-1} & x > 1 \end{cases}$$

Capitolul 9

Permutări

Definiția 9.1. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ o mulțime finită cu n elemente. Numim permutare de n elemente sau pe scurt permutare, o funcție bijectivă de la A la A .

Permutările le vom nota cu litere grecești și le vom reprezenta prin intermediul unei diagrame.

$$\alpha = \left(\begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ | & | & \dots & | \\ a_{\alpha_1} & a_{\alpha_2} & \dots & a_{\alpha_n} \end{array} \right), \quad a_{\alpha_i} \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$$

Natura elementelor și ordinea lor în prima linie a diagramei nu este importantă. Importantă este doar corespondența indicilor. De aceea este suficient să considerăm mulțimea $A = \{1, 2, \dots, n\}$ iar indicii α_i să îi notăm $\alpha(i)$. Astfel permutarea α devine

$$\alpha = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{array} \right)$$

Punem în evidență două permutări speciale

$$\text{permutarea identică} \quad e = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{array} \right)$$

și

$$\text{permutarea contrară} \quad \bar{e} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{array} \right).$$

Numărul tuturor permutărilor de n elemente îl notăm cu S_n .

Pe mulțimea permutărilor introducem operația de înmulțire a permutărilor, notată prin juxtapunere, care este de fapt compunere de funcții. Dacă

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \beta(1) & \beta(2) & \dots & \beta(n) \end{pmatrix}$$

atunci

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(\beta(1)) & \alpha(\beta(2)) & \dots & \alpha(\beta(n)) \end{pmatrix}.$$

Exemplu:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Produsul se face astfel:

$$\begin{aligned} 1 \in \beta \rightarrow 2 \in \beta, \quad 2 \in \alpha \rightarrow 3 \in \alpha &\Rightarrow 1 \in \alpha\beta \rightarrow 3 \in \alpha\beta \\ 2 \in \beta \rightarrow 1 \in \beta, \quad 1 \in \alpha \rightarrow 2 \in \alpha &\Rightarrow 2 \in \alpha\beta \rightarrow 2 \in \alpha\beta \\ 3 \in \beta \rightarrow 3 \in \beta, \quad 3 \in \alpha \rightarrow 1 \in \alpha &\Rightarrow 3 \in \alpha\beta \rightarrow 1 \in \alpha\beta. \end{aligned}$$

Înmulțirea permutărilor este asociativă, admite element neutru permutarea identică e și orice permutare este inversabilă. Inversa permutării α este permutarea α^{-1} definită astfel:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \end{pmatrix}, \quad \alpha^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha(1) & \alpha(2) & \dots & \alpha(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Aranjând elementele de pe prima linie în ordine crescătoare avem

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha^{-1}(1) & \alpha^{-1}(2) & \dots & \alpha^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

Propoziția 9.1. *Avem*

$$\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = e.$$

9.0.1 Transpoziții

O categorie importantă de permutări este reprezentată de transpoziții. Transpoziția care acționează pe elementele i și j o vom nota cu τ_{ij} și o definim astfel:

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} k & k \neq i, \quad k \neq j \\ j & k = i \\ i & k = j \end{cases} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

Asta înseamnă că τ_{ij} schimbă între ele elementele i și j restul lăsându-le pe loc.

Propoziția 9.2. *Inversa unei transpoziții este ea însăși.*

$$\tau_{ij}^{-1} = \tau_{ij}$$

Propoziția 9.3. *Orice permutare poate fi scrisă ca produs de transpoziții. Scrierea nu este unică.*

9.0.2 Inversiuni, semnul unei permutări

Definiția 9.2. *Fie α o permutare. Perechea (i, j) se numește regulată dacă $i - j$ și $\alpha(i) - \alpha(j)$ au același semn. În caz contrar perechea (i, j) se numește inversiune.*

Notăm cu $m(\alpha)$ numărul inversiunilor lui α .

Definiția 9.3. *Permutarea α se numește permutare pară dacă $m(\alpha)$ este un număr par, altfel permutarea se numește impară.*

Putem să determinăm numărul inversiunilor unei permutări astfel: Scriem permutarea sub formă de diagramă. Ne poziționăm sub diagramă în dreptul elementului 1 de pe prima linie a diagramei și numărăm câte elemente de pe linia a doua situate la dreapta lui $\alpha(1)$ sunt mai mici decât $\alpha(1)$. Fie acest număr m_1 . Ne poziționăm acum sub elementul 2 de pe prima linie a diagramei și numărăm câte elemente situate la dreapta lui $\alpha(2)$ sunt mai mici decât $\alpha(2)$. Notăm acest număr cu m_2 . repetăm procedeul până la $n - 1$ obținând pe m_{n-1} . Atunci

$$m(\alpha) = m_1 + m_2 + \dots + m_{n-1}.$$

Exemplu: *Să determinăm numărul inversiunilor lui α dacă*

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$\alpha(1) = 2$ și la dreapta sa avem un singur element mai mic ca 2. Deci $m_1 = 1$. Trecem la elementul $\alpha(2) = 4$. La dreapta sa avem 2 elemente mai mici decât el. Rzultă $m_2 = 2$. Repetăm procedeul și obținem $m_3 = 0$, $m_4 = 1$. De aici

$$m(\alpha) = 1 + 2 + 0 + 1 = 4.$$

Observația 9.1. *Numărul maxim de inversiuni este C_n^2 pe care îl are permutarea contrară $\bar{e}$. Numărul minim de inversiuni este 0 și este numărul inversiunilor permutării identice e .*

Propoziția 9.4. 1. Pentru orice permutări α, β avem:

$$m(\alpha\beta) \leq m(\alpha) + m(\beta).$$

2. Dacă $\alpha\beta = \bar{e}$ atunci $m(\alpha\beta) = m(\alpha) + m(\beta)$.

Definiția 9.4. Numim *signatura permutării* sau *semnul permutării* $\alpha \in S_n$ numărul

$$\varepsilon(\alpha) = (-1)^{m(\alpha)}.$$

Propoziția 9.5. Pentru orice permutări $\alpha, \beta \in S_n$ avem

$$\varepsilon(\alpha\beta) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\beta).$$

Propoziția 9.6. Orice transpoziție din S_n este o permutare impară.

Aplicații

1. Să se determine signatura, inversa și signatura inversei pentru permutarea

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Avem pe rând $m(\alpha) = 5 + 1 + 2 + 2 + 1 = 11$ deci $\varepsilon(\alpha) = (-1)^{11} = -1$. Determinăm direct inversa scriind întâi diagrama sa ca fiind diagrama lui α răsturnată.

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Aranjăm în ordine crescătoare elementele de pe prima linie păstrând corespondențele și obținem:

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 2 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Numărul de inversiuni și semnul acestei permutări sunt

$$m(\alpha^{-1}) = 5 + 1 + 3 + 1 + 1 = 11, \quad \varepsilon(\alpha^{-1}) = (-1)^{11} = -1.$$

Semnul permutării α^{-1} îl puteam scrie direct pentru că

$$\alpha\alpha^{-1} = e, \quad \varepsilon(e) = 1, \quad 1 = \varepsilon(\alpha\alpha^{-1}) = \varepsilon(\alpha)\varepsilon(\alpha^{-1}) = (-1)\varepsilon(\alpha^{-1}).$$

2. Să se arate că nu există nicio permutare $\alpha \in S_5$ a.i.

$$\alpha^2 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se știe că $\varepsilon(\alpha^2) = 1$ și calculând $\varepsilon(\beta)$ obținem -1.

3. Să se arate că orice descompunere a permutării

$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ în produs de transpoziții are un număr par de factori.

Știm că orice transpoziție are signatura negativă, că produsul a două permutări are semnul produsului semnelor permutărilor și observăm că permutarea α are signatura pozitivă.

9.0.3 Ciclurile unei permutări

Fie $E = \{1, 2, \dots, n\}$, $\alpha \in S_n$ și $x \in E$. Construim mulțimea imaginilor succesive ale lui x prin puterile lui α .

$$\mathcal{C}_{x,\alpha} = \{x, \alpha(x), \alpha^2(x), \dots, \alpha^{p-1}(x)\}$$

unde p este cel mai mic număr natural astfel încât $\alpha^p(x)$ să aparțină mulțimii $\mathcal{C}_{x,\alpha}$.

Propoziția 9.7. $\alpha^p(x) = x$.

Definiția 9.5. Mulțimea $\mathcal{C}_{x,\alpha}$ poartă numele de ciclu al permutării α .

Elementul x este un reprezentant al ciclului.

Propoziția 9.8. Oricare două cicluri ale permutării α coincid sau sunt distincte.

Propoziția 9.9. Pentru orice permutare α dată, mulțimea

$$\mathcal{G}_\alpha = \{\mathcal{C}_{x,\alpha} \mid x \in E\}$$

constituie o partiție a lui E .

Definiția 9.6. 1. Mulțimea $\mathcal{G}_\alpha$ se numește graful permutării α .

2. O permutare care acționează asupra unui ciclu și lasă celelalte elemente pe loc se numește permutare ciclică.

3. Pentru o permutare ciclică, elementele care nu sunt lăsate pe loc de ea poartă numele de suportul ciclului.

Propoziția 9.10. *Orice permutare se poate descompune în mod unic în produs de permutări ciclice.*

Propoziția 9.11. *Permutările ciclice $\alpha, \beta \in S_n$ de suporturi disjuncte comută.*

Definiția 9.7. *Numărul de elemente din suportul ciclului unei permutări ciclice poartă numele de lungimea ciclului.*

Propoziția 9.12. *O permutare ciclică cu suport de lungime impară are signatura pozitivă.*

Propoziția 9.13. *Dacă o permutare $\alpha \in S_n$ se descompune în k permutări ciclice cu suporturi de lungimile $l_1, l_2, \dots, l_k$ și $l = c.m.m.c.(l_1, l_2, \dots, l_k)$ atunci*

$$\alpha^l = e.$$

Aplicații:

1. Fie permutarea $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 5 & 7 & 8 & 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Să se determine ciclul elementului 7.

Observăm că $7 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 7$. Se repetă 7 deci

$$\mathcal{C}_{7,\alpha} = \{7, \alpha(7) = 1, \alpha^2(7) = 3\} = \{7, 1, 3\}$$

b) Graful atașat acestui ciclu.

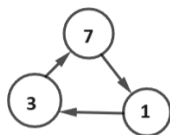


Fig. 9.1: Graful atașat ciclului $\mathcal{C}_{(7,\alpha)}$

c) Să se scrie permutarea ciclică corespunzătoare acestui ciclu.

$$\alpha_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

d) Să se determine $\mathcal{G}_\alpha$.

Determinăm întâi și celelalte cicluri ale permutării α . Ciclul lui 2 este:

$$2 \rightarrow 5, 5 \rightarrow 6, 6 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 8, 8 \rightarrow 2$$

Deci:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{(2,\alpha)} &= \{2, \alpha(2) = 5, \alpha^2(2) = 6, \alpha^3(2) = 4, \alpha^4(2) = 8\} = \\ &= \{2, 5, 6, 4, 8\}.\end{aligned}$$

Lungimea lui $\mathcal{C}_{(7,\alpha)} = 3$, a lui $\mathcal{C}_{(2,\alpha)} = 5$ și pentru că α este o permutare de 8 elemente rezultă că cele două cicluri determinate sunt toate ciclurile lui α deci:

$$\mathcal{G}_\alpha = \{\mathcal{C}_{(7,\alpha)}, \mathcal{C}_{(2,\alpha)}\}.$$

e) Reprezentarea grafică a lui $\mathcal{G}_\alpha$.



Fig. 9.2: Graful atașat permutării α .

f) Să se scrie permutarea dată ca produs de permutări ciclice.

Scriem și permutarea ciclică atașată lui $\mathcal{C}_{(2,\alpha)}$. Aceasta este

$$\alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 3 & 8 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Atunci $\alpha = \alpha_7 \alpha_2$.

g) Să se determine puterea la care trebuie ridicată permutarea α ca să obținem permutarea identică.

Avem

$$\alpha = \alpha_7 \alpha_2, \quad l_{\alpha_7} = 3, \quad l_{\alpha_2} = 5, \quad c.m.m.m.c\{3, 5\} = 15 \Rightarrow \alpha^{15} = e.$$

2. Să se determine permutarea α astfel încât $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Permutarea α^2 este o permutare ciclică de lungime 3 deci și

permutarea α este ciclică de lungime 3. Rezultă că $\alpha^3 = e$. De aici avem:

$$e = \alpha^3 = \alpha\alpha^2 \Rightarrow \alpha = (\alpha^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dacă $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ să se calculeze α^{123} .

Se observă că α este permutare ciclică de lungime 4 pentru că

$$1 \rightarrow 3, 3 \rightarrow 2, 2 \rightarrow 4, 4 \rightarrow 1.$$

Rezultă că $\alpha^4 = e$ deci $\alpha^{123} = \alpha^{123 \bmod 4} = \alpha^3$. Soluția se obține fără calcul, direct din reprezentarea grafică a lui $\mathcal{G}_\alpha$. Din figura

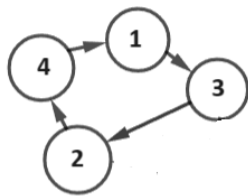


Fig. 9.3: Graful atașat permutării α

9.3 vedem că

$$\alpha(1) = 3, \quad \alpha^2(1) = 2, \quad \alpha^3(1) = 4.$$

Mergând pe graf în continuare se observă că

$$\alpha^3(3) = 1, \quad \alpha^3(2) = 3, \quad \alpha^3(4) = 2.$$

$$\text{Deci } \alpha^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Capitolul 10

Funcții polinomiale elementare

10.1 Funcția și ecuația de gradul al doilea

10.1.1 Graficul funcției de gradul al doilea

Să considerăm în plan un reper cartezian. Fiecărui punct M din plan îi vom asocia astfel două coordonate $M(x, y)$. Prima coordonată, x , se va numi abscisa punctului iar cea de a doua, y , se va numi ordonata sa. Numim parabolă mulțimea punctelor din plan pentru care coordonatele lor satisfac relația

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0 \quad (10.1)$$

și numim funcție de gradul al doilea

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax^2 + bx + c \quad (10.2)$$

Observația 10.1. Să reamintim că o funcție $f : A \rightarrow B$ este o corespondență între mulțimile A și B care atașază fiecărui punct din A o singură valoare din B . Graficul funcției f este o mulțime de puncte $M(x, y)$ din plan ale căror coordonate satisfac relația $y = f(x)$.

O curbă în plan este o mulțime de puncte $C(x, y)$ ale căror coordonate satisfac o relație de forma $F(x, y) = 0$. De exemplu, un cerc centrat în origine și de rază 5 este dat de relația $x^2 + y^2 = 25$. Această relație nu este o relație de tip funcție pentru că pentru $x = 3$ există două valori ale lui y , $y = 4$ și $y = -4$ care satisfac relația $x^2 + y^2 = 25$.

Relația $y = ax^2 + bx + c$ este o relație de tip funcție.

Pentru a trasa graficul unei parabole pornim de la exemple simple pentru a înțelege influența coeficienților asupra graficului. Luăm, pentru

început cazul în care $a = 1$, $b = c = 0$. Tabelul de corespondență între coordonatele parabolei în acest caz este

x		...	-2	-1	0	1	2	...
$y = x^2$		+	4	1	0	1	4	+

Observăm că în zona $-\infty$ valorile lui y tind spre $+\infty$, apoi graficul este descrescător până la 0 și crescător de la 0 la infinit. În origine acest grafic are un punct de minim. Acel punct se va numi vârful parabolei. Notăția uzuală pentru vârf este $V(x_{vf}, y_{vf})$. Parabola admite axa Oy ca axă de simetrie. Graficul parabolei $y = x^2$ taie axa Oy în origine și e tangentă la axa Ox în origine.

Fie $y = ax^2$. Pentru $a > 0$ subunitar, brațele parabolei se îndepărtează între ele iar pentru valori supraunitare ale lui a parabola are brațele mai apropiate.

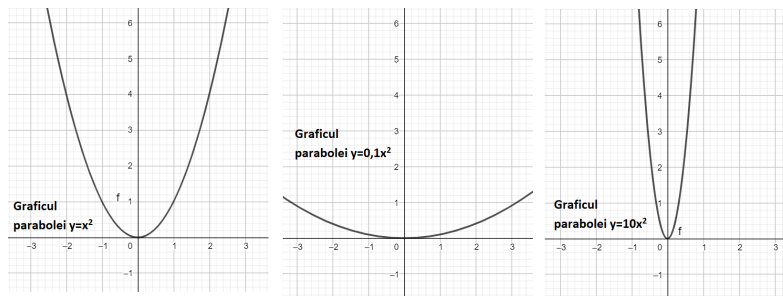
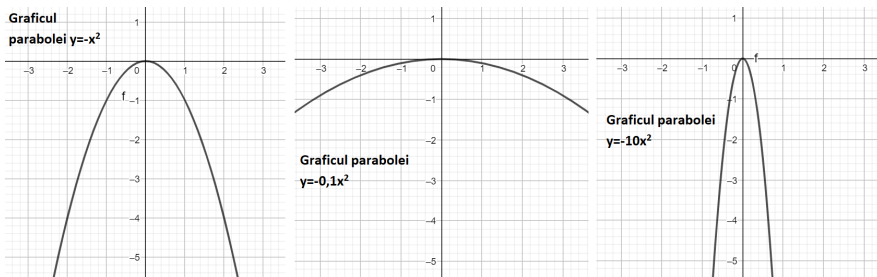


Fig. 10.1: Graficul parabolei $y = ax^2$, $a > 0$

Considerăm parabola $y = -x^2$. Tabelul de corespondență între coordonatele parabolei în acest caz este

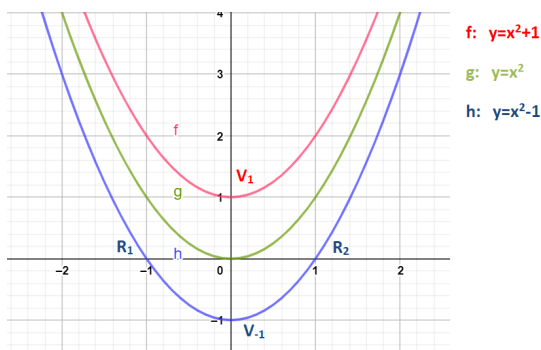
x		...	-2	-1	0	1	2	...
$y = -x^2$		-	-4	-1	0	-1	-4	-

În zona de la $-\infty$ valorile lui y sunt negative. Graficul este crescător până la 0 unde ia valoarea maximă 0 și apoi devine descrescător, la infinit tinzând către $-\infty$. Axa Oy este axă de simetrie a graficului pentru că relația $f(-x) = f(x)$ este adevărată pentru orice x . Observăm că graficele $y = ax^2$ și $y = -ax^2$ sunt simetrice față de axa Ox . În concluzie, pentru $a > 0$ graficul parabolei $y = ax^2$ are brațele dirijate în sus, admite un punct de minim. Pentru cazul în care coeficientul lui x^2 este negativ graficul parabolei are brațele dirijate în jos iar vârful parabolei este un punct de maxim. Să considerăm acum

Fig. 10.2: Graficul parabolei $y = ax^2$, $a < 0$

cazurile în care pentru $y = ax^2 + bx + c$ luăm $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$ sau $c = -1$. Tabelul de corespondență între valorile lui x și ale lui y este:

x	...	-2	-1	0	1	2	...
$y = x^2 + 1$	+	5	2	1	2	5	+
$y = x^2 - 1$	+	3	0	-1	0	3	+

Fig. 10.3: Graficul parabolei $y = x^2 + c$

Graficul parabolei $y = x^2 + 1$ este translatat față de cel al parabolei $y = x^2$ în sus cu o unitate. Vârful este în punctul $V_1(0, 1)$. Acest grafic nu intersectează axa Ox ci doar axa Oy .

Pentru parabola $y = x^2 - 1$ graficul se obține prin translatarea în jos cu o unitate a graficului lui $y = x^2$. Vârful parabolei devine $V_{-1}(0, -1)$. Parabola întâlnește axa Ox în două puncte distincte $R_1(-1, 0)$ și $R_2(1, 0)$.

În concluzie, coeficientul $c \neq 0$ face ca graficul lui $y = x^2 + c$ să fie translatat pe direcția axei Oy . Pentru $c < 0$ graficul va intersecta axa Ox în două puncte simetrice față de origine.

Să considerăm acum cazul în care expresia parabolei este de forma

$$y = (x - p)^2.$$

Vom observa că în acest caz graficul parabolei se translatează după direcția axei Ox astfel: dacă $p > 0$ translatarea se face în sensul axei iar pentru $p < 0$ în sens opus.

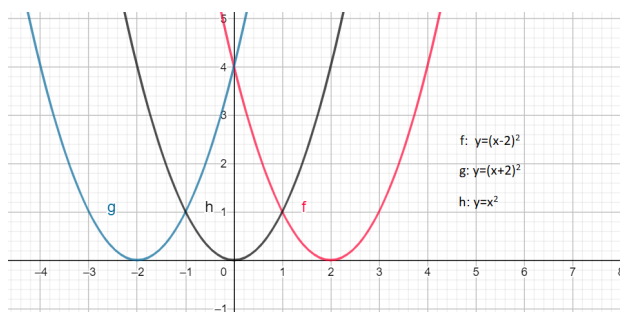


Fig. 10.4: Graficul parabolei de forma $y = (x - p)^2$

Graficul unei parabole a cărei expresie este pusă sub forma

$$y = (x - p)^2 + q$$

se obține din graficul parabolei $y = x^2$ prin translatarea după direcția axei Ox cu valoarea p simultan cu translatarea după direcția axei Oy cu valoarea q .

Pentru parabolele de forma

$$y = a(x - p)^2 + q$$

graficul lor se obține din graficul parabolei $y = ax^2$ traslatat pe Ox cu valoarea p și pe Oy cu valoarea q .

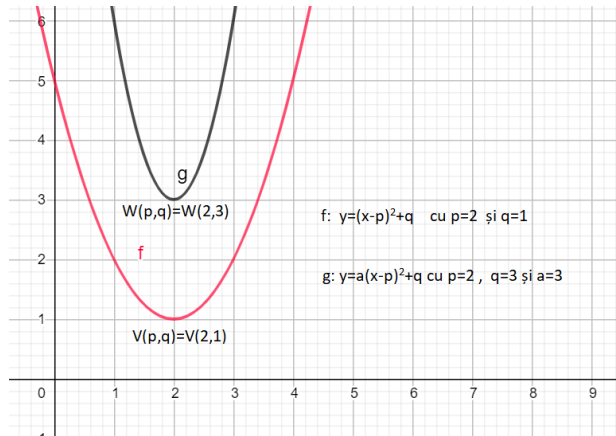
10.1.2 Forma canonică a unei funcții de gradul al doilea

Forma

$$y = a(x - p)^2 + q \tag{10.3}$$

poartă numele de formă canonică a unei parabole și ea evident este aceeași cu forma canonică a unei funcții de gradul al doilea.

Expresia generală a unei parabole $y = ax^2 + bx + c$ poate fi pusă sub forma canonică astfel:

Fig. 10.5: Graficul unei parabole de forma $y = a(x - p)^2 + q$

1. Dăm factor comun pe a

$$y = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right)$$

2. Completăm expresia $x^2 + \frac{b}{a}x$ la un pătrat perfect adică o scriem sub forma

$$x^2 + 2 \left(\frac{b}{2a} \right) x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}$$

3. Rescriem ecuația parabolei

$$y = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right)$$

deci

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Folosind notația consacrată $\Delta = b^2 - 4ac$ obținem forma canonică

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \quad (10.4)$$

Prin identificarea coeficienților cu coeficienții din ecuația 10.3 obținem

$$p = -\frac{b}{2a}, \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Punctul în care graficul își schimbă monotonia se numește ”vârful parabolei” și are coordonatele

$$x_{vf} = p, \quad y_{vf} = q$$

de unde:

$$x_{vf} = -\frac{b}{2a}, \quad y_{vf} = -\frac{\Delta}{4a} \quad (10.5)$$

Să precizăm încă o dată că în cazul în care $a > 0$ graficul parabolei are un minim în vârf iar în cazul în care $a < 0$ graficul are un maxim. Axa de simetrie a graficului funcției de gradul al doilea este dreapta paralelă cu axa Oy , de ecuație

$$x = x_{vf}.$$

Exerciții:

1. Să se determine vârful parabolei și axa de simetrie asociate următoarelor funcții:

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = 6x^2 - 4x + 3 & b) \quad f(x) = x^2 - x + 3 \\ c) \quad f(x) = x^2 - 2x - 1 & d) \quad f(x) = -x^2 + 5x - 8 \\ e) \quad f(x) = 3x^2 - x + 4 & f) \quad f(x) = x^2 - 16 \end{array}$$

2. Să se determine valorile de maxim sau de minim ale următoarelor funcții de gradul al doilea:

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = x^2 - 4x + 1 & b) \quad f(x) = 2x^2 + x + 1 \\ c) \quad f(x) = 3x^2 - 5x + 1 & d) \quad f(x) = x^2 + 2x + 5 \\ e) \quad f(x) = 0,1x^2 + 0,4x + 0,5 & f) \quad f(x) = x^2 - 6x + 8 \end{array}$$

3. Să se determine punctul în care următoarele funcții admit un maxim sau un minim:

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = x^2 - 1 & b) \quad f(x) = 4x^2 - x - 5 \\ c) \quad f(x) = -x^2 - 3x + 6 & d) \quad f(x) = -x^2 + 0,5x + 3 \\ e) \quad f(x) = \frac{2}{3}x^2 + 4x + 7 & f) \quad 3x^2 + 12 \end{array}$$

4. Să se aducă la forma canonică următoarele funcții de gradul al

$$\begin{array}{ll} a) \quad f(x) = x^2 - 2x + 6 & b) \quad f(x) = 2x^2 - 12x + 3 \\ \text{doilea: } c) \quad f(x) = -4x + 10x + 1 & d) \quad f(x) = 5x^2 - 2x + 3 \\ e) \quad f(x) = 10x^2 - x + 2 & f) \quad f(x) = x^2 - 4x + 4 \end{array}$$

10.1.3 Intersecția cu axele de coordonate

Intersecția graficului parabolei cu axele de coordonate se obține imediat din forma canonică. Astfel, pentru intersecția cu axa Ox în for-

mula 10.4 îl facem pe $y = 0$ și rezultă

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0$$

care poate fi scrisă în continuare, după ce împărțim cu a și trecem în dreapta termenul care îl conține pe Δ

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (10.6)$$

Punem în evidență cele trei cazuri determinate de valorile lui Δ

1. $\Delta > 0$. În acest caz graficul parabolei va intersecta axa Ox în două puncte pe care le obținem rezolvând ecuația 10.6. Avem:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$

de unde obținem cele două puncte de intersecție cu axa Ox

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (10.7)$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. $\Delta = 0$. Graficul parabolei va fi în acest caz tangent la axa Ox chiar în vârf și deci

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a}.$$

3. $\Delta < 0$. În acest caz graficul parabolei nu intersectează axa Ox .

Pentru ecuația de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ semnificația rezultatelor anterioare este următoarea:

$\Delta > 0$ ecuația are două rădăcini reale.

$\Delta = 0$ ecuația are o rădăcină dublă.

$\Delta < 0$ ecuația are rădăcini complexe.

Intersecția parabolei cu axa Oy o obținem din forma generală $y = ax^2 + bx + c$ făcându-l pe $x = 0$ și vom obține

$$y = c.$$

Exerciții:

1. Să se rezolve următoarele ecuații de gradul al doilea descompunând expresiile în factori:

$$a) \quad x^2 - 4x - 12 = 0 \quad b) \quad x^2 - 11x + 10 = 0$$

$$c) \quad 2x^2 - 3x - 2 = 0 \quad d) \quad x^2 + x - 2 = 0$$

$$e) \quad x^2 - 6x + 8 = 0 \quad f) \quad x^2 - 25 = 0$$

Exemplu: Pentru ecuația $3x^2 - 2x - 8 = 0$ procedăm astfel:

Rescriem ecuația sub forma

$$3x^2 - 6x + 4x - 8 = 0$$

sau dând factor din primii doi termeni pe $3x$ avem:

$$3x(x - 2) + 4(x - 2) = 0.$$

De aici, după ce dăm factor comun, avem:

$$(x - 2)(3x + 4) = 0$$

de unde egalând fiecare factor cu 0 obținem soluțiile $x_1 = 2$ și $x_2 = -\frac{4}{3}$.

2. Să se rezolve următoarele ecuații reducând expresiile la forma canonică:

$$a) \quad x^2 - 3x + 2 = 0 \quad b) \quad x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$c) \quad x^2 - 9 = 0 \quad d) \quad x^2 + 2x - 5 = 0$$

$$e) \quad x^2 - 6x + 9 = 0 \quad f) \quad x^2 - 4x - 5 = 0$$

3. Să se determine soluțiile următoarelor ecuații folosind formula lor de rezolvare:

$$a) \quad x^2 + 2x - 3 \quad b) \quad x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$c) \quad x^2 - 16 = 0 \quad d) \quad x^2 - 8x + 16$$

$$e) \quad 2x^2 - x - 1 = 0 \quad f) \quad -3x^2 + 4x - 1 = 0$$

4. Să se rezolve următoarele ecuații completând la pătrat perfect expresiile:

$$a) \quad x^2 - 2x - 5 = 0 \quad b) \quad x^2 - 3x + 1 = 0$$

$$c) \quad x^2 - 4x + 2 = 0 \quad d) \quad 2x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$e) \quad 2x^2 + x - 1 = 0 \quad f) \quad x^2 - 4x + 3 = 0$$

Exemplu: Pentru ecuația $x^2 - 5x + 3 = 0$ procedăm astfel:

$$x^2 - 5x + 3 = x^2 - 2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 3.$$

Ecuția va arăta astfel:

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{25}{4} - 3\right) = 0$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{13}{4} = 0$$

Descompunem în factori diferența de pătrate și obținem:

$$\left(x - \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right) = 0.$$

Egalând fiecare factor cu 0 obținem soluțiile ecuației.

10.2 Semnul funcției de gradul al doilea

Considerăm pentru început cazul în care $\Delta > 0$. Pentru funcția de gradul al doilea avem, depinzând de semnul lui a , graficele date de figura 10.6. Observăm că dacă $a > 0$ funcția ia valori pozitive pentru

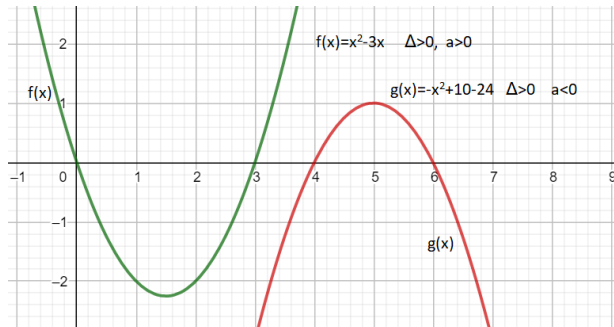


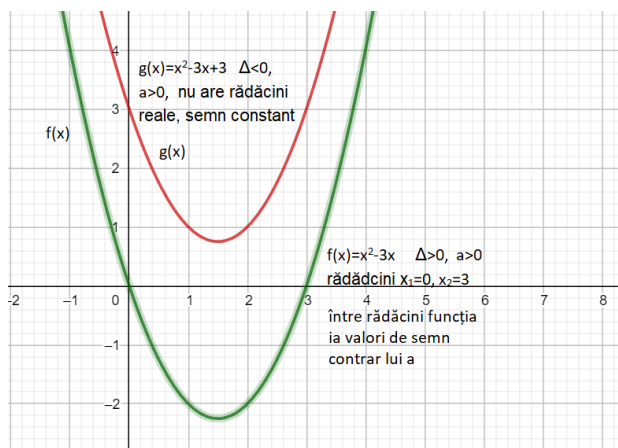
Fig. 10.6: Grafice pentru $a > 0$ și pentru $a < 0$

x în afara intervalului determinat de rădăcini iar în interiorul acestui interval valorile funcției sunt negative. Pentru $a < 0$ între rădăcini funcția are valori pozitive, iar în afara lor graficul funcției este sub axa Ox deci funcția ia valori negative. În concluzie:

Dacă $\Delta > 0$ între rădăcini avem semn contrar lui a iar în afara rădăcinilor semnul lui a .

Pentru $\Delta = 0$ avem peste tot semnul lui a și 0 în rădăcina dublă.

Pentru $\Delta < 0$ rădăcinile sunt complexe și vom avea peste tot semnul lui a .

Fig. 10.7: Grafice pentru $\Delta > 0$ și pentru $\Delta < 0$ dacă $a > 0$.

10.3 Intervale de monotonie

Distingem iarăși două cazuri date de semnul lui a

1. pentru $a > 0$ funcția este strict descrescătoare pentru $x \in (-\infty, x_{vf}]$ și strict crescătoare pentru $x \in [x_{vf}, \infty)$
2. Pentru $a < 0$ funcția este strict crescătoare pentru $x \in (-\infty, x_{vf}]$ și strict descrescătoare pentru $x \in [x_{vf}, \infty)$

Exerciții:

1. Să se stabilească semnul și intervalele de monotonie pentru următoarele funcții:
 - a) $f(x) = x^2 - 5x + 4$
 - b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$
 - c) $f(x) = x^2 + x + 1$
 - d) $f(x) = -2x^2 + x + 1$
 - e) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$
 - f) $f(x) = -x^2 + 64$
 - g) $f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$
 - h) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5$
2. Studiați semnul și trasați graficul următoarelor funcții:
 - a) $f_1(x) = x^2 - 4x + 3$
 - b) $f_2(x) = x^2 - 3x - 10$
 - c) $f_3(x) = x^2 - 4x + 5$
 - d) $f_4(x) = -x^2 - x + 2$
 - e) $f_5(x) = x^2 - 4x + 4$
 - f) $f_6(x) = -x^2 + x - 3$
3. Motivați faptul că parabola $y = ax^2$ admite pe $x = 0$ ca axă de simetrie.

4. Pornind de la forma canonică a funcției de gradul al doilea motivați faptul că graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ admite dreapta $x = x_{vf}$ ca axă de simetrie.

Ind. Se va arăta ca $f(x - x_{vf}) = f(-x - x_{vf})$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

5. Arătați că pentru funcția $f(x) = x^2 - 4x$ este adevărată relația

$$f(1.(3)) = f\left(2 + \sqrt{0.(4)}\right).$$

Ind. Determinați x_{vf} și arătați ca numerele 1.(3) și $2 + \sqrt{0.(4)}$ sunt simetrice față de x_{vf} .

6. Pornind de la forma canonică arătați că funcția $f(x) = x^2 + x + 1$ este pozitivă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

10.4 Relațiile lui Viète

Considerăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$. Rădăcinile ei sunt

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Calculând suma și produsul rădăcinilor obținem:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases} \quad (10.8)$$

Sistemul 10.8 poartă numele de relațiile lui Viète.

Observația 10.2. Rezolvarea ecuației de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$ este echivalentă cu rezolvarea sistemului dat de relațiile lui Viète. Astfel, ecuației $ax^2 + bx + c = 0$ i se atașează în mod unic sistemul 10.8 și reciproc.

Definiția 10.1. Notăm cu $s = x_1 + x_2$ și cu $p = x_1 x_2$. Un sistem cu două ecuații și două necunoscute ale cărui ecuații pot fi exprimate doar în funcție de s și p poartă numele de sistem simetric și rezolvarea lui se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea.

Exemple:

1. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + 2xy = 7 \\ 2(x + y) - xy = 4 \end{cases}$$

Notăm $s = x + y$ și $p = xy$. Sistemul devine

$$\begin{cases} s + 2p = 7 \\ 2s - p = 4 \end{cases}$$

a cărui soluție este $s = 3$ și $p = 4$. Cunoșcând s și p , ecuația de gradul al doilea atașată sistemului 10.8 este

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Obținem astfel ecuația $x^2 - 3x + 2 = 0$ ale cărei soluții sunt $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ și revenind în sistem rezultă $y_1 = 1$ și $y = 2$.

2. Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x + y + 3xy = -5 \\ 3x^2y + 3xy^2 = -6 \end{cases}$$

Dăm factor comun în a doua ecuație pe $3xy$ și obținem $3xy(x + y) = -6$. Notăm $s = x + y$ și $v = 3xy$. Sistemul inițial devine

$$\begin{cases} s + v = -5 \\ sv = -6 \end{cases}$$

Ecuația de gradul al doilea atașată este $s^2 + 5s - 6 = 0$ care ne conduce la soluțiile

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -6, \quad \text{deci} \quad v_1 = -6, \quad v_2 = 1.$$

Studiem cele două cazuri pe rând. $v_1 = -6$ implică $xy = -2$. Cum $s = 1$, $xy = p = -2$ obținem ecuația $x^2 - x - 2 = 0$ cu soluțiile

$$x_1 = 2, \quad y_1 = -1 \quad x_2 = -1, \quad y_2 = 2.$$

În cel de al doilea caz avem $s = -6$, $v = 1$. Acum $3xy = 1$ deci $xy = \frac{1}{3}$. Pentru aceste valori ale lui s și p atașăm ecuația $x^2 + 6x + \frac{1}{3} = 0$ sau, înmulțind cu trei, $3x^2 + 18x + 1 = 0$. Soluțiile în acest caz sunt:

$$x_3 = \frac{-9 - \sqrt{78}}{2}, \quad y_3 = \frac{-9 + \sqrt{78}}{2} \quad x_4 = \frac{-9 + \sqrt{78}}{2}, \quad y_4 = \frac{-9 - \sqrt{78}}{2}.$$

Exerciții:

1. Considerăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se determine ecuațiile care au următoarele rădăcini:

a) $y_1 = -x_1, y_2 = -x_2$ b) $y_1 = x_1 + 1, y_2 = x_2 + 1$

c) $y_1 = \frac{1}{x_1}, y_2 = \frac{1}{x_2}$ d) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2^2$

e) $y_1 = \frac{x_1}{x_2}, y_2 = \frac{x_2}{x_1}$ f) $y_1 = 2x_1, y_2 = 2x_2$

g) $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}, y_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$

2. Se consideră ecuația $x^2 + x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se determine valoarea expresiei

$$E = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

3. Considerăm ecuația $x^2 - x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se determine valoarea expresiei

$$E = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} + x_1 + x_2.$$

4. Considerăm ecuația $x^2 + x + 1 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se calculeze suma $x_1^9 + x_2^9$.

5. Considerăm ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2 . Să se calculeze suma $x_1^4 + x_2^4$.

10.5 Aplicații la formulele lui Viète

Principii geometrice de extrem

Enunțăm în continuare un principiu geometric de extrem ca o aplicație a relațiilor lui Viète.

Teorema 10.1. *Dacă suma a două mărimi strict pozitive este constantă atunci produsul lor este maxim când cele două mărimi sunt egale.*

Demonstrație: Vom demonstra acest principiu geometric de extrem cu ajutorul proprietăților graficului funcției de gradul al doilea. Fie x și y cele două mărimi pozitive. Notăm cu a și b suma și produsul lor. Avem

$$\begin{cases} x + y = a \\ xy = b \end{cases} \quad (10.9)$$

Din prima ecuație, pentru că a este constant, putem exprima pe $y = a - x$. Venind în cea de a doua ecuație a sistemului obținem funcția $f(x) = x(a - x)$ al cărei extrem dorim să îl aflăm. Funcția $f(x) = -x^2 + ax$ este o funcție de gradul al doilea cu coeficientul lui x^2 negativ, deci ea admite un maxim în $x_{vf} = \frac{a}{2}$. Cum $x + y = a$ și $y = a - x$ rezultă că maximul se obține pentru $x = y$. ■

Exemplul cel mai simplu este dat de dreptunghiul de perimetru constant $4l$ și de laturi variabile a cărui arie maximă este obținută pentru cazul în care acest dreptunghi devine pătrat.

Complementarul primului principiu geometric de extrem se enunță astfel:

Teorema 10.2. *Dacă produsul a două mărimi strict pozitive este constant atunci suma lor este minimă când cele două mărimi sunt egale.*

Demonstrație: Cu aceleași notații ca la demonstrația precedentă pornim de la sistemul 10.9. Din relația $xy = b$ și b constant îl exprimăm pe $y = \frac{b}{x}$. Venind în prima ecuație a sistemului 10.9 obținem o funcție $g(x) = x + \frac{b}{x}$ definită pe $\mathbb{R}_+^*$. Pentru a determina punctele ei de extrem calculăm derivata și facem variația ei de semn.

$$g'(x) = 1 - \frac{b}{x^2}.$$

Aducem la același numitor, egalăm cu zero, ținem cont că x este strict pozitiv și obținem soluția $x = \sqrt{b}$. Tabelul de variație a funcției ne dă:

x	0	$\sqrt{b}$	∞
$g'(x)$	— — — —	0	++ ++
$g(x)$		$2\sqrt{b}$	
		$\searrow$	$\nearrow$

Valoarea de minim a funcției g este $2\sqrt{b}$ deci suma $x + y$ este minimă când $x = y$.

Acest prim principiu geometric de extrem poate fi prelungit la un caz mai general legat tot de arii în care putem avea mai multe variabile implicate. Explicăm printr-un exemplu.

Considerăm într-un cerc dat o coardă fixă AB . Pe unul dintre arcele determinate de punctele A și B luăm un punct mobil C . Să se determine poziția lui C astfel încât aria triunghiului ABC să fie maximă. Triunghiul ABC are aria maximă când înălțimea sa este maximă (pen-

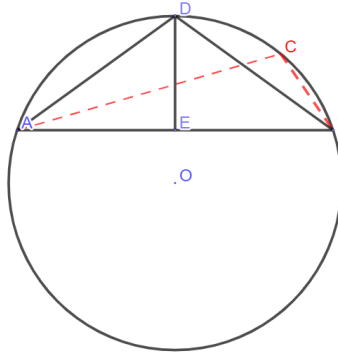


Fig. 10.8: Triunghi de arie maximă înscris în arc de cerc

tru că lungimea bazei este constantă), iar acest lucru se întâmplă când arcele AC și CB sunt egale deci când triunghiul ABC este isoscel cu $AC = CB$. Notăm cu D acea poziție a lui C care realizează maximul ariei. Extindem problema la cazul unui patrulater de arie maximă.

Să se inscrie într-un semicerc un patrulater de arie maximă care să aibă o latură diametrul cercului.

Notăm AB diametrul cercului și C , D celelalte vârfuri ale pa-

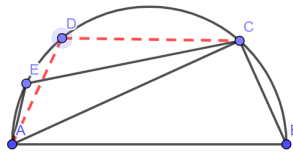


Fig. 10.9: Patrulater de arie maximă înscris în semicerc

trulaterului. Considerăm problema rezolvată pentru punctul C în sensul că știm poziția lui în cadrul soluției, cu alte cuvinte segmentul BC este constant. Patrulaterul $ABCD$ va avea arie naximă dacă triunghiul ACD va avea arie maximă. Atunci problema se reduce la problema anterioară a cărei soluție este dată de alegerea lui D astfel încât $AD = DC$. Raționând similar rezultă că segmentele $AD = DC = CB$. ■

Putem extinde principiul enunțat de teorema 10.1. la trei variabile:

Teorema 10.3. *Dacă suma a trei termeni pozitivi este constantă atunci produsul lor este maxim când cei trei factori sunt egali între ei.*

Procedăm în același fel ca în exemplul anterior. Considerăm că știm soluția pentru un termen, deci putem să îl considerăm constant și aplicând primul principiu geometric de extrem rezultă că ceilalți doi factori, pentru a avea produsul maxim, trebuie să fie egali. Raționând similar obținem demonstrația teoremei. ■

Exemplul 1: *Paralelipipedul dreptunghic de perimetru constant și volum maxim este cubul de latură egală cu perimetrul/12.*

Rezultatul este evident aplicând direct teorema 10.3..

Exemplul 2: *Care sunt dimensiunile unui paralelipiped dreptunghic de arie totală $6a^2$ și de volum maxim?*

Pentru acest caz nu poate fi aplicat direct principiul 10.3.. Tipul de raționament este însă același cu cel de la patrulaterul de arie maximă înscris în semicerc. Fie x, y, z lungimile laturilor paralelipipedului și volumul său $V = xyz$. Aria totală a lui va fi $2(xy + xz + yz) = 6a^2$. Dacă x, y sunt laturile bazei atunci aria laterală a paralelipipedului va fi $2z(x+y)$. Dacă aria totală este constantă și xy este constant rezultă că aria laterală este constantă. Din relațiile anterioare îl exprimăm pe z . Avem

$$6a^2 = 2[xy + z(x+y)]$$

adică $z(x+y) = 3a^2 - xy$ sau

$$z = \frac{3a^2 - xy}{x+y}.$$

Numărătorul acestei expresii este constant deci z este invers proporțional cu suma $x+y$ și z va fi maxim când $x+y$ va fi minim. Dar xy l-am considerat constant deci conform teoremei 10.2. suma este minimă când $x=y$. Rezultă că baza paralelipipedului trebuie să fie un pătrat. Raționând similar pentru orice față obținem că volumul maxim se obține dacă avem un cub de latură a .

Exemplul 3.: *Care este volumul maxim al unei cutii de formă paralelipiped dreptunghic fără capac dacă aria sa totală este o constantă $3a^2$?*

Prezentăm o soluție care nu necesită calcule ci doar un raționament simplu bazat pe rezultatul de la Exemplul 2.

Considerăm un paralelipiped dreptunghic de arie constantă $6a^2$ pe

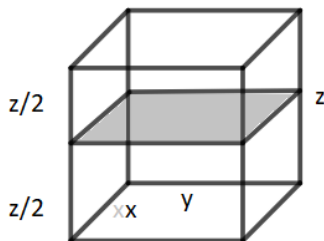


Fig. 10.10: Cutie de arie dată și volum maxim.

care îl secționăm cu un plan paralel cu baza dus prin jumătatea înălțimii. Obținem astfel două cutii identice cu cea dată în problemă. Dar paralelipipedul inițial va avea volum constant dacă este un cub cu latura a deci cutia noastră va avea volum maxim dacă baza va fi un pătrat cu latura a și va avea înălțimea jumătate din latura bazei adică $z = \frac{a}{2}$.

Enunțăm în continuare, fără demonstrații, și alte principii geometrice de extrem.

Teorema 10.4. 1. Dacă suma pătratelor a două mărimi strict pozitive este constantă, atunci produsul lor este maxim când cele două mărimi sunt egale.

2. Dacă produsul a două mărimi strict pozitive este constant atunci suma pătratelor lor este minimă când cele două mărimi sunt egale.

3. Dacă a , b , x , y sunt mărimi strict pozitive astfel încât suma $ax + by$ este constantă atunci produsul xy este maxim când $ax = by$.

4. Dacă a , b , x , y sunt mărimi strict pozitive astfel încât suma $ax + by$ este constantă atunci suma $x^2 + y^2$ este minimă când $ax = by$.

5. Dacă a , b , x , y sunt mărimi strict pozitive astfel încât produsul xy este constant atunci suma $ax + by$ este minimă dacă $ax = by$.

6. Dacă x, y, n, k sunt strict pozitive și suma $x+y$ este constantă atunci produsul $x^n \cdot y^k$ este maxim dacă x, y sunt proporționale cu puterile lor, adică $\frac{x}{n} = \frac{y}{k}$.
7. Dacă x, y, n, k sunt strict pozitive și produsul $x^n y^k$ este constant atunci suma $x+y$ este minimă dacă $\frac{x}{n} = \frac{y}{k}$.
8. Dacă x, y, z sunt mărimi strict pozitive cu xyz constant, atunci suma lor este minimă când mărimile sunt egale.

Să dăm câteva exemple legate de teorema anterioară.

Exemple:

1. Triunghiul dreptunghic de ipotenuză constantă a și de arie maximă este triunghiul dreptunghic isoscel (cateta sa este $\frac{a\sqrt{2}}{2}$).
2. Triunghiul dreptunghic de arie dată S^2 și de ipotenuză minimă este triunghiul în care catetele sunt egale și au lungimea $S\sqrt{2}$.
3. Fie $ABCD$ un dreptunghi fix. Se construiesc în exterior dreptunghiurile $CDEF$ și $DGHA$. Dacă suma ariilor acestor trei dreptunghiuri este constantă determinați poziția punctului I , al patrula vârf al dreptunghiului $FBHI$ astfel încât aria acestui dreptunghi să fie maximă. Figura 10.11.

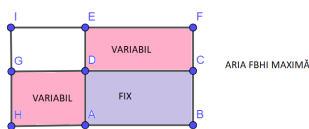


Fig. 10.11: Aria dreptunghiului HBFI maximă

4. Fie $ABCD$ un dreptunghi fix. Se construiesc în exterior dreptunghiurile $CDEF$ și $DGHA$. Dacă suma ariilor acestor trei dreptunghiuri este constantă determinați poziția punctului I , al patrula vârf al dreptunghiului $FBHI$ astfel încât distanța dintre punctele E și G să fie minimă.

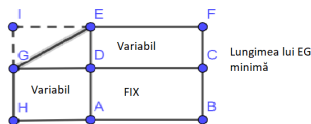


Fig. 10.12: Lungimea GE minimă

Suma puterilor de grad n ale rădăcinilor unei ecuații de gradul al doilea

Folosind relațiile 10.8 putem să exprimăm suma $x_1^2 + x_2^2$ astfel:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = s^2 - 2p = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a}.$$

Considerăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2

Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n$ și calculăm pe rând

$$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$$

$$S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = s$$

$$S_2 = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{b^2}{a^2} - 2\frac{c}{a} = s^2 - 2p$$

Putem însă să scriem faptul că x_1, x_2 sunt rădăcini ale ecuației și adunând avem:

$$\begin{array}{r} ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \\ ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \\ + \quad aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0 \end{array} \quad (10.10)$$

Îl determinăm astfel pe S_2 în funcție de a, b, c, S_1 și S_0 . Similar putem determina recursiv pe S_n pentru orice n . De exemplu, pentru S_3 scriem faptul că x_1 și x_2 sunt rădăcini ale ecuației de gradul al doilea $ax^2 + bx + c = 0$. Înmulțim prima relație cu x_1 , a doua relație cu x_2 și adunăm rezultatele.

$$\begin{array}{r} x_1 \cdot | \quad ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 = 0 \\ x_2 \cdot | \quad ax_2^2 + bx_2 + c = 0 \Rightarrow ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 = 0 \\ + | \quad aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0 \end{array}$$

Obținem astfel relația:

$$aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0. \quad (10.11)$$

Utilizând relația 10.10 obținem pe S_3 ca o expresie depinzând de a , b , c , S_1 și S_0 .

Exercițiu: Fie ecuația $x^2 - 5x + 3 = 0$ cu rădăcinile x_1 , x_2 . Să se calculeze $S_3 = x_1^3 + x_2^3$.

Soluție: Din relațiile lui Viète știm că $S_1 = 5$ și cunoaștem că $S_0 = 2$. Scriem direct relația 10.11 pentru ecuația dată. Avem: $S_3 - 5S_2 + 3S_1 = 0$ de unde $S_3 = 5S_2 - 3S_1$ iar $S_2 = 5S_1 - 3S_0 = 5 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 25 - 6 = 19$. Rezultă că $S_3 = 5 \cdot 19 - 3 \cdot 5 = 80$. ■

În general, pentru orice $n \geq 2$ relația de recurență este dată de:

$$S_0 = 2, \quad S_1 = -\frac{b}{a}, \quad aS_n + bS_{n-1} + cS_{n-2} = 0, \quad \forall n \geq 2. \quad (10.12)$$

Observația 10.3. Fie numerele întregi a , b , c și ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ cu rădăcinile x_1 , x_2 . Atunci suma $S_n = x_1^n + x_2^n$ este un număr rațional oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. Dacă $a=1$ atunci S_n este un număr întreg.

Exercițiu: Considerăm numerele $u = 5 - \sqrt{19}$ și $v = 5 + \sqrt{19}$. Arătați că suma $u^n + v^n$ este un număr întreg oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Soluție: Calculăm suma și produsul celor două numere.

$$u + v = 10, \quad uv = 6.$$

Deci cele două numere sunt soluțiile ecuației

$$x^2 - 10x + 6 = 0. \quad (10.13)$$

Utilizând rezultatul observației 10.3. obținem că suma S_n este un număr rațional. Pentru că $a = 1$ avem relația de recurență echivalentă $S_n = -bS_{n-1} - cS_{n-2}$. Deci S_n se exprimă în funcție de S_{n-1} și S_{n-2} prin intermediul unei expresii întregi și în consecință S_n este un număr întreg. ■

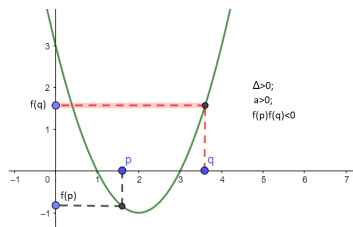
10.6 Poziția rădăcinilor ecuației de grad doi

Considerăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ și dorim să determinăm în ce condiții rădăcinile au o anumită poziție față de un interval (p, q) . Reducem problema la numărul de intersecții pe care graficul funcției $f(x) = ax^2 + bx + c$ le are cu axa Ox într-un interval dat. Pentru ca astfel de intersecții să poată exista condiția necesară este ca ecuația să admită rădăcini reale deci $\Delta \geq 0$. Determinăm în continuare și condițiile necesare pentru fiecare caz în parte și anume:

10.6.1 O rădăcină în intervalul (p, q) .

Pentru a avea o singură rădăcină în intervalul (p, q) este necesar ca să avem unul dintre capetele intervalului între rădăcini și celălalt în afara lor. Cum între rădăcini funcția are semn contrar lui a iar în afara lor semnul lui a rezultă că funcția are în p și în q semne contrare. În concluzie avem

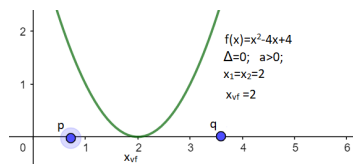
$$\text{Avem o singură rădăcină în } (p, q) \Leftrightarrow f(p) \cdot f(q) < 0 \quad . \quad (10.14)$$

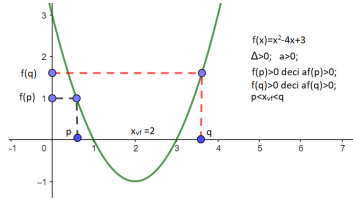
Fig. 10.13: O rădăcină în (p, q)

10.6.2 Rădăcină dublă în (p, q)

Condiția de rădăcină dublă este dată de $\Delta = 0$. Graficul funcției în cazul rădăcinii duble este tangent la axa Ox iar punctul de tangență este chiar $x_{vf} = -\frac{b}{2a}$. Deci avem

$$\text{Avem o rădăcină dublă în } (p, q) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ p < -\frac{b}{2a} < q \end{cases} \quad (10.15)$$

Fig. 10.14: Rădăcină dublă în (p, q)

Fig. 10.15: Două rădăcini în (p, q)

10.6.3 Două rădăcini în (p, q)

Va trebui în primul rând să avem două rădăcini reale deci $\Delta > 0$. Capetele intervalului vor trebui să fie în afara rădăcinilor deci $f(p)$ și $f(q)$ trebuie să aibă semnul lui a iar pentru că p și q trebuie să se afle unul în stânga și unul în dreapta rădăcinilor trebuie ca vârful parabolei să se afle în intervalul (p, q) . Atunci, condițiile sunt

$$\text{Ecuația are două rădăcini în } (p, q) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(p) > 0 \\ a \cdot f(q) > 0 \\ p < -\frac{b}{2a} < q \end{cases} \quad (10.16)$$

10.6.4 Două rădăcini în afara lui (p, q) .

Distingem trei cazuri.

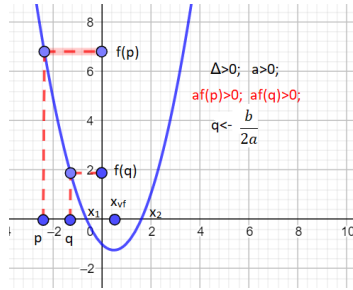
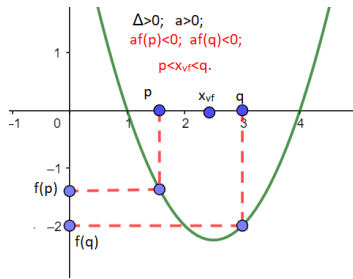
1. Cazul $p < q < x_1 < x_2$. Graficul pentru cazul $a > 0$ este cel din figura 10.16. Formal condițiile arată astfel:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(p) > 0 \\ a \cdot f(q) > 0 \\ q < -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

2. Cazul $x_1 < p < q < x_2$.

Condițiile care trebuie să fie îndeplinite sunt

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(p) < 0 \\ a \cdot f(q) < 0 \\ p < -\frac{b}{2a} < q \end{cases}$$

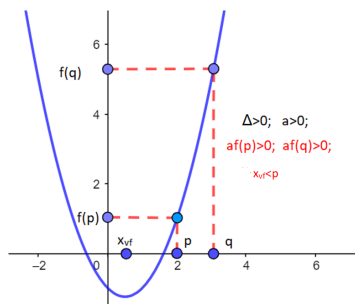

Fig. 10.16: $p < q < x_1 < x_2$

Fig. 10.17: $x_1 < p < q < x_2$.

3. Cazul $x_1 < x_2 < p < q$.

Punem mai întâi condiția ca ecuația să aibă două rădăcini reale. Graficul 10.18 ne sugerează care sunt condițiile care trebuie îndeplinite pentru a avea adevărate inegalitățile date. Punctele p , q sunt în afara rădăcinilor deci funcția trebuie să aibă în ele semnul lui a . Ultima condiție este ca x_{vf} să fie mai mic decât p . Formal trebuie îndeplinite următoarele condiții:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ a \cdot f(p) > 0 \\ a \cdot f(q) > 0 \\ -\frac{b}{2a} < p \end{cases}$$

Exerciții:

Fig. 10.18: $x_1 < x_2 < p < q$

1. Fără a rezolva ecuațiile determinați poziția rădăcinilor lor față de intervalele (p, q) indicate:

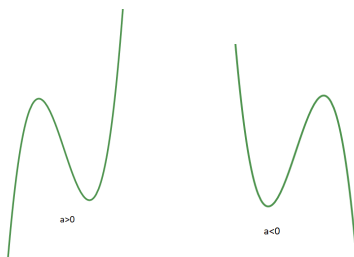
a) $2x^2 - 3x - 3 = 0$; $(-1, 1)$ b) $x^2 - 3x + 1 = 0$; $(0, 2)$
 c) $x^2 - 4x + 4 = 0$; $(1, 3)$ d) $x^2 - 5x + 4 = 0$; $(5, 6)$
 e) $x^2 - 2x - 3 = 0$; $(0, 1)$

10.7 Funcția și ecuația polinomială de grad trei

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ polinomială de gradul al treilea, are expresia:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Observăm că dacă $a > 0$ funcția are valori negative pentru valori negative foarte mici ale lui x iar pentru valori pozitive foarte mari funcția are valori pozitive. Lucrurile se întâmplă similar dar cu semn schimbat dacă $a < 0$. Forma generală a graficului ei este dată, pentru cele două cazuri, în figura 10.19.

Fig. 10.19: Forma generală a graficului funcției $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

10.7. FUNCȚIA ȘI ECUAȚIA POLINOMIALĂ DE GRAD TREI 305

Funcția luând atât valori pozitive cât și negative și fiind o funcție continuă rezultă că ecuația

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (10.17)$$

are sigur o rădăcină reală (graficul lui $f(x)$ taie axa Ox cel puțin într-un punct). Din forma generală a graficului funcției mai rezultă și faptul că numărul maxim de intersecții cu axa Ox este trei. Deci ecuația poate să aibă maxim trei soluții reale. În general, putem avea următoarele tipuri de soluții ale ecuației:

1. O singură rădăcină reală.
2. O rădăcină simplă și o rădăcină dublă.
3. Trei rădăcini reale.
4. O rădăcină triplă.

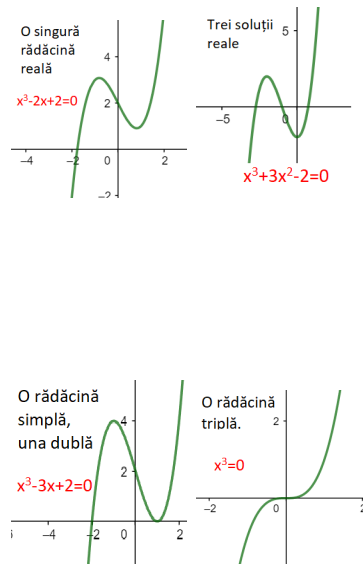


Fig. 10.20: Graficul funcției de gradul al treilea pentru $a > 0$ după numărul și tipul rădăcinilor.

10.7.1 Relațiile lui Viète pentru ecuația de gradul al treilea

Fie ecuația $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3 . Atunci:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a} \end{cases}$$

10.7.2 Natura rădăcinilor unei ecuații de gradul al treilea

La fel ca în cazul ecuației de gradul al doilea introducem și aici un discriminant și în funcție de el putem stabili natura rădăcinilor.

$$\Delta = 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2$$

Astfel:

1. Pentru $\Delta > 0$ avem trei rădăcini reale distincte.
2. Dacă $\Delta = 0$ ecuația are o rădăcină multiplă și toate rădăcinile sunt reale.
3. Pentru $\Delta < 0$ ecuația are o rădăcină reală și două rădăcini complexe conjugate.

10.8 Funcția și ecuația polinomială de grad patru

Expresia generală a funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de gradul al patrulea este:

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad (10.18)$$

Ca pentru orice funcție polinomială, coeficientul termenului de grad maxim se numește dominantă. Pentru că x^4 este pozitiv în ambele zone de la infinit graficul funcției va depinde de semnul lui a și, în general va fi:

Ecuația de grad 4 poate să aibă maxim patru soluții reale. În general, putem avea următoarele tipuri de soluții reale ale ecuației:

1. Nicio rădăcină reală, patru complexe.
2. Două rădăcini reale, două rădăcini complexe.

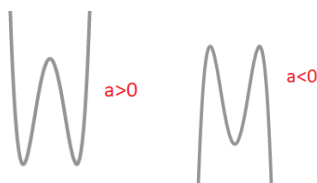


Fig. 10.21: Graficul funcției de gradul al patrulea

3. O rădăcină dublă reală, două rădăcini complexe.
4. Patru rădăcini reale.
5. O rădăcină dublă și două simple toate reale.
6. O rădăcină triplă și una simplă toate reale.
7. O rădăcină reală de ordin 4.

Graficele pentru $a > 0$, în aceste cazuri, sunt prezentate în figura 10.22:

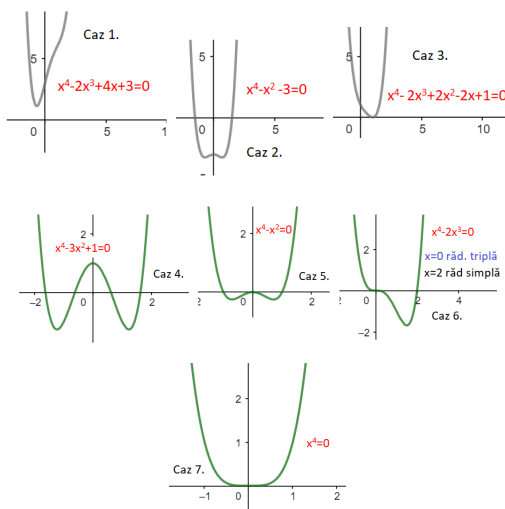


Fig. 10.22: Graficul funcției după numărul și tipul rădăcinilor reale

10.8.1 Relațiile lui Viète pentru ecuația de gradul al patrulea

Fie $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, ecuația $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ cu rădăcinile x_1, x_2, x_3, x_4 . În acest caz relațiile lui Viète sunt:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a} \\ x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a} \\ x_1x_2x_3x_4 = \frac{e}{a} \end{cases}$$

10.9 Teorema împărțirii cu rest

De la numerele întregi cunoaștem *Teorema împărțirii cu rest*. Aceasta se enunță astfel:

Teorema 10.5. *Deîmpărțitul este egal cu câtul ori împărțitorul plus restul unde restul este mai mare sau egal cu 0 și strict mai mic decât modulul împărțitorului.*

Simbolic avem:

$$D = C \cdot I + R, \quad , \quad 0 \leq R < |I|. \quad (10.19)$$

Această teoremă rămâne adevărată și la polinoame

Teorema 10.6. *Fie $f(x)$ și $g(x)$ două polinoame de grad m respectiv n , cu $m \geq n$. Atunci*

$$f(x) = g(x) \cdot c(x) + r(x) \quad (10.20)$$

unde gradul lui $r(x) < n$.

10.9.1 Restul împărțirii unui polinom prin $x-a$

Pentru cazul în care $g(x) = x - a$ teorema anterioară poartă numele de *mica teoremă a lui Bézout* care se enunță astfel:

Teorema 10.7. *Restul împărțirii unui polinom $f(x)$ prin $x - a$ este $f(a)$.*

Demonstrație: Pornim de la scrierea teorema împărțirii cu rest pentru cazul în care $g(x) = x - a$.

$$f(x) = (x - a)c(x) + r(x).$$

Cum împărțitorul are gradul 1 rezultă că restul este de grad 0 adică o constantă pe care o vom nota cu r . Deci

$$f(x) = (x - a)c(x) + r.$$

Din această relație facându-l pe $x = a$ îl aflăm pe r . Observăm că termenul care conține câtul se anulează de unde rezultă că $r = f(a)$.

■

10.9.2 Schema lui Horner

Pentru a determina deodată câtul și restul împărțirii unui polinom la $x - a$ fără a face efectiv împărțirea folosim un algoritm numit *schema lui Horner*. Exemplificăm acest algoritm pentru cazul în care gradul lui $f(x)$ este 3. Fie $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ și dorim să aflăm câtul și restul împărțirii lui $f(x)$ la $x - a$. Construim un tabel astfel:

Pe primul rând se scriu x , apoi coeficienții lui $f(x)$ în ordinea apariției lor. Dacă un termen într-o putere a lui x lipsește din expresia lui f se trece în tabel pe poziția corespunzătoare un zero. Algoritmul funcționează astfel: Pe rândul al doilea sub x se scrie a . Primul coeficient α se coboară. Se face înmulțirea $a \cdot \alpha$ la care se adaugă β iar rezultatul $a\alpha + \beta$ se scrie sub β . Se face înmulțirea lui a cu ceea ce e scris sub β și se adună cu γ iar rezultatul se scrie sub γ . Se face înmulțirea acestei valori scrise sub γ cu a se adună δ iar rezultatul se scrie sub δ . Observăm că ceea ce este scris sub δ este chiar $f(a)$. Valorile scrise sub α, β, γ sunt coeficienții câtului împărțirii lui $f(x)$ la $x - a$.

Deci:

$$f(x) = (x - a)[\alpha x^2 + (\alpha a + \beta)x + (\alpha a^2 + \beta a + \gamma)] + f(a)$$

Tabelul asociat algoritmului descris este următorul:

x	α	β	γ	δ
a	α	$\alpha \cdot a + \beta$	$\alpha \cdot a^2 + \beta \cdot a + \gamma$	$\alpha \cdot a^3 + \beta \cdot a^2 + \gamma \cdot a + \delta$

(10.21)

Formal calculele par complicate dar pe exemple numerice este foarte simplu.

Exemplu:

Să se determine cu schema lui Horner câtul și restul împărțirii polinomului $f(x) = x^3 - 2x + 4$ la $x - 2$. După completarea primului rând din tabel, calculele pentru rândul al doilea, după ce pe prima coloană se pune și pe a doua coloană se coboară 1 de deasupra, sunt: $2 \cdot 1 + 0 = 2$ și se trece pe coloana a treia, apoi $2 \cdot 2 - 2 = 2$ care se trece pe coloana a patra și în final $2 \cdot 2 + 4 = 8$ care se trece în ultima coloana. Tabelul este

$$\begin{array}{c|cccc} x & 1 & 0 & -2 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 2 & 2 & 8 \end{array} \quad (10.22)$$

Câtul împărțirii va fi $x^2 + 2x + 2$ iar restul va fi $f(2) = 8$.

Exerciții:

Folosind schema lui Horner determinați câtul și restul împărțirii lui:

1. $x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ la $x - 1$.

2. $2x^3 - x^2 + 3x - 4$ la $x + 2$.

3. $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ la $x - 3$.

4. $x^4 - 4x^2 + 4$ la $x + 1$.

5. $x^4 - x^3 + 2x^2 - 4$ la $x - 2$.

6. $x^3 + x - 2$ la x .

10.9.3 Restul împărțirii unui polinom prin $(x-a)(x-b)$

Pentru a determina restul împărțirii unui polinom prin $(x-a)(x-b)$ scriem teorema generală a împărțirii cu rest. Ținem cont că împărțitorul este de grad doi deci restul este un polinom de grad cel mult unu, $r(x) = mx + n$. Avem:

$$f(x) = (x-a)(x-b)g(x) + mx + n. \quad (10.23)$$

Fără a calcula pe $g(x)$ trebuie să determinăm necunoscutele m și n . Avem nevoie de două ecuații independente care să nu implice cunoașterea lui $g(x)$. Observăm că dacă în ecuația 10.23 facem pe rând pe $x = a$ și $x = b$, rearanjând termenii obținem sistemul:

$$\begin{cases} ma + n = f(a) \\ mb + n = f(b) \end{cases} \quad (10.24)$$

Rezolvarea sistemului cu necunoscutele m , n conduce la determinarea restului împărțirii lui $f(x)$ la $(x-a)(x-b)$.

Un caz particular este cel în care $a = b$. Pentru a determina restul împărțirii lui $f(x)$ la $(x-a)^2$ avem nevoie de o a doua ecuație în afară de $ma + n = f(a)$. Pentru aceasta pornim de la teorema împărțirii cu rest scrisă pentru acest caz particular

$$f(x) = (x-a)^2 g(x) + mx + n$$

pe care o derivăm. Avem acolo produsul $(x-a)^2 g(x)$ pe care îl derivăm cu regula

$$(uv)' = u'v + uv'$$

și obținem:

$$f'(x) = 2(x-a)g(x) + (x-a)^2 g'(x) + m. \quad (10.25)$$

În ecuația 10.25 îl facem pe $x = a$ și găsim cea de a doua ecuație căutată $f'(a) = m$. Sistemul care trebuie rezolvat va fi deci:

$$\begin{cases} ma + n = f(a) \\ m = f'(a) \end{cases} \quad (10.26)$$

Exemple:

1. Să se determine restul împărțirii lui $x^3 + 2x^2 - 3x + 2$ la $(x-1)(x+2)$. Calculăm $f(1)$ și $f(-2)$ (ținem cont că $x+2 = x - (-2)$). Sistemul 10.24 va deveni:

$$\begin{cases} m + n = 2 \\ -2m + n = 8 \end{cases}$$

Înmulțim prima ecuație cu 2, adunăm cele două ecuații și obținem $3n = 12$ de unde rezultă $n = 4$ și apoi din prima ecuație $m = -2$. În concluzie restul căutat este $r(x) = -2x + 4$.

2. Să se determine restul împărțirii polinomului $x^4 - 3x^3 + x^2 + 5$ la $(x-1)^2$.

Calculăm întâi derivata polinomului $f(x)$. Avem:

$$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x.$$

Apoi $f(1) = 4$ și $f'(1) = -3$. Sistemul va fi

$$\begin{cases} m + n = 4 \\ m = -3 \end{cases} \quad (10.27)$$

Obținem $m = -3$ și $n = 7$. Restul căutat este $r(x) = -3x + 7$.

Exerciții:

Să se determine restul următoarelor împărțiri:

$$1. \quad x^4 - 3x^2 + 2x + 2 \quad \text{la} \quad (x-1)(x-2).$$

$$2. \quad x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 3 \quad \text{la} \quad (x-1)(x-2).$$

$$3. \quad x^3 + 3x^2 + 2x + 1 \quad \text{la} \quad x(x+2).$$

$$4. \quad 2x^3 + x - 4 \quad \text{la} \quad (x+1)(x-1).$$

$$5. \quad 3x^3 - x^2 + 2x + 2 \quad \text{la} \quad (x-1)(x+2).$$

$$6. \quad x^4 + 2x^3 + 2x + 1 \quad \text{la} \quad (x-1)^2.$$

$$7. \quad x^4 - 3x^2 + 2x + 2 \quad \text{la} \quad (x+1)^2.$$

Teorema 10.8. *Dacă un polinom admite ca rădăcină pe $x = a$ atunci el este divizibil prin $x - a$.*

Demonstrația este imediată pornind de la teorema împărțirii cu rest a polinomului $f(x)$ la $x - a$.

$$f(x) = (x - a)g(x) + r$$

Dar $r = f(a)$ și cum a este rădăcină a lui f rezultă că $f(a) = 0$ și în concluzie

$$f(x) = (x - a)g(x)$$

■

Observația 10.4.

1. Folosind schema lui Horner putem determina unele rădăcini ale polinomului analizat.
2. Dacă suma coeficienților polinomului $f(x)$ este 0 atunci polinomul admite rădăcina $x = 1$.
3. Dacă termenul liber $a_n = 0$ atunci polinomul admite o rădăcină pe $x = 0$.

4. Dacă coeficienții polinomului au proprietatea

$$a_0 + a_2 + a_4 + \dots = a_1 + a_3 + a_5 + \dots$$

atunci polinomul admite rădăcină pe $x = -1$

Teorema 10.9. Considerăm polinomul

$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ai cărui coeficienți sunt numere întregi. Rădăcinile întregi ale polinomului se găsesc printre divizorii termenului liber a_n iar rădăcinile raționale de forma $\frac{p}{q}$ au proprietatea că p divide pe a_n și q divide pe a_0 .

Demonstrație: Fie $x_1, x_2, \dots, x_n$ rădăcinile polinomului $f(x)$. Din relațiile lui Viète avem că

$$x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

De aici rezultă că dacă x_i este o rădăcină întreagă a polinomului atunci x_i va divide numărătorul fracției $\frac{a_n}{a_0}$ iar dacă x_k este o rădăcină fracționară de forma $\frac{p}{q}$ atunci p va divide numărătorul fracției $\frac{a_n}{a_0}$ iar q va divide numitorul ei. ■

Exemple:

1. Să se determine valorile posibile ale rădăcinilor polinomului

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2.$$

Observăm în primul rând că suma coeficienților polinomului este 0 deci polinomul are o soluție 1. Atunci $f(x) = (x - 1)(2x^2 + 5x + 2)$ iar rezolvarea directă a ecuației de gradul al doilea ne conduce la determinarea soluțiilor ecuației $f(x) = 0$. Obținem $x_1 = 1$, $x_2 = -\frac{1}{2}$, $x_3 = -2$.

Dacă nu observăm soluția $x = 1$ atunci folosind schema lui Horner căutăm soluțiile întregi printre divizorii termenului liber adică ± 1 , ± 2 și soluțiile raționale printre numerele $\pm \frac{1}{2}$.

2. Să se determine rădăcinile întregi și cele raționale ale ecuației

$$2x^4 + 7x^3 + 4x^2 + 2x - 3 = 0.$$

Rădăcinile întregi le căutăm printre divizorii lui -3 adică ± 1 , ± 3 iar pe cele raționale printre numerele $\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$. Prin calcul direct obținem rădăcinile $x_1 = -3$ și $x_2 = \frac{1}{2}$. Aplicând de două ori schema lui Horner pentru polinomul dat și pentru valorile $-3, \frac{1}{2}$.

$$\begin{array}{r|rrrrr} f(x) & 2 & 7 & 4 & 2 & -3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & 2 & 2 & 2 & 0 & \end{array}$$

Deci, $x = -3$ și $x = \frac{1}{2}$ sunt rădăcini ale ecuației. Rezultă că restul împărțirii polinomului dat la $(x+3)(x-\frac{1}{2})$ este 0 și câtul $2x^2+2x+2$. Polinomul se descompune în factori astfel:

$$2x^4+7x^3+4x^2+2x-3 = 2(x+3)(x-\frac{1}{2})(x^2+x+1) = (x+3)(2x-1)(x^2+x+1).$$

Exerciții:

Descompuneți în factori de grad unu sau doi următoarele polinoame:

- a) $x^3 - 3x + 2$ b) $x^4 - 1$ c) $x^4 - 3x^3 + 2$
 d) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ e) $x^4 + x^2 - 2$ f) $3x^3 - 4x^2 + 4x - 1$
 g) $4x^3 - 4x^2 - x - 1$ h) $x^3 + 4x^2 + x + 4$

Capitolul 11

Funcții putere, exponențiale, logaritmice

11.1 Funcția de tip putere

Funcțiile de tip putere sunt funcții ale căror expresii sunt de forma $f(x) = cx^a$ unde c și a sunt constante reale.

11.1.1 Funcția putere cu exponent număr natural

Definiția 11.1. Fie $n \in \mathbb{N}$. Numim funcție putere de grad n funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^n.$$

Pentru $n=1$ obținem funcția liniară $f(x) = x$. Aceasta este o funcție strict crescătoare și impară, adică $f(-x) = -f(x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Reamintim noțiunea de imagine a unei funcții.

Fie $A, B \subset \mathbb{R}$ și $f : A \rightarrow B$. Numim imaginea funcției f ca fiind mulțimea $Im(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ astfel încât } f(x) = y\}$

Pentru $n = 2$ avem funcția $g(x) = x^2$. $Im(g) = [0, \infty)$. Ea este strict descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$. Funcția putere de gradul al doilea este o funcție pară, adică $g(x) = g(-x)$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

În general, dacă $n \in \mathbb{N}$ și $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ avem următoarele proprietăți:

1. Pentru n număr impar funcția este impară și strict crescătoare pe domeniul ei de definiție.

2. Pentru n par funcția este pară, strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și strict crescătoare pentru $x \in [0, \infty)$.

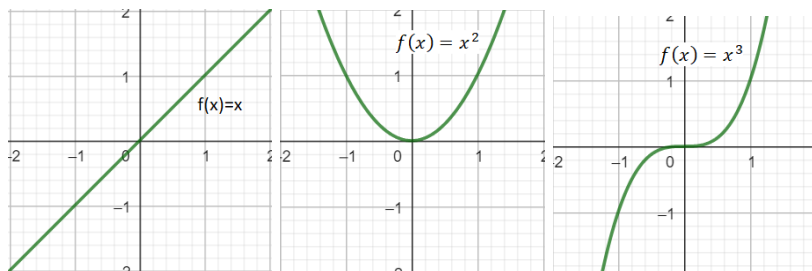


Fig. 11.1: Funcții putere cu exponent număr natural

11.1.2 Funcția radical de ordin par

Fie $k \in \mathbb{N}$. Funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt[2k]{x}$ se numește funcție radical de ordin par.

$2k$ se numește **ordinul radicalului** și din modul de definire al funcției f rezultă că $2k \geq 2$.

Această funcție este strict crescătoare, inversabilă și este inversa restricției la $[0, \infty)$ a funcției putere de ordin par.

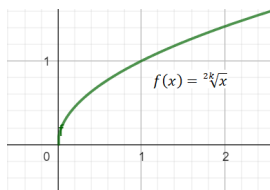


Fig. 11.2: Funcția radical de ordin par

11.1.3 Funcția radical de ordin impar

Fie $k \in \mathbb{N}$. Funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[2k+1]{x}$ poartă numele de funcție radical de ordin impar.

$2k+1$ se numește **ordinul radicalului** și din modul de definire al funcției g rezultă că $2k+1 \geq 3$.

Funcția radical de ordin impar este strict crescătoare, impară, inversabilă și este inversa funcției putere de ordin impar.

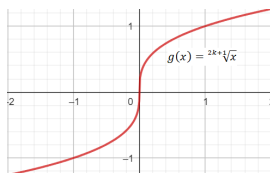


Fig. 11.3: Funcția radical de ordin par

11.1.4 Funcții putere de exponent negativ

Ținând cont că pentru orice număr real $a \neq 0$ avem relația

$$a^{-1} = \frac{1}{a},$$

rezultă că funcțiile putere cu exponent negativ nu sunt definite în 0, își păstrează paritatea și intervalele de monotonie schimbând însă sensul monotoniei.

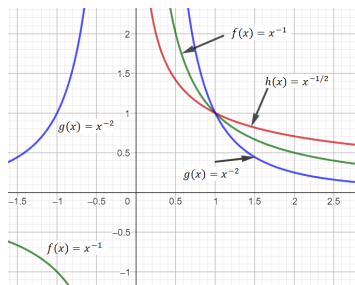


Fig. 11.4: Funcții putere cu exponent negativ

Numim scalare de factor $c \in \mathbb{R}$ a argumentului unei funcții o aplicație $x \rightarrow cx$. Astfel, funcția $f(x) = x^n$ în urma unei scalări de factor c a argumentului devine funcția $g(x) = (cx)^n$. Avem astfel:

$$f(x) = x^n, \quad x \rightarrow cx, \quad g(x) = (cx)^n, \quad \text{și} \quad g(x) = c^n x^n.$$

Influența unei scalări a argumentului unei funcții de tip putere cu exponent negativ asupra graficului funcției poate fi dedusă din figura 11.5:

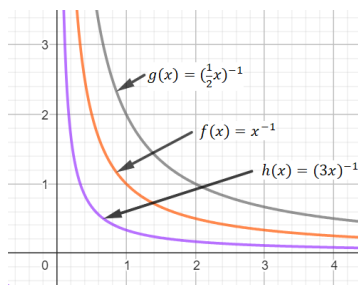


Fig. 11.5: Funcții putere cu exponent negativ, scalări ale argumentului

11.1.5 Scurt istoric

Importanța funcțiilor exponențiale și a celor logaritmice face necesar acest scurt istoric. Noțiunea de logaritm a fost introdusă de matematicianul scoțian John Napier în jurul anului 1610. Cu funcții exponențiale se lucra deja de la sfârșitul anilor 1590. Însă cea mai mare realizare a acelor vremuri este descoperirea constantei "e". A fost descoperită de matematicianul Joseph Bernoulli în contextul calculării dobânzii la credite compuse. Menționată cu numele de "e" de către Leonhard Euler în 1727, constanta e este un număr transcendențial, irațional și este alături de π una dintre cele mai importante constante introduse în matematică. Valoarea sa, cu aproximație, este

$$e \approx 2,718281828459045.$$

11.2 Funcții exponențiale

Fie $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ fixat.

Definiția 11.2. Numim funcție exponențială de bază "a" funcția definită astfel:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = a^x.$$

Funcțiile exponențiale sunt funcții bijective deci inversabile. Inversa unei funcții exponențiale de bază "a" se numește funcție logaritmică de bază "a".

11.2.1 Reguli de calcul cu exponențiale care au aceeași bază

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}, \quad (a^x)^y = a^{x \cdot y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad . \quad (11.1)$$

$$a^x + a^y = a^x(1 + a^{y-x}) = a^y(a^{x-y} + 1) = a^z(a^{x-z} + a^{y-z}). \quad (11.2)$$

11.2.2 Exponențiale care au baza subunitară

Funcțiile exponențiale cu bază subunitară sunt funcții monotone strict des-crescătoare. Două funcții exponențiale de bază subunitară au în comun un singur punct și anume $P(0, 1)$.

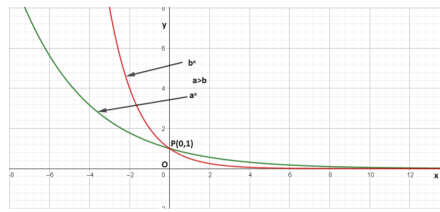


Fig. 11.6: Exponențiale de bază subunitară

Comportarea funcțiilor exponențiale cu bază subunitară este redată în graficul 11.6.

Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$. Când x tinde către $-\infty$ valoarea funcției exponențiale tinde către $+\infty$. Dacă $a > b$ atunci pentru $x \in (-\infty, 0)$ avem $a^x < b^x$, pentru $x \in (0, \infty)$ avem $a^x > b^x$ iar pentru $x = 0$ avem $a^0 = b^0 = 1$.

Consecințe:

1. Din faptul că funcția exponențială de bază subunitară este bijectivă avem că

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y. \quad (11.3)$$

2. Din faptul că pentru bază subunitară funcția exponențială este strict descrescătoare rezultă că

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x < y. \quad (11.4)$$

Exerciții:

1. Să se rezolve ecuația $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+1} = 8^{-2x}$.

Ind. $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ și $8^{-2x} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{2x}$.

2. Să se rezolve inecuația $(0,75)^{3x} > \left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}$.

Ind. Inecuația este echivalentă cu $3x < x - 2$.

3. Pornind de la graficul funcției $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ desenați graficele

funcțiilor $f_1(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 1$, $f_2(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}$ și

$f_3(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{|x|}$.

4. Să se rezolve ecuația $\left(\frac{1}{2}\right)^{|x|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1}$.

R. $x = -\frac{1}{3}$.

5. Să se rezolve inecuația $\left(\frac{1}{5}\right)^{|x|+1} < \left(\frac{1}{5}\right)^{|2x+1|}$.

Ind. Se explicitează modulele și se obțin trei inecuații. Soluția este $x \in (-\infty, 0)$.

11.2.3 Exponențiale cu bază supraunitară

Funcțiile exponențiale cu bază supraunitară sunt funcții monotone, strict crescătoare. Două funcții exponențiale de bază supraunitară au

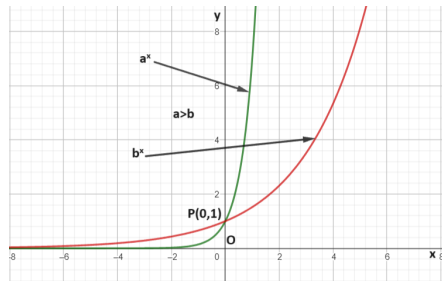


Fig. 11.7: Exponențiale de bază supraunitară

în comun un singur punct și anume $P(0, 1)$.

Comportarea funcțiilor exponențiale cu bază supraunitară este redată în graficul 11.7.

Dreapta $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$. Când x tinde către $+\infty$ valoarea funcției exponențiale tinde către $+\infty$. Dacă $a > b$ atunci pentru $x \in (-\infty, 0)$ avem $a^x < b^x$, pentru $x \in (0, \infty)$ avem $a^x > b^x$ iar pentru $x = 0$ avem $a^0 = b^0 = 1$.

Consecințe:

1. Din faptul că funcția exponențială de bază supraunitară este bijectivă avem că

$$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y. \quad (11.5)$$

2. Din faptul că pentru bază supraunitară funcția exponențială este strict crescătoare rezultă că

$$a^x > a^y \Leftrightarrow x > y. \quad (11.6)$$

11.2.4 Funcția exponențială $f(x) = e^x$

Dintre funcțiile exponențiale cu bază supraunitară, cea mai importantă pentru matematică este cea în care baza este numărul e . Dintre proprietățile funcției exponențiale de bază e menționăm:

- 1.

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x; \quad (11.7)$$

- 2.

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad (11.8)$$

3.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n; \quad (11.9)$$

4.

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots \quad (11.10)$$

5. Logaritmul în bază e , numit logaritm natural și notat $\ln(x)$ are proprietatea

$$\frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}; \quad (11.11)$$

6. Aria cuprinsă între graficul funcției $f(t) = e^t$ și axa Ox de la $-\infty$ la punctul x este chiar e^x

$$\int_{-\infty}^x e^t dt = e^x; \quad (11.12)$$

7. Panta tangentei la graficul funcției $f(x) = e^x$ în punctul $P(1, e)$ este e .

Exerciții:

1. Să se rezolve ecuația $4^{x+1} = 8^{2x}$.

Ind. Se trec exponențialele în baza 2

2. Să se rezolve inecuația $7^{3x} > 7^{x-2}$.

Ind. Inegalitatea din enunț se păstrează și între exponenți.

3. Pornind de la graficul funcției $f(x) = 3^x$ desenați graficele funcțiilor $f_1(x) = 3^x + 1$, $f_2(x) = 3^{x+1}$ și $f_3(x) = 3^{|x|}$.

4. Să se rezolve ecuația $2^{|x|} = 2^{2x+1}$.

R. $x = -\frac{1}{3}$.

5. Să se rezolve inecuația $5^{|x|+1} < 5^{|2x+1|}$.

Ind. Se explicitează modulele și se obțin trei inecuații.

11.3 Funcția logaritmică

Definiția 11.3. Considerăm un număr real $a \in (0, 1) \cup (1, \infty)$ fixat. Funcția logaritmică în baza a va fi o funcție $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ notată $f(x) = \log_a(x)$, cu proprietatea

$$\log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, y \in \mathbb{R} \quad (11.13)$$

Observația 11.1. Sunt două baze speciale pentru care logaritmi au notație specială.

1. Pentru baza e logaritmul se numește **logaritm natural** și are notația $\log_e(x) = \ln(x)$.
2. Pentru baza 10 logaritmul se numește **logaritm zecimal** și are notația $\log_{10}(x) = \lg(x)$. Menționăm că pentru orice număr rațional x care nu este o putere cu exponent întreg al lui 10 , valoarea lui $\lg(x)$ este număr irațional.

Funcțiile exponențiale și logaritmice în baza a fiind inverse una celeilalte sunt îndeplinite relațiile:

$$a^{\log_a(x)} = x, \quad \text{și} \quad \log_a(a^x) = x. \quad (11.14)$$

Ca și la exponențiale, avem comportări diferite ale funcției logaritmice dacă $a \in (0, 1)$ sau $a \in (1, \infty)$.

11.3.1 Proprietăți ale funcției logaritmice

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y). \quad (11.15)$$

Mai mult decât atât, se poate demonstra că orice funcție continuă $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ este o funcție logaritmică.

Pornind de la proprietatea 11.15, prin inducție după un parametru rațional și folosind continuitatea funcției f , se arată că:

$$f(x^r) = r f(x) \quad \forall r \in \mathbb{R}. \quad (11.16)$$

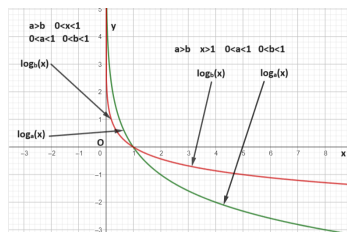


Fig. 11.8: Logaritmi în bază subunitară

11.3.2 Funcția logaritmică de bază subunitară

Funcțiile logaritmice cu bază subunitară sunt funcții monotone strict descrescătoare. Două funcții logaritmice de bază subunitară au în comun numai punctul $P(1, 0)$. Comportarea funcțiilor logaritmice de bază subunitară este arătată în figura 11.8.

Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală. Când $x \rightarrow 0$, $x > 0$, funcția tinde către $+\infty$. Când x tinde spre ∞ funcția tinde către $-\infty$. Dacă $a < b$ atunci pentru $x \in (0, 1)$ avem $\log_a(x) > \log_b(x)$, pentru $x \in (1, \infty)$ avem $\log_a(x) < \log_b(x)$ iar pentru $x = 1$ avem $\log_a(1) = \log_b(1) = 0$.

Consecințe:

1. Din faptul că logaritmi sunt funcții bijective rezultă că:

$$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y. \quad (11.17)$$

2. Pentru că funcția logaritmică în bază subunitară este strict descrescătoare avem că:

$$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x < y. \quad (11.18)$$

Exerciții:

1. Pornind de la graficul funcției $\log_{0.5}(x)$ desenați graficele următoarelor funcții $f_1(x) = \log_{0.5}(x) + 1$, $f_2(x) = \log_{0.5}(x + 1)$, $f_3(x) = |\log_{0.5}(x)|$.
2. Se consideră ecuația $\log_a(2x-1) = \log_a(a)$, $a \in (0, 1)$. Demonstrați că soluția acestei ecuații aparține intervalului $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

3. Rezolvați inecuația $\log_a(3x+2) > \log_a(1-x)$, $a \in (0, 1)$.

Ind. Se pun condițiile de existență pentru logaritmi și apoi se aplică rezultatul dat de 11.18. Se obține $x \in \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

11.3.3 Logaritmi cu bază supraunitară

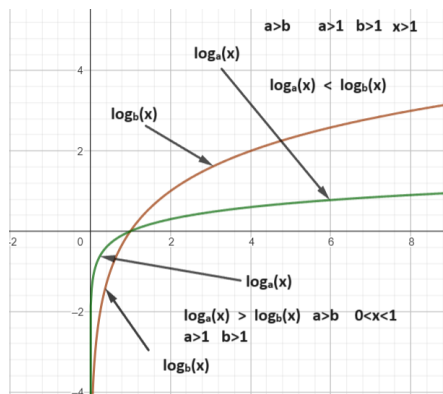


Fig. 11.9: Logaritmi în bază supraunitară

Funcțiile logaritmice cu bază supraunitară sunt funcții monotone strict crescătoare. Două funcții logaritmice de bază supraunitară au în comun numai punctul $P(1, 0)$. Comportarea funcțiilor logaritmice de bază supraunitară este arătată în figura 11.9.

Dreapta $x = 0$ este asimptotă verticală la dreapta. Când $x \rightarrow 0$, $x > 0$, funcția tinde către $-\infty$. Când x tinde spre ∞ funcția tinde către ∞ . Dacă $a > b$ atunci pentru $x \in (0, 1)$ avem $\log_a(x) > \log_b(x)$, pentru $x \in (1, \infty)$ avem $\log_a(x) < \log_b(x)$ iar pentru $x = 1$ avem $\log_a(1) = \log_b(1) = 0$.

Consecințe:

1. Din faptul că logaritmii sunt funcții bijective rezultă că:

$$\log_a(x) = \log_a(y) \Leftrightarrow x = y. \quad (11.19)$$

2. Pentru că funcția logaritmă în bază supraunitară este strict crescătoare avem că:

$$\log_a(x) > \log_a(y) \Leftrightarrow x > y. \quad (11.20)$$

Exerciții:

1. Pornind de la graficul funcției $\log_5(x)$ desenați graficele următoarelor funcții $f_1(x) = \log_5(x)+1$, $f_2(x) = \log_5(x+1)$, $f_3(x) = |\log_5(x)|$.
2. Se consideră ecuația $\log_a(2x-1) = \log_a(a)$, $a \in (1, +\infty)$. Demonstrați că soluția acestei ecuații aparține intervalului $(1, +\infty)$.
3. Rezolvați inecuația $\log_a(3x+2) > \log_a(1-x)$, $a > 1$.
Ind. Se pun condițiile de existență pentru logaritmi și apoi se aplică rezultatul dat de 11.20. Se obține $x \in \left(-\frac{1}{4}, 1\right)$.

11.3.4 Formule de schimbare a bazei pentru logaritmi

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \quad \log_{a^n} b^k = \frac{k}{n} \log_a b. \quad (11.21)$$

$$\log_{a^n}(a^k \cdot b^m) = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} \log_a b; \quad \log_{a^n}(b^k \cdot c^m) = \frac{k}{n} \log_a b + \frac{m}{n} \log_a c. \quad (11.22)$$

Exerciții:

1. Să se treacă în baza 5 următorii logaritmi:

$$\log_3 5; \quad \log_4 6; \quad \log_{125} 6; \quad \log_{\sqrt{5}} 7; \quad \log_{25}(64); \quad \log_{\sqrt[3]{25}}(20).$$

2. Reamintim că notația obișnuită pentru $\log_{10}(x)$ este $\lg(x)$. Folosind regulile de calcul pentru logaritmi, aduceți la forma cea mai simplă expresia $\lg 2 + \lg 4 + \lg 125$.
3. Demonstrați că pentru $a, b \in (0, 1)$ avem $\log_a(b) + \log_b(a) \geq 2$.
Ind. Se demonstrează că dacă $x > 0$ atunci $x + \frac{1}{x} \geq 2$.
4. Demonstrați că dacă $a, b, c \in (0, \infty)$ atunci

$${}_a \lg \left(\frac{b}{c} \right) \cdot {}_b \lg \left(\frac{c}{a} \right) \cdot {}_c \lg \left(\frac{a}{b} \right) = 1.$$

Ind. Se logaritmează în baza 10 întreaga expresie.

5. Să se calculeze suma

$$S = \frac{1}{\log_2 1 + \log_2 2 + \dots + \log_2 n} + \frac{1}{\log_3 1 + \log_3 2 + \dots + \log_3 n} + \dots + \frac{1}{\log_n 1 + \log_n 2 + \dots + \log_n n}.$$

Ind. Se adună logaritmi de la numitori și apoi se trec în baza $n!$.

6. Să se arate că dacă $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ sau $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$ atunci

$$\log_{a_1} a_2 + \log_{a_2} a_3 + \log_{a_3} a_4 + \dots + \log_{a_n} a_1 \geq n.$$

Ind. Se aplică inegalitatea mediilor.

7. Să se calculeze $\log_6 16$ în funcție de $a = \log_{12} 27$.

Rezolvare:

$$\log_6 16 = 4 \log_6 2 = \frac{4}{\log_2 6} = \frac{4}{1 + \log_2 3}.$$

$$a = \log_{12} 27 = 3 \log_{12} 3 = \frac{3}{\log_3 12} = \frac{3}{1 + 2 \log_3 2} = \frac{3 \log_2 3}{\log_2 3 + 2}.$$

Din ultima relație îl exprimăm în funcție de a pe $\log_2 3$.

$$\log_2 3 = \frac{2a}{3 - a}.$$

De aici rezultă că:

$$\log_6 16 = \frac{4}{1 + \log_2 3} = \frac{4(3 - a)}{3 + a}.$$

11.4 Ecuații exponențiale, ecuații logaritmice

11.4.1 Tipuri de ecuații exponențiale

- 1.

$$a^{f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = b. \quad (11.23)$$

Exemple:

- i) $a^{x^2-3x} = a^{-2}$ este echivalentă cu $x^2 - 3x + 2 = 0$ ale cărei soluții sunt $x_1 = 1, x_2 = 2$.

ii) Să se rezolve ecuația

$$\sqrt[5]{\left(\frac{3}{7}\right)^{x^2-1}} = \frac{7}{3}.$$

Ind. Ecuația se reduce la $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-1}{5}} = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1}$.

2.

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x). \quad (11.24)$$

Exemple:

i) $2^{x^2-3x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{4-x}$.

Ecuația este echivalentă cu ecuația $x^2 - 4x + 4 = 0$.

ii)

$$8\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{2}}} = 2^{\sqrt{x-1}}$$

Ind. Se trece totul în bază 2.

$$8 = 2^3; \quad 0,25 = \frac{1}{4} = 2^{-2}; \quad \text{radicalul este egal cu } 2^{\frac{x}{2}-5}$$

Ecuația se reduce la

$$\frac{x}{2} - 2 = \sqrt{x-1}$$

cu singura soluție $x=10$.

3.

$$a^{f(x)} = b, \quad a, b > 0, \quad a \neq 1 \quad \Leftrightarrow \quad \text{Se logaritmează și se obține } f(x) = \frac{\ln b}{\ln a}$$

Exemplu:

i)

$$\frac{1}{9}3^{2x+2} = 4$$

Ind. Ecuația se reduce la $3^{2x} = 4$ cu soluția $x = \log_3 2$.

4. Ecuații de tipul $f(a^{g(x)}) = 0$.

Se notează $a^{g(x)} = t$ și se rezolvă ecuația $f(t) = 0$. Se consideră doar soluțiile pozitive ale acestei ecuații, să zicem $t_1, \dots, t_k$ și se rezolvă apoi ecuațiile date de $a^{g(x)} = t_i$, $i = 1, \dots, k$.

Exemple:

i)

$$9^{x-1} - 3^x - 4 = 0.$$

Ind. Ecuația se rescrie sub forma $3^{2x-2} - 3 \cdot 3^{x-1} - 4 = 0$. Notăm $3^{x-1} = t$, avem de rezolvat ecuația $t^2 - 3t - 4 = 0$ care are soluțiile $t_1 = -1$ și $t_2 = 4$. Considerăm doar soluția pozitivă, deci rămâne de rezolvat ecuația $3^{x-1} = 4$ cu soluția $x = \log_3(4) + 1$ pe care o putem rescrie $x = \log_3(12)$.

ii)

$$3^{x-1} + 3^{x-2} - 3^{x-4} = 315.$$

Ind. Dăm factor comun în membrul stâng pe 3 la cea mai mică putere. Obținem $3^{x-4}(3^3 + 3^2 - 1) = 315$ adică $35 \cdot 3^{x-4} = 315$, care ne conduce la ecuația $3^{x-4} = 9$ cu soluția $x=6$.

11.4.2 Ecuații logaritmice

1. Ecuații care aduse la cea mai simplă formă sunt de tipul

$$\log_a(f(x)) = b.$$

Se pun condițiile $a > 0$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$. Aplicăm exponențiala în baza a în ambii membri și ajungem la $f(x) = a^b$ care se rezolvă.

Exemple:

i)

$$\log_2(3x+1)^4 = 16.$$

Ind. $3x+1 > 0$ implică $x > -\frac{1}{3}$. Ecuația o rescriem

$$4\log_2(3x+1) = 16 \Rightarrow \log_2(3x+1) = 4 \Rightarrow 3x+1 = 2^4 \Rightarrow 3x = 15.$$

Soluția ecuației va fi $x = 5$.

ii)

$$\lg(x+6) - 2 = \frac{1}{2}\lg(2x-3) - \lg(25).$$

Ind. Condițiile de existență dau $x > \frac{3}{2}$. Ecuația se reduce, pe rând la

$$\begin{aligned} \lg(x+6) - \frac{1}{2}\lg(2x-3) - \lg 4 &= 0 \\ \lg(x+6)^2 - \lg(2x-3) - \lg(16) &= 0 \\ (x+6)^2 &= 16(2x-3) \end{aligned}$$

cu soluțiile $x_1 = 6$, $x_2 = 14$.

2. Ecuații de forma

$$f(\log_a(g(x))) = 0.$$

Pentru rezolvare, punem condiția $g(x) > 0$ și notăm $\log_a(g(x)) = y$. Se rezolvă ecuația $f(y) = 0$ iar în final se rezolvă ecuațiile $\log_a(g(x)) = u$ unde u ia pe rând valorile date de soluțiile ecuației $f(y) = 0$.

Exemple:

i)

$$\lg^2[\ln(2x-3)] - 3\lg[\ln(2x-3)10^{-\frac{2}{3}}] = 0$$

Ind. Notăm $\ln(2x-3) = u$ și ecuația devine

$$\lg^2(u) - 3\lg(u) - 3\lg(10^{-\frac{2}{3}}) = 0$$

adică

$$\lg^2(u) - 3\lg(u) + 2 = 0$$

care cu notația $\lg(u) = y$ dă

$$y^2 - 3y + 2 = 0$$

cu soluțiile $y_1 = 1$, $y_2 = 2$. Avem în continuare

$$\lg(u) = 1 \Rightarrow u = 10 \Rightarrow \ln(2x-3) = 10$$

cu soluția

$$2x-3 = e^{10} \Rightarrow x = \frac{e^{10} + 3}{2}.$$

Din

$$\lg(u) = 2 \text{ rezultă } x = \frac{e^{100} + 3}{2}.$$

ii) Să se rezolve ecuația

$$\log_a[\log_b(2+x)] = 0, \quad b > 1.$$

Ind. Condițiile de bună definire impun ca argumentul funcției $\log_a$ să fie pozitiv, deci $\log_b(2+x) > 0$ de unde rezultă că $2+x > 1$ fiindcă $b > 1$ adică $x > -1$.
Rezolvând ecuația inițială avem :

$$\log_a(u) = 0 \Rightarrow u = 1; \quad \log_b(2+x) = 1 \Rightarrow 2+x = b \Rightarrow x = b-2.$$

Pentru că $b > 1$ soluția convine.

11.4.3 Inegalități cu logaritmi

1. Fie a, b numere reale distincte și strict pozitive. Arătați că:

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b).$$

Rezolvare:

Inegalitatea mediilor pentru numere reale pozitive și distincte ne dă că:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}.$$

Logaritmând în baza 2 această inegalitate și ținând cont că se păstrează sensul inegalității rezultă:

$$\log_2 \frac{a+b}{2} > \log_2 \sqrt{ab}; \quad \log_2(a+b) - 1 > \frac{1}{2} \log_2(ab),$$

de unde rezultă inegalitatea cerută.

2. Fie x, y, z trei numere reale strict pozitive, simultan subunitare sau simultan supraunitare. Să se arate că:

$$\log_{xy} z + \log_{xz} y + \log_{yz} x \geq \frac{3}{2}.$$

Rezolvare: Folosim inegalitatea $a + \frac{1}{a} \geq 2 \quad \forall a > 0$. Atunci:

$$\log_{xy} yz + \log_{yz} xy \geq 2; \quad \log_{yz} zx + \log_{zx} yz \geq 2;$$

$$\log_{xz} xy + \log_{xy} xz \geq 2.$$

De aici avem:

$$\log_{xy} y + \log_{xy} z + \log_{yz} y + \log_{yz} x \geq 2,$$

$$\log_{yz} z + \log_{yz} x + \log_{zx} y + \log_{zx} z \geq 2,$$

$$\log_{xz} y + \log_{xz} x + \log_{xy} x + \log_{xy} z \geq 2.$$

Adunăm cele trei inegalități și obținem:

$$2\log_{xy} z + 2\log_{yz} x + 2\log_{xz} y + \log_{xy} xy + \log_{yz} yz + \log_{xz} zx \geq 6.$$

Adică:

$$2\log_{xy} z + 2\log_{yz} x + 2\log_{xz} y \geq 6 - 3.$$

$$\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{xz} y \geq \frac{3}{2}.$$

3. Să se arate că

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 5.$$

Ind. Pornim tot de la inegalitatea mediilor

$$\log_2 3 + \log_3 4 + \log_4 5 + \log_5 6 > 4\sqrt[4]{\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6}$$

și trecem sub radical toți logaritmi în baza 2.

Capitolul 12

Progresii, dezvoltări binomiale, medii

12.1 Progresii

Fie A o mulțime de numere, ale cărei elemente sunt date prin intermediul unei liste. $A = \{5, 3, 7, 4, 1, 2, 9, 6\}$. În cadrul acestei liste ordinea elementelor nu este importantă, ea putând fi scrisă și sub forma $A = \{9, 1, 6, 4, 3, 2, 5, 7\}$, de exemplu. Revenim la mulțimea $A = \{5, 3, 7, 4, 1, 2, 9, 6\}$ dată sub forma inițială și să luăm în considerare poziția elementelor. Avem 5 pe prima poziție, 3 pe a doua poziție, 7 pe a treia poziție,..., 6 pe poziția a opta. Punem în evidență corespondența dintre poziția elementului și element

1	2	3	4	5	6	7	8
↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
5	3	7	4	1	2	9	6

Putem face o notație care să pună în evidență atât termenii listei cât și poziția fiecărui termen $5 = a_1, 3 = a_2, 7 = a_3, \dots, 9 = a_7$ și $6 = a_8$. Lista dată de $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_7, a_8\}$ o vom numi secvență. În cadrul ei vom ști că termenul al patrulea, de exemplu, este 4, primul termen este 5 și așa mai departe. Să considerăm două cazuri speciale în care între termenii secvenței există o relație recursivă.

12.1.1 Progresia aritmetică

Construim o secvență, nu neapărat finită, $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ în modul următor: pornim de la două numere reale $a, r \neq 0$ și definim recursiv secvența:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a_1 + r, \quad \text{și, în general} \quad a_{k+1} = a_k + r, \quad \forall k \geq 2. \quad (12.1)$$

O astfel de secvență o vom numi **progresie aritmetică**. Numărul a se va numi **primul termen** al progresiei, iar r se va numi **rația** progresiei. Să observăm că pentru a avea o progresie aritmetică este nevoie de cel puțin trei termeni.

Observația 12.1. *Considerăm o progresie aritmetică de trei numere, cu primul termen a și rația r . Avem următoarele relații:*

1. $a_1 = a, \quad a_2 = a_1 + r = a + r, \quad a_3 = a_2 + r = a_1 + 2r = a + 2r.$
2. *Rezultă că $a_1 + a_3 = 2a_2$ adică $a_2 = \frac{a_1 + a_3}{2}$*
3. *Trei numere a, b, c în progresie aritmetică pot fi considerate astfel $a, a + r, a + 2r$ sau $b - r, b, b + r$ sau $b = \frac{a + c}{2}.$*
4. *Suma a trei numere a, b, c în progresie aritmetică este*

$$S = a + b + c = 3b = 3a + 3r = \frac{3(a + c)}{2}$$

Exerciții

1. Considerăm trei numere a, b, c în progresie aritmetică în care $b=2$. Să se determine cea mai mică și cea mai mare valoare pe care o poate lua suma $S = a + b + c$.
2. Fie a, b, c trei numere în progresie aritmetică. Să se determine b, c și r știind că $a = 6$ și $a + b + c = 36$.
3. Fie a, b, c trei numere în progresie aritmetică. Să se arate că

$$\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} = \frac{2}{ac} \quad \blacksquare$$

Să considerăm o progresie aritmetică de prim termen a_1 și de rație r . Definiția ei, dată de 12.1, ne permite să găsim o formulă care să ne evidențieze relația între oricare doi termeni ai săi. Exprimăm termenul a_k în funcție de a_1 și r :

$$a_k = a_{k-1} + r = a_{k-2} + 2r = \dots = a_1 + (k-1)r$$

deci

$$a_k = a_1 + (k-1)r$$

Scriem această relație și pentru un alt indice, i de exemplu

$$a_i = a_1 + (i-1)r.$$

Scădem aceste două relații între ele obținând

$$a_k - a_i = a_1 + (k-1)r - [a_1 + (i-1)r]$$

$$a_k - a_i = a_1 + kr - r - a_1 - ir + r$$

Reducem termenii asemenea, trecem pe a_i în membrul drept și obținem

$$a_k = a_i + (k - i)r, \quad \forall k, i \geq 1. \quad (12.2)$$

Formula dată de 12.2 merge indiferent de relația dintre k și i . De exemplu:

$$a_7 = a_3 + (7 - 3)r, \quad \text{adică} \quad a_7 = a_3 + 4r$$

și la fel

$$a_2 = a_9 + (2 - 9)r, \quad \text{adică} \quad a_2 = a_9 - 7r$$

12.1.2 Exerciții

1. Să se determine a_1 și r în progresia aritmetică în care avem:

$$\begin{cases} a_7 = a_3 + 16 \\ a_5 + a_2 = 24 \end{cases}$$

Soluție: Rescriem prima ecuație folosind formula 12.2

$$a_1 + 6r = a_1 + 2r + 16 \text{ de unde } 4r = 16 \text{ deci } r = 4.$$

Rescriem și a doua ecuație

$$a_1 + 4r + a_1 + r = 24$$

înlocuim pe r cu valoarea obținută și rezultă $2a_1 + 20 = 24$ de unde $a_1 = 2$.

2. Să se determine al cincilea termen al unei progresii aritmetice în care $a_2 + a_8 = 6$

Soluție: Rescriem în funcție de a_5 și r relația dată folosind formula 12.2

$$a_5 + (2 - 5)r + a_5 + (8 - 5)r = 6. \text{ Obținem } a_5 - 3r + a_5 + 3r = 6 \text{ deci } a_5 = 3.$$

3. Să se determine primul termen al unei progresii aritmetice în care $a_6 = \frac{a}{5}$ și $r = \frac{14a}{5}$.

Ind. Avem direct formula $a_1 = a_6 + (1 - 5)r$

4. Să se arate că:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} \text{ numerele } (a - b)^2, \quad a^2 + b^2, \quad (a + b)^2$$

sunt în progresie aritmetică.

5. Fie a, b două numere reale nenule și secvența dată prin formula termenului său general de ordin n , $n \in \mathbb{N}$, $a_n = a \cdot n + b$.

Să se scrie primii cinci termeni ai secvenței.

Să se arate că secvența este o progresie aritmetică.

Să se determine termenul al optulea și rația progresiei.

6. Să se arate că dacă laturile a, b, c ale unui triunghi dreptunghic sunt în progresie aritmetică atunci ele sunt proporționale cu 3, 4, 5.

Soluție: Considerăm laturile $a < b < c$ în progresie aritmetică. Atunci $a = b - r$, $c = b + r$ și scriem că teorema lui Pitagora.

$$(b - r)^2 + b^2 = (b + r)^2.$$

Dezvoltăm binoamele, trecem totul în membrul stâng al egalității, reducem termenii asemenea și obținem că

$$b^2 - 4br = 0.$$

Cum $b \neq 0$ putem simplifica cu b și rezultă

$$b = 4r.$$

Dar $a = b - r$ și $c = b + r$ deci

$$a = 3r, \quad b = 4r, \quad c = 5r$$

adică laturile sunt proporționale cu 3, 4, și 5.

12.1.3 Suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice

Fiind dată o progresie aritmetică notăm suma primilor n termeni cu

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n.$$

Putem determina o formulă de calcul a acestei sume astfel: considerăm suma

$$T_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

Adunăm cele două sume grupând termenii de pe pozițiile corespunzătoare:

$$S_n + T_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1)$$

Observăm că toate parantezele sunt egale cu $a_1 + a_n$.

Într-adevăr

$$a_2 + a_{n-1} = a_1 + r + a_n - r = a_1 + a_n,$$

$$a_3 + a_{n-2} = a_1 + 2r + a_n - 2r = a_1 + a_n,$$

...

$$a_{n-1} + a_2 = a_1 + (n-2)r + a_n - (n-2)r = a_1 + a_n,$$

$$a_n + a_1 = a_1 + (n-1)r + a_n - (n-1)r = a_1 + a_n,$$

ceea ce înseamnă că

$$S_n + T_n = n(a_1 + a_n)$$

Dar $S_n = T_n$ fiind aceeași sumă cu termenii aranjați altfel. De aici rezultă că

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \quad (12.3)$$

Exerciții

1. Considerăm o progresie aritmetică în care suma primilor n termeni ai săi este $S_n = 3n^2 + 4n$. Să se determine a_7 și rația progresiei.

Soluție: Știm că $S_7 - S_6 = a_7$. Dar $S_7 = 3 \cdot 49 + 4 \cdot 7 = 175$ iar $S_6 = 132$. Deci $a_7 = 175 - 132 = 43$. Avem în plus că $S_1 = a_1 = 3 + 4 = 7$ și $a_7 = a_1 + 6r$. De aici $6r = 43 - 7 = 36$ obținând astfel $r = 6$.

2. Să se calculeze suma

$$G_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$

Soluție: Observăm în primul rând că 1, 2, 3, ..., n formează o progresie aritmetică de prim termen 1 și de rație 1. În acest caz putem aplica direct formula 12.3 ținând cont că $a_1 = 1$, $a_n = n$, numărul de termeni adunați fiind n și obținem:

$$G_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad (12.4)$$

3. Să se calculeze suma

$$P_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n.$$

Soluție: Să rezolvăm acest exercițiu în două moduri.

- Putem scrie

$$P_n = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot n = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = 2G_n.$$

Deci

$$P_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1).$$

- Observăm că 2, 4, 6,..., 2n sunt termenii unei progresii aritmetice de prim termen 2 și de rație 2. Determinăm și câți termeni sunt în sumă. Fie k numărul de termeni. Atunci, folosind formula 12.2 pentru i=1 avem:

$$a_k = a_1 + (k-1)r$$

Înlocuim $a_k = 2n$, $a_1 = 2$, $r = 2$ și rezultă:

$$2n = 2 + (k-1)2$$

Efectuăm calculele obținând $2n = 2k$, ceea ce înseamnă că în sumă avem n termeni. Aplicăm acum direct formula 12.3

$$P_n = 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = \frac{n(2 + 2n)}{2} = \frac{n \cdot 2 \cdot (1 + n)}{2} = n(n+1)$$

4. Să se calculeze suma

$$I_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1).$$

Soluție: Vom prezenta două rezolvări pentru acest exercițiu.

- Pornim de la observația că 1,3,5,...,2n-1 este o progresie aritmetică de prim termen 1 și rație 2. Determinăm câți termeni are suma I_n . Fie k numărul termenilor acestei sume. Formula 12.2 ne dă că $a_k = a_1 + (k-1)r$ în care dacă înlocuim pe a_k cu $2n-1$, $a_1 = 1$, $r = 2$ obținem:

$$2n-1 = 1 + (k-1) \cdot 2 \text{ de unde } 2n-1 = 1+2k-2 \text{ deci } k = n.$$

Aplicăm acum formula 12.3 și obținem:

$$I_n = \frac{n(1 + 2n-1)}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2.$$

- Altfel, pornind de la faptul că termenul general al sumei I_n este $2k-1$ rescriem suma sub forma:

$$I_n = (2-1) + (2 \cdot 2-1) + (2 \cdot 3-1) + \dots + (2 \cdot n-1)$$

Separăm în sumă termenii pozitivi și pe cei negativi. Ținem cont că avem n paranteze și obținem

$$I_n = 2+4+6+..+2n-1-1-..-1 = 2+4+6+..+2n-n = P_n-n$$

Știm din exercițiul precedent că $P_n = n(n+1)$ deci:

$$I_n = n(n+1) - n = n^2$$

5. Să se calculeze sumele:

- a) $S_n = 3 + 6 + 9 + .. + 3n$
- b) $T_n = 2 + 5 + 8 + .. + (3n - 1)$
- 3) $U_n = 1 + 4 + 7 + .. + (3n - 2)$.

6. Fie $a_1, a_2, .., a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ termenii unei progresii aritmetice de rație r . Să se calculeze suma

$$S_n = \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + .. + \frac{1}{a_{n-1} a_n}$$

Soluție: Să observăm că $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2} = \frac{r}{a_1 a_2}$, relație valabilă pentru oricare doi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice adică

$$\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} = \frac{r}{a_k a_{k+1}}.$$

Având în vedere relația anterioară calculăm suma rS_n . Obținem:

$$\begin{aligned} rS_n &= \frac{r}{a_1 a_2} + \frac{r}{a_2 a_3} + .. + \frac{r}{a_{n-1} a_n} = \\ &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_4} + .. + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}. \end{aligned}$$

Reducem termenii asemenea și avem:

$$rS_n = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n}$$

Scriind pe $a_n = a_1 + (n-1)r$ rezultă $rS_n = \frac{(n-1)r}{a_1 a_n}$. Simplificăm cu r obținând astfel rezultatul căutat

$$S_n = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

12.1.4 Progresii geometrice

Fie numerele reale nenule a și q , cu $q \neq 0$, $q \neq \pm 1$. Construim secvența:

$$a_1 = a, \quad a_2 = a_1 \cdot q, \quad a_3 = a_2 \cdot q$$

și, în general,

$$a_1 = a, \quad a_{k+1} = a_k \cdot q, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (12.5)$$

Această secvență o vom numi **progresie geometrică**. Numărul a îl vom numi **primul termen** al progresiei iar q se va numi **rația** progresiei. O secvență care este o progresie geometrică trebuie să conțină minim trei termeni. La fel ca la progresia aritmetică, putem stabili o relație între oricare doi termeni ai acestei progresii. Astfel:

$$a_2 = a_1 q, \quad a_3 = a_2 q = a_1 q^2, \quad a_4 = a_3 q = a_2 q^2 = a_1 q^3 \dots$$

Observăm în aceste egalități că indicele termenului din membrul stâng al egalității este egal cu suma dintre indicele termenului din membrul drept al egalității adunat cu exponentul la care este ridicat q . Obținem relația generală

$$a_n = a_k q^{n-k}, \quad \forall n, k \geq 1. \quad (12.6)$$

Formula 12.6 este valabilă indiferent de relația dintre n și k . De exemplu, $a_7 = a_3 q^{7-3} = a_3 q^4$ dar, la fel, $a_4 = a_9 q^{4-9} = a_9 q^{-5}$

Observația 12.2. *Considerăm o progresie geometrică de trei numere cu primul termen a și rația q . Următoarele afirmații sunt adevărate:*

1. $a_1 = a, \quad a_2 = aq, \quad a_3 = aq^2$.
2. $a_1 \cdot a_3 = a_2^2$.
3. Trei numere a, b, c formând o progresie geometrică de rație q pot fi considerate astfel a, aq, aq^2 sau $\frac{b}{q}, b, bq$.
4. Trei numere a, b, c în progresie geometrică satisfac relația $b^2 = ac$.
5. Produsul a trei numere a, b, c în progresie geometrică de rație q este $abc = b^3 = a^3 q^3 = \frac{c^3}{q^3}$.
6. Dacă a, b, c sunt trei numere în progresie geometrică atunci și numerele $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ formează o progresie geometrică de rație $\frac{1}{q}$.

Exerciții

1. Considerăm trei numere a, b, c în progresie geometrică. Care este cea mai mare și care este cea mai mică valoare pe care o poate lua produsul $P = abc$?
2. Fie a, b, c o progresie geometrică. Să se determine b, c și q știind că $a = 2$ și $abc = 64$.
3. Dacă trei numere a, b, c formează o progresie geometrică de rație q , în ce condiții avem $b = \sqrt{ac}$?
4. Să se arate că dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $|a| \neq |b|$ atunci numerele $t_1 = (a - b)^2$, $t_2 = a^2 - b^2$, $t_3 = (a + b)^2$ formează o progresie geometrică.
Ind. Se verifică direct că $t_1 t_3 = t_2^2$ folosind faptul că

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

5. Determinați trei numere reale a, b, c care sunt în progresie aritmetică dacă $a + b + c = 12$ și $a + 1, b + 2, c + 11$ formează o progresie geometrică.

Soluție: Dacă a, b, c este o progresie aritmetică știm că $a + b + c = 3b$ deci $3b = 12$ de unde $b = 4$. În plus, $a + 1, b + 2, c + 11$ formează o progresie geometrică deci $(a + 1)(c + 11) = (b + 2)^2$. Notând cu r rația progresiei aritmetice și folosind faptul că $a = b - r = 4 - r$, $c = b + r = 4 + r$ rezultă: $(4 - r + 1)(4 + r + 11) = (4 + 2)^2$, adică $(5 - r)(r + 15) = 36$. Efectuăm calculele, trecem totul în membrul stâng și obținem ecuația $-r^2 - 10r + 39 = 0$. Soluțiile ei sunt $r_1 = 3$, $r_2 = -13$. Avem astfel două triplete care satisfac condițiile problemei

- Dacă $r = 3$ atunci $a = b - r = 4 - 3 = 1$, $b = 4$, $c = b + 3 = 7$.

- Dacă $r = -13$ atunci $a = b - r = 4 - (-13) = 17$, $b = 4$, $c = b + r = 4 + (-13) = -9$.

6. Să se arate că numerele $a_1 = a$, $a_2 = a + 1$, $a_3 = a + 2$ nu pot forma o progresie geometrică.
Ind. Se verifică direct că $a_1 a_3 \neq a_2^2$.

7. Să se determine primul termen și rația unei progresii geometrice în care avem:

$$\begin{cases} a_5 - a_1 = 15 \\ a_4 - a_2 = 6 \end{cases}$$

Soluție: Folosim formula $a_n = a_k \cdot q^{n-k}$ pentru a scrie cele două ecuații în funcție de a_1 și q și avem:

$$\begin{cases} a_1 q^4 - a_1 = 15 \\ a_1 q^3 - a_1 q = 6 \end{cases} \quad (12.7)$$

Membrul stâng al celor două ecuații este diferit de zero deci putem împărți prima ecuație la cea de a doua. Avem

$$\frac{a_1 q^4 - a_1}{a_1 q^3 - a_1 q} = \frac{15}{6}$$

Dăm factor comun la numărător pe a_1 , la numitor pe $a_1 q$, simplificăm cu a_1 și obținem ecuația în necunoscuta q

$$\frac{q^4 - 1}{q(q^2 - 1)} = \frac{15}{6}$$

Observăm ca trebuie să avem $q \neq -1, 0, 1$. În plus, folosim faptul că $q^4 = (q^2 - 1)(q^2 + 1)$, simplificăm în ambii membri și rezultă ecuația în q

$$\frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2}.$$

Înmulțim mezii cu extremii, trecem totul în membrul stâng și rezultă ecuația de gradul al doilea

$$2q^2 - 5q + 2 = 0$$

cu soluțiile $q_1 = 2$, $q_2 = -\frac{1}{2}$. Pe a_1 îl vom determina din prima ecuație a sistemului 12.7

- pentru $q=2$ avem $a_1(q^4 - 1) = 15$ ceea ce se reduce la $a_1 = 1$

- pentru $q = -\frac{1}{2}$ avem $a_1 \left(\frac{1}{2^4} - 1 \right) = 15$. Ținem cont că $2^4 = 16$, aducem la același numitor, efectuăm calculele obținând

$$a_1 \cdot \frac{15}{16} = 15.$$

Simplificăm cu 15, trecem 16 în celălalt membru și găsim soluția $a_1 = 16$.

Suma primilor n termeni ai unei progresii geometrice

Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ primii n termeni ai unei progresii geometrice. Să determinăm suma

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Pentru aceasta rescriem suma sub forma

$$S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + \dots + a_1q^{n-1} = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$$

Pentru a găsi formula de calcul a sumei S_n rămâne să determinăm suma

$$Q_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$$

Pentru calculul acestei sume procedăm astfel. Calculăm întâi $qQ_n - Q_n$

$$qQ_n - Q_n = \frac{\begin{array}{cccccc} q^n & +q^{n-1} & +q^{n-2} & +\dots+ & +q^2 & +q \\ & -q^{n-1} & -q^{n-2} & \dots & -q^2 & -q \end{array}}{\begin{array}{cccccc} = q^n & +0 & +0 & \dots & +0 & +0 \end{array}} - 1 =$$

de unde

$$qQ_n - Q_n = q^n - 1.$$

Atunci

$$Q_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (12.8)$$

Putem înmulți la numărător și la numitor cu -1 și avem

$$Q_n = \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (12.9)$$

Formula 12.8 se folosește în cazul $q > 1$ iar formula 12.9 este utilizată în cazul $q < 1$.

În concluzie, suma

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} \quad (12.10)$$

Putem rescrie 12.10 în cazul $q < 1$ sub forma

$$S_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (12.11)$$

Exemple:

1. Să se calculeze $S_n = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n$.

Avem $a_1 = 2$ și $q = 2$. Aplicăm direct formula 12.10 și obținem

$$2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2 \frac{2^n - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2.$$

2. Să se calculeze suma $S_n = 4 + 12 + 36 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1}$.

Ind. Observăm că $S_n = 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 + \dots + 4 \cdot 3^{n-1}$ Avem, atunci $a_1 = 4$ și $q = 3$.

3. Să se calculeze suma $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$.

Pentru această sumă avem $a_1 = 1$ și $q = \frac{1}{2}$. Atunci,

$$S_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}}.$$

4. Să se determine suma $S = 2 + 11 + 101 + 1001 + \dots + 1 \underbrace{0\dots0}_{n-2} 1$

Ținem cont că:

$$a_1 = 2 = 1 + 1,$$

$$a_2 = 11 = 10 + 1 = 10^1 + 1,$$

$$a_3 = 101 = 100 + 1 = 10^2 + 1,$$

$$a_4 = 1001 = 1000 + 1 = 10^3 + 1$$

și observăm astfel că termenul general de rang k are în el $k-2$ zerouri și poate fi scris sub forma

$$a_k = 10^{k-1} + 1.$$

Rescriem suma astfel:

$$S = 1 + 1 + 10^1 + 1 + 10^2 + 1 + 10^3 + 1 + \dots + 10^{n-1} + 1,$$

rearanjăm termenii

$$S = 1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} + \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ ori}}.$$

Despărțim suma noastră în doua sume $S = S_1 + S_2$ așa: S_1 este formată din primii n termeni ai lui S și reprezintă suma primilor

n termeni ai unei progresii geometrice care are $a_1 = 1$, $q = 10$ și deci are suma

$$S_1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1} = \frac{\overbrace{99..9}^{n \text{ ori}}}{9} = \underbrace{11..1}_{n \text{ ori}}.$$

S_2 are suma n deci

$$S = \underbrace{11..1}_{n \text{ ori}} + n.$$

5. * Se consideră o progresie geometrică cu șapte termeni pozitivi. Să se găsească produsul termenilor dacă

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + .. + a_7 = \frac{1067}{9} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + .. + \frac{1}{a_7} = \frac{1067}{81} \end{cases}$$

Soluție: Problema are un grad de dificultate mai mare. Rescriem ecuațiile în funcție de a_1 și q .

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + .. + a_1q^6 = \frac{1067}{9} \\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} \frac{1}{q} + .. + \frac{1}{a_7} \frac{1}{q^6} = \frac{1067}{81} \end{cases}$$

Calculăm sumele și obținem:

$$\begin{cases} a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = \frac{1067}{9} \\ \frac{1}{a_1} \frac{1 - \frac{1}{q^7}}{1 - \frac{1}{q}} = \frac{1067}{81} \end{cases}$$

În a doua relație aducem la același numitor sus și jos iar apoi simplificăm cu q . Relațiile vor deveni:

$$\begin{cases} a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = \frac{1067}{9} \\ \frac{1}{a_1} \frac{1}{q^6} \frac{q^7 - 1}{q - 1} = \frac{1067}{81} \end{cases}$$

Cum ambii membri din stânga nu pot fi 0 putem împărți prima relație la cea de a doua și avem pe rând:

$$\frac{\frac{a_1}{1}}{\frac{1}{a_1 q^6}} = \frac{\frac{9}{1}}{81}$$

care se reduce la

$$a_1^2 q^6 = 9$$

Observăm că membrul stâng este un pătrat perfect iar condiția de pozitivitate a termenilor progresiei ne conduce după extragerea radicalului la

$$a_1 q^3 = 3. \quad (12.12)$$

Să determinăm produsul $P = a_1 a_2 \dots a_7$. Scriem pe P în funcție de a_1 și q .

$$a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^6 = a_1^7 q^{1+2+3+4+5+6} = a_1^7 q^{21}.$$

Dar

$$a_1^7 q^{21} = (a_1 q^3)^7.$$

Utilizând rezultatul 12.12 obținem rezultatul $P = 3^7$.

Modul în care se rezolvă acest exercițiu permite imediat o generalizare a lui pe care o dăm în exercițiul următor.

6. * Considerăm o progresie geometrică cu termeni pozitivi. Notăm cu $S_1 = \sum_{k=1}^n a_k$, $S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}$ și $P = a_1 a_2 \dots a_n$. Să se demonstreze că

$$P = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_2}\right)^n}$$

Soluție: Împărțim S_1 la S_2 și obținem

$$\frac{S_1}{S_2} = a_1^2 q^{n-1}$$

Calculând produsul P obținem

$$\begin{aligned} P &= a_1 a_2 \dots a_n = a_1 \cdot a_1 q \cdot a_1 q^2 \cdot \dots \cdot a_1 q^{n-1} = \\ &= a_1^n q^{1+2+3+\dots+n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \end{aligned}$$

care poate fi scris mai departe

$$P = \left(a_1 q \frac{n-1}{n} \right)^2 = \left(\frac{S_1}{S_2} \right)^2.$$

7. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ o progresie geometrică cu termeni pozitivi. Să se calculeze suma:

$$S = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}$$

Soluție: Rescriem convenabil suma

$$S = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1 q} - \sqrt{a_1}} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2 q} - \sqrt{a_2}} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1} q} - \sqrt{a_{n-1}}}$$

Dăm factor comun în fiecare fracție și apoi simplificăm

$$S = \frac{\sqrt{a_1}}{\sqrt{a_1}(\sqrt{q} - 1)} + \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2}(\sqrt{q} - 1)} + \dots + \frac{\sqrt{a_{n-1}}}{\sqrt{a_{n-1}}(\sqrt{q} - 1)}$$

Rezultă

$$S = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{q} - 1} + \frac{1}{\sqrt{q} - 1} + \dots + \frac{1}{\sqrt{q} - 1}}_{n-1 \text{ ori}} = \frac{n-1}{\sqrt{q} - 1}.$$

Progresii geometrice infinite, suma termenilor lor

Considerăm o progresie geometrică cu o infinitate de termeni și să vedem cum putem defini suma termenilor ei și când această sumă este finită. Fără a restrânge generalitatea vom porni de la o progresie geometrică care are primul termen 1 și rația q . Termenii progresiei vor fi

$$1, q, q^2, q^3, \dots, q^{n-1}, \dots$$

Considerăm suma primilor n termeni

$$S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

și ne definim suma progresiei infinite considerate ca un proces de trecere la limită a lui S_n . Adică,

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Plecăm de la premiza că este cunoscută următoarea limită

$$\text{Dacă } |q| < 1 \text{ atunci } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$$

Folosind această relație putem afirma că suma S a progresiei geometrice există dacă și numai dacă rația progresiei este subunitară în modul și

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q} \quad \text{pentru } |q| < 1. \quad (12.13)$$

Exemple:

1. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

Observăm că în acest caz $q = \frac{1}{2}$ și aplicăm direct formula 12.13 obținând

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \quad (12.14)$$

2. Să se calculeze suma

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + (-1)^n \frac{1}{2^n} + \dots$$

Rescriem termenul general al sumei și obținem

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

În acest caz rația $q = -\frac{1}{2}$ deci

$$S = \frac{1}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

3. Să se calculeze suma

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Putem proceda în două moduri.

- Rescriem

$$S_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

și putem da factor comun pe $\frac{1}{2}$ rezultând

$$S_1 = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Folosim acum direct rezultatul 12.14 și obținem

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$$

- Putem să rezolvăm acest exercițiu astfel: observăm din 12.14 că

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots\right) = 1 + S_1.$$

De aici, știind că $S = 2$ rezultă imediat că $S_1 = 1$.

4. Să se calculeze suma

$$S_2 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$$

Rescriem termenul general al sumei astfel

$$S_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n$$

Deci suma cerută reprezintă suma unei progresii geometrice de rație $\frac{1}{9}$. Aplicăm direct formula 12.13 și obținem

$$S_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{\frac{9-1}{9}} = \frac{9}{8}.$$

5. Putem determina și unele sume care nu reprezintă suma unei progresii geometrice infinite. Considerăm o progresie geometrică de prim termen 1 și rație pozitivă, subunitară, x . Știm că în acest caz avem relația

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \frac{1}{1 - x} \quad (12.15)$$

Egalitatea se menține și dacă derivăm în raport cu variabila x relația 12.15 în stânga termen cu termen iar în dreapta ca o fracție obținând

$$S' = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + nx^{n-1} + \dots = \frac{0 \cdot (1 - x) - 1 \cdot (1 - x)'}{(1 - x)^2}$$

de unde

$$S' = \frac{1}{(1 - x)^2}. \quad (12.16)$$

6. Să se calculeze suma

$$S' = 1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{5^2} + \dots + \frac{n}{5^{n-1}} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{5^{k-1}} = \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{1}{5}\right)^{k-1}$$

În mod evident această nu este suma termenilor unei progresii geometrice, dar $\frac{1}{5} < 1$ și atunci putem aplica direct formula 12.16 luând pe $x = \frac{1}{5}$. Obținem

$$S' = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{5}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{25}{16}$$

7. Am văzut în exemplele anterioare ca dacă $|x| < 1$ atunci suma progresiei geometrice de prim termen 1 și rație x^2 este

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \frac{1}{1 - x^2}$$

În cazul în care considerăm rația $-x^2$ suma devine

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \frac{1}{1 - (-x^2)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

Avem așadar pentru $|x| < 1$

$$1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^k x^{2k} + \dots = \frac{1}{1 + x^2} \quad (12.17)$$

De exemplu, pentru $x = \frac{2}{3}$ suma

$$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^4 - \left(\frac{2}{3}\right)^6 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{2k} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)} = \frac{9}{13}$$

8. Integrăm relația 12.17 astfel: membrul stâng termen cu termen iar membrul drept direct. Obținem

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + \dots = \arctg x + C$$

Pentru a determina constanta C e suficient să facem în relația anterioară pe $x = 0$ rezultând

$$0 = \arctg 0 + C \text{ deci } C = 0.$$

În concluzie, suma

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctg x \quad (12.18)$$

Dăm în continuare o aplicație cu grad sporit de dificultate

Să se calculeze suma

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \sqrt{3}}{(2k+1)3^{k+1}}$$

Rescriem termenul general al sumei așa:

$$\frac{(-1)^k \sqrt{3}}{(2k+1)3^{k+1}} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^{2k+2}} = (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{(\sqrt{3})^{2k+1}}$$

Deci

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$

Observăm că după ce rescriem termenul general suma este de forma 12.18 cu $x = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ deci putem aplica direct rezultatul și rezultă că

$$S = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$

12.2 Dezvoltări binomiale

O expresie de forma $a + b$ poartă numele de binom. Vom pune în evidență formule de calcul pentru $(a+b)^n$ cu n număr natural, formule care poartă numele de binomul lui Newton și după aceea vom da o formulă de calcul pentru expresii de forma $(1+x)^r$ unde $r \in \mathbb{Q}$ și $|x| < 1$.

$$1. (a+b)^1 = a^1 + b^1 = a + b$$

$$2. (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$3. (a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = a^3 + 2a^2b + b^2a + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \text{ deic}$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Triunghiul lui Pascal

Enunțăm un algoritm cu ajutorul căruia putem obține coeficienții dezvoltărilor binomiale succesiv până la ordinul dorit de noi.

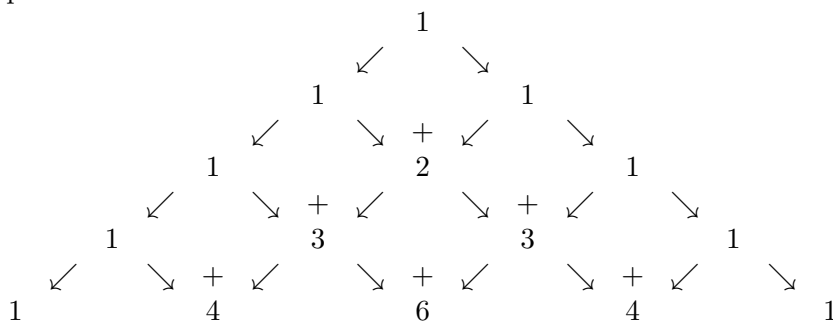
Regulă:

săgeți divergente impun copierea valorii din care pleacă săgeata
săgeți convergente impun adunarea valorilor din care pleacă săgețile.

Algoritmul lucrează pe perechi de linii și arată astfel:

- pe prima linie se scrie 1;
- pe a doua linie se pun săgeți divergente din elementul de mai sus;
- apoi, în general,
- pe primul rând din pereche se pun săgeți divergente din fiecare element din linia anterioară;
- pe al doilea rând din pereche se scriu în vârfurile săgeților elementele obținute cu regula convenită.

Pe fiecare linie pară vom avea coeficienții dezvoltării binomiale core-spunzătoare.



Astfel, pe ultimul rând am obținut coeficienții dezvoltării lui $(a + b)^4$.

Ținând cont că puterile lui a sunt descrescătoare, puterile lui b sunt crescătoare și că suma puterilor lui a și b este mereu 4 putem să scriem direct:

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Să dăm formula de calcul pentru Binomul lui Newton în cazul general

$$(a + b)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$(a + b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + C_n^n a^0 b^n \quad (12.19)$$

unde, reamintim,

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \text{ și, în general } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$C_n^k = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-k)}$$

iar după simplificări

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

Folosind cele de mai sus rescriem formula 12.19 pentru $a = 1$ și $b = x$:

$$(1 + x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \dots + nx^{n-1} + x^n \quad (12.20)$$

Observăm că dacă îl facem pe $n = 2$ în 12.20 rămân doar primii trei termeni, pentru $n=3$ rămân patru termeni și în general formula are $n + 1$ termeni.

Relația 12.20 se poate aplica și pentru puteri raționale dar trebuie, în acest caz, impuse restricții pentru x și anume $|x| < 1$. Fie $r \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$

$$(1 + x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{r \cdot (r-1) \cdot \dots \cdot (r-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}x^k + \dots \quad (12.21)$$

Formal, relațiile 12.20 și 12.21 seamănă dar diferențele sunt semnificative. În cazul $(1+x)^n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, toți coeficienții din dezvoltare sunt numere naturale și formula are un număr finit de termeni. Coeficientul lui x^{n-1} este n și se obține după simplificări dintr-un coeficient

de forma coeficientului termenului general $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} =$
 n și la fel și pentru coeficientul lui x^n avem $\frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n} =$

1. Dacă ar mai fi un termen în dezvoltare atunci coeficientul său ar fi 0 pentru că ultimul factor de la numărătorul său ar fi 0. De aici rezultă că dezvoltarea lui $(1+x)^n$ are exact $n+1$ termeni.

Pentru exponent întreg, negativ, dezvoltarea nu mai are un număr finit de termeni.

În cazul în care exponentul este rațional, neîntreg, dezvoltarea nu mai are un număr finit de termeni pentru că coeficienții începând cu al doilea termen sunt numere raționale neîntregi și niciunul nu se anulează.

Exemple:

1. Să se determine dezvoltarea lui $(1+x)^5$

$$\begin{aligned} (1+x)^5 &= 1 + \frac{5}{1}x + \frac{5(5-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{5(5-1)(5-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \\ &\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4 + \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}x^5 + \\ &+ \underbrace{\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}}_0 x^6 + \underbrace{\dots}_0 = \\ &= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5 \end{aligned}$$

2. Pentru $|x| < 1$ să se determine dezvoltarea lui $(1-x)^{-1}$.

Ținem cont că $1-x = 1+(-x)$, $r = -1$ și folosim direct formula 12.21:

$$(1-x)^{-1} = 1 + \frac{-1}{1}(-x) + \frac{(-1)(-2)}{1 \cdot 2}(-x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-x)^3 + \dots$$

de unde

$$(1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots$$

3. Să se determine primii patru termeni ai dezvoltării lui $\sqrt{1+x}$.

Aplicăm formula 12.21 pentru $r = \frac{1}{2}$.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

$$= 1 + \frac{x}{2} + \frac{-\frac{1}{4}}{2}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$$

Deci

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3$$

4. Să se scrie primii 4 termeni ai dezvoltărilor următoarelor binome:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}; \quad \sqrt[3]{1+x}; \quad \sqrt{1-x}; \quad \left(1 + \frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

5. Să se calculeze cu 2 zecimale exacte următoarele valori

$$\sqrt{1,4}; \quad \sqrt{0,86}; \quad \frac{1}{\sqrt{1,09}}; \quad \sqrt[5]{1,32}; \quad \sqrt{4,26}; \quad \frac{2}{\sqrt{8,82}}$$

12.3 Media aritmetică, geometrică și armonică

12.3.1 Media aritmetică

Considerăm numerele reale a, b . *Media lor aritmetică* se definește ca fiind

$$M_a = \frac{a+b}{2} \quad (12.22)$$

Media aritmetică este legată de noțiunea de mijloc. Pe o axă dacă vom considera două puncte $M_1(a)$ și $M_2(b)$ atunci punctul de coordonată media aritmetică a lui a și b reprezintă coordonata mijlocului segmentului M_1M_2 . Dacă vom considera segmentul M_1M_2 în plan, determinat de punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ atunci punctul care are coordonatele

$$M_a \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

este chiar mijlocul segmentului M_1M_2 .

Dacă avem trei numere x, y, z , media lor aritmetică va fi $M_a = \frac{x+y+z}{3}$. Dacă avem trei puncte în plan, de coordonate $A(x_a, y_a)$, $B(x_b, y_b)$, $C(x_c, y_c)$ și considerăm punctul G care are coordonatele date de mediile aritmetice ale coordonatelor punctelor A, B, C atunci

$$G \left(\frac{x_a + x_b + x_c}{3}, \frac{y_a + y_b + y_c}{3} \right)$$

este centrul de greutate al triunghiului ABC . Evident, în cazul a n numere, media aritmetică se va calcula similar și anume:

$$M_a = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Pentru că noțiunea de medie aritmetică este cumva legată de noțiunea de centru de greutate, putem defini și noțiunea de medie aritmetică ponderată. Dăm întâi un exemplu. Fie secvența de numere

$$5, 3, 5, 4, 5, 3, 4, 4, 4, 4.$$

Care va fi media aritmetică a acestor numere știm deja,

$$M_a = \frac{5 + 3 + 5 + 4 + 5 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4}{10}.$$

Rescriem media rearanjând numărătorul sub forma

$$M_a = \frac{5 + 5 + 5 + 3 + 3 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4}{10}$$

Observăm că avem de trei ori numărul 5, de două ori numărul 3 și de cinci ori numărul 4 iar $3 + 2 + 5 = 10$. Atunci media aritmetică putem să o scriem sub forma

$$M_a = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{3 + 2 + 5} = \frac{41}{10}.$$

Formalizăm exemplul precedent astfel: lista $L = \{5, 5, 5, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4\}$ o vom scrie concentrat sub forma unor perechi ordonate în care prima componentă are o valoare numerică din listă iar a doua componentă dă numărul de repetiții ale acesteia în listă. Obținem secvența $S = \{(5, 3); (3, 2); (4, 5)\}$. Definim media aritmetică a secvenței S ca fiind

$$M_s = \frac{3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{3 + 2 + 5}.$$

În general, dată o secvență sub forma

$$S = \{(x_1, n_1); (x_2, n_2); \dots; (x_k, n_k)\}$$

cu semnificația că valoarea x_i se repetă de n_i ori atunci media ei aritmetică va fi dată de

$$M_s = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k} \quad (12.23)$$

Notăm cu $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ și rescriem formula de calcul pentru M_s astfel:

$$M_s = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_k x_k}{n} = \frac{n_1 x_1}{n} + \frac{n_2 x_2}{n} + \dots + \frac{n_k x_k}{n} \quad (12.24)$$

Numărul de apariții ale elementului x_i raportat la totalul aparițiilor elementelor poartă numele de frecvență (frecvență de apariție) și se notează cu

$$p_i = \frac{n_i}{n}$$

Astfel, media M_s se poate rescrie

$$M_s = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_kx_k \quad (12.25)$$

Formulele 12.25 și 12.23 reprezintă formulele de calcul pentru media aritmetică ponderată.

Exemplu:

Considerăm placa din figura 12.1 alcătuită din trei plăci de compoziții diferite. Placa ABE cântărește $g_1 = 48kg$, placa BCF are $g_2 = 82kg$ iar $CDEF$ are $g_3 = 158kg$. Într-un sistem de coordonate avem $A(0,0)$, $B(5,3)$, $C(10,5)$, $D(15,-2)$, $E(7,-1)$ și $F(6,1)$. Să se determine centrul de greutate al plăcii $ABCDE$.

Soluție: Centrul de greutate G_1 al plăcii ABE este dat de media

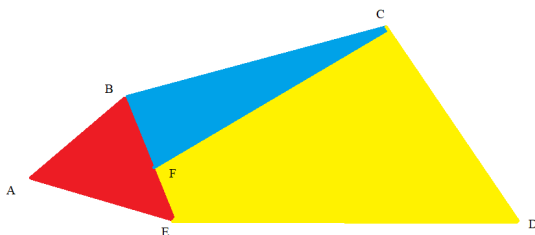


Fig. 12.1:

aritmetică a coordonatelor vârfurilor A, B, E și anume

$$G_1(x_1, y_1) = G_1\left(\frac{x_a + x_b + x_e}{3}, \frac{y_a + y_b + y_e}{3}\right)$$

de unde

$$G_1\left(\frac{0 + 5 + 7}{3}, \frac{0 + 3 - 1}{3}\right); \quad G_1\left(4, \frac{2}{3}\right)$$

Procedând similar obținem pentru placa BCF coordonatele centrului de greutate G_2 ca fiind

$$G_2\left(\frac{5 + 10 + 6}{3}, \frac{3 + 5 + 1}{3}\right); \quad \text{deci} \quad G_2(7, 3)$$

Principiul se păstrează și pentru placa $CDEF$ și avem

$$G_3 \left(\frac{10 + 15 + 7 + 6}{4}, \frac{5 - 2 - 1 + 1}{4} \right); \quad \text{deci} \quad G_3 \left(\frac{19}{2}, \frac{3}{4} \right)$$

Centrul de greutate al plăcii totale va fi dat de centrul de greutate al sistemului de puncte G_1, G_2, G_3 iar pentru că avem greutate diferite coordonatele acestui centru de greutate vor fi date de o medie ponderată. Întreaga placă are greutatea de $g_1 + g_2 + g_3 = 48 + 82 + 152 = 282kg$. În acest caz ponderile vor fi date chiar de greutatele plăcilor. Avem următoarele sisteme de perechi

$$X = \{(x_1, g_1), (x_2, g_2), (x_3, g_3)\}$$

$$Y = \{(y_1, g_1), (y_2, g_2), (y_3, g_3)\}$$

Înlocuim cu valorile obținute anterior

$$X = \left\{ (4, 48), (7, 82), \left(\frac{19}{2}, 152 \right) \right\}$$

$$Y = \left\{ \left(\frac{2}{3}, 48 \right), (3, 82), \left(\frac{3}{2}, 152 \right) \right\}$$

Avem în continuare de calculat mediile ponderate ale secvențelor X și Y

$$M_X = \frac{48 \cdot 4 + 82 \cdot 7 + 152 \cdot \frac{19}{2}}{48 + 82 + 152} \approx 7,67$$

$$M_Y = \frac{48 \cdot \frac{2}{3} + 82 \cdot 3 + 152 \cdot \frac{3}{4}}{48 + 82 + 152} \approx 1,36$$

În concluzie, centrul de greutate al plăcii este $G(7,67; 1,36)$. Dacă nu ținem cont de greutatele celor trei plăci centrul de greutate al sistemului de puncte A, B, C, D, E, F are coordonatele 7,16 și 1, iar dacă ignorăm și punctul F situat în interiorul plăcii mari avem pentru centrul de greutate coordonatele 7,4 și 1.

12.3.2 Media geometrică

Denumirea acestui tip de medie are într-adevăr "origini" geometrice. Se consideră un dreptunghi de laturi b, c și se cere determinarea laturii unui pătrat care aceeași arie cu dreptunghiul considerat. Aria

dreptunghiului este bc iar dacă a este latura pătratului atunci aria sa este a^2 . Egalitatea ariilor ne dă $a^2 = bc$ și, de aici,

$$a = \sqrt{bc}.$$

Putem prelungi această problemă astfel: Considerăm un paralelipiped drept-unghic de laturi a, b, c . Se cere aflarea laturii unui cub care același volum cu paralelipipedul considerat. Volumul paralelipipedului este abc și dacă latura cubului o notăm cu d atunci volumul cubului este d^3 . De aici $d^3 = abc$ și

$$d = \sqrt[3]{abc}.$$

În concluzie, dacă avem două numere pozitive a, b , prin definiție media lor geometrică este

$$M_g(a, b) = \sqrt{a \cdot b}. \quad (12.26)$$

Pentru trei numere pozitive a, b, c media geometrică se definește

$$M_g(a, b, c) = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} \quad (12.27)$$

iar, în general, media geometrică a unei secvențe pozitive $a_1, a_2, \dots, a_n$ este

$$M_g(a_1, a_2, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (12.28)$$

Insistăm asupra faptului că media geometrică operează numai cu numere pozitive. Această medie este mai utilă decât media aritmetică pentru a descrie creșterile proporționale, exponențiale sau variabile. Media geometrică a creșterilor este echivalentă cu creșterea medie constantă care are ca rezultat aceeași valoare finală. Pentru creșteri nu se folosesc uzual procentaje care pot fi negative ci echivalentul lor zecimal.

Exemplu Considerăm un produs care în 2017 costa 80 de lei. În 2018 prețul lui a crescut cu 25%, în anul 2019 creșterea a fost de 10%, în 2020 prețul lui a crescut cu 50%, iar în 2021 s-a constatat o scădere a prețului cu 20%. Care a fost creșterea medie a prețurilor pe perioada celor patru ani?

Soluție: Detaliem: În primul rând să vedem cum se transformă procentele de creștere în coeficienți de creștere. De exemplu, o creștere de 38% a unei valori p înseamnă că la valoarea inițială care procentual reprezintă $100\%p$ se adugă încă 38% p adică valoarea la care se ajunge este de 138% p . Dar 138% $\cdot p$ înseamnă $\frac{138}{100}p = 1,38 \cdot p$. Astfel procentul de creștere de 38% se echivalează cu un coeficient de creștere cu valoarea 1,38. La fel, dacă avem o scădere de 21% atunci noua valoare va fi dată de $(100\% - 21\%)p = (1 - 0,21)p = 0,79p$.

Revenind la problema noastră observăm că avem următorii coeficienți de creștere: în 2018 coeficientul de creștere a fost 1,25, pentru 2019 am avut 1,1, în 2020 1,5 iar în 2021 0,8. Coeficientul mediu de creștere va fi dat de media geometrică a numerelor 1,25 1,1 1,5 și 0,8.

$$M_g = \sqrt[4]{1,25 \cdot 1,1 \cdot 1,5 \cdot 0,8} \approx 1,133.$$

Acest lucru înseamnă că dacă am avea o creștere constantă anuală de

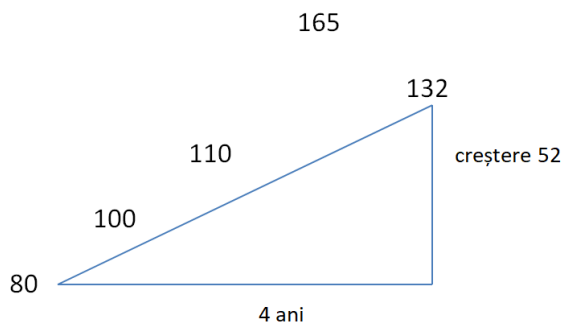


Fig. 12.2:

coeficient 1,133 adică o creștere procentuală de 13,3% în fiecare an, după patru ani am ajunge la prețul $((((80 \cdot 1,133) \cdot 1,133) \cdot 1,133) \cdot 1,133) \approx 132$. Să verificăm că urmărind evoluția reală a prețului după patru ani ajungem la 132 de lei. În primul an coeficientul de creștere este 1,25 deci prețul ajunge la valoarea 100lei. În al doilea an coeficientul de creștere este 1,1 și rezultă prețul 110 lei. În al treilea an coeficientul de creștere este 1,5 prețul devenind 165 de lei iar în ultimul an coeficientul de creștere fiind 0,8 prețul final va deveni 132 lei. Observăm că prețurile finale coincid în variația reală cu cea dată de variația constantă obținută cu ajutorul mediei geometrice. Din figura 12.2 observăm că panta dreptei care ne dă creșterea constantă este 13% valoare care poate fi considerată o bună aproximare a creșterii calculată cu media geometrică.

12.3.3 Media armonică

Alături de media aritmetică și cea geometrică, media armonică, pe care o vom nota cu M_h , a fost introdusă în matematică de școala lui Pitagora. Pentru o aceeași secvență numerică pozitivă cu cel puțin doi termeni distincți, media armonică are cea mai mică valoare dintre

cele trei tipuri de medii. Este adevărată următoarea inegalitate:

$$M_h \leq M_g \leq M_a \quad (12.29)$$

Ca o caracteristică a mediei armonice aceasta diminuează influența asupra rezultatului a celor mai mari valori din serie și potențează influența termenilor cu cele mai mici valori.

Dacă avem două numere a și b , strict pozitive definim media lor armonică astfel:

$$M_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \quad (12.30)$$

Aducem la același numitor jos și înmulțim cu ab și sus și jos obținând

$$M_h = \frac{2 \cdot ab}{\frac{b+a}{ab} \cdot ab} = \frac{2ab}{a+b} \quad (12.31)$$

Pentru trei numere strict pozitive a, b, c media armonică se definește astfel:

$$M_h = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \quad (12.32)$$

Dacă aducem la același numitor jos și înmulțim cu abc sus și jos vom obține:

$$M_h = \frac{3 \cdot abc}{\frac{bc+ca+ab}{abc} \cdot abc} = \frac{3abc}{bc+ca+ab} \quad (12.33)$$

În general pentru secvența strict pozitivă $a_1, a_2, \dots, a_n$ media armonică se definește ca fiind raportul dintre numărul elementelor din secvență și suma inverselor termenilor secvenței.

$$M_h = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \quad (12.34)$$

Exemple:

1. Dacă calculăm media aritmetică, geometrică, armonică pentru numerele 8 și 18 obținem

$$M_a = \frac{8+18}{2} = 13 \quad M_g = \sqrt{8 \cdot 18} = \sqrt{144} = 12$$

$$M_h = \frac{2 \cdot 8 \cdot 18}{8+18} \approx 11,08$$

2. Media armonică se folosește pentru determinarea vitezelor medii într-un anume context. O astfel de problemă este: *Un mobil se deplasează din localitatea A în localitatea B cu viteza constantă 20 m/s și se întoarce pe același drum cu viteza de 15 m/s. Care a fost viteza medie de deplasare a vehiculului?*

Soluție: Notăm cu S distanța dintre A și B. Relația dintre spațiu, viteză și timp în cazul mișcării uniforme este

$$S = v \cdot t \quad (12.35)$$

Pe drumul $A \rightarrow B$ avem

$$S = v_1 \cdot t_1$$

iar pe drumul $B \rightarrow A$ avem

$$S = v_2 \cdot t_2$$

Drumul total $A \rightarrow B \rightarrow A$ este $2S$ iar timpul de parcurgere al distanței este $t_1 + t_2$. Pentru determinarea vitezei medii notată cu v_m , ținând cont de spațiul total parcurs și timpul total de deplasare vom folosi o formulă de tip 12.35

$$2S = v_m(t_1 + t_2)$$

De aici exprimăm v_m :

$$v_m = \frac{2S}{t_1 + t_2}.$$

Dar

$$t_1 = \frac{S}{v_1}, \quad t_2 = \frac{S}{v_2}$$

Înlocuim pe t_1 și t_2

$$v_m = \frac{2S}{t_1 + t_2} = \frac{2S}{\frac{S}{v_1} + \frac{S}{v_2}}$$

Simplificăm cu S și rezultă:

$$v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}$$

În concluzie viteza medie pentru acest tip de problemă este dată de media armonică a celor două viteze. Pentru calculul numeric

al vitezei medii este indicată folosirea formulei 12.31 pentru că în această formulă avem o singură împărțire în timp ce în formula 12.30 avem trei împărțiri fiecare aducându-și o contribuție la eroarea finală dacă folosim rotunjiri la fiecare operație. Pentru cazul nostru, cu formula 12.31 avem

$$v_m = \frac{2 \cdot 15 \cdot 20}{15 + 20} = 17,1428571429.. \approx 17,14$$

Pentru formula 12.30 avem

$$\frac{1}{v_1} = \frac{1}{20} = 0,05, \quad \frac{1}{v_2} = \frac{1}{15} = 0,0666666666.. \approx 0,07$$

Aproximând totul la a doua zecimală vom obține viteza medie

$$v_m = \frac{2}{0,05 + 0,07} = 16,67$$

Calculul fără rotunjire la a doua zecimală ne dă

$$v_m = \frac{2}{0,05 + 0,0666666666} = 17,1428571429..$$

3. Un mobil se deplasează cu viteza constantă de 20 m/s timp de o oră și apoi cu viteza constantă de 30m/s tot timp de o oră. Care este viteza medie a mobilului?

Soluție: Trebuie făcută deosebirea dintre problema anterioară și aceasta. Aici avem timpii egali pe cele două deplasări iar în problema anterioară aveam distanțele parcurse în cele două deplasări egale. Formulele de la care se pleacă sunt aceleași

$$S_1 = v_1 \cdot t \quad S_2 = v_2 \cdot t$$

Spațiul total este $S_1 + S_2$ iar timpul total este $t + t = 2t$. Viteza medie va fi

$$v_m = \frac{S_1 + S_2}{2t} = \frac{S_1}{2t} + \frac{S_2}{2t}$$

Dar

$$\frac{S_1}{2t} = \frac{v_1}{2} \text{ și } \frac{S_2}{2t} = \frac{v_2}{2}$$

De aici rezultă că

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

În concluzie, pentru mișcările cu secvențe de viteză constantă având aceeași distanță parcursă în fiecare segment parcurs, viteza

medie va fi dată de media armonică a vitezelor de pe fiecare segment iar dacă timpii sunt egali în fiecare segment atunci viteza medie este dată de media aritmetică a vitezelor. Pe scurt

- SPAȚII EGALE implică VITEZA MEDIE E MEDIA ARMONICĂ A VITEZELOR

- TIMPI EGALI implică VITEZA MEDIE E MEDIA ARITMETICĂ A VITEZELOR.

4. Într-un circuit electric avem două rezistențe de valori a, b , diferite, legate în paralel. Dorim să înlocuim cele două rezistențe cu două rezistențe de valori egale iar efectul să fie același. Care trebuie să fie valoarea noilor rezistențe?

Soluție: Pornim de la legea lui Ohm care ne dă legătura într-un circuit dintre tensiunea U , intensitatea curentului I și rezistența R

$$\text{Legea lui Ohm} \quad I = \frac{U}{R}$$

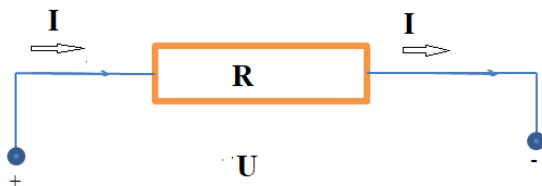


Fig. 12.3: Circuit electric, tensiune U , intensitate I , rezistență R .

În cazul nostru circuitul arată ca în figura 12.4

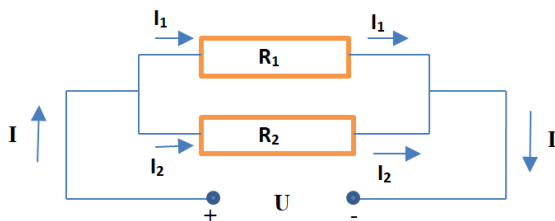


Fig. 12.4: Rezistențe legate în paralel

Avem relațiile :

$$U = I_1 R_1$$

$$U = I_2 R_2$$

$$I = I_1 + I_2$$

$$R_m = \frac{2U}{I} = \frac{2U}{I_1 + I_2} = \frac{2U}{\frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2}} = \frac{2R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

unde R_m este rezistența medie a circuitului. Atunci cele două rezistențe egale vor fi egale cu jumătatea rezistenței medii. Similar cu cazul vitezelor, dacă rezistențele sunt legate în serie atunci rezultatul este dat de media aritmetică a celor două rezistențe.

Capitolul 13

Matrici, determinanți, sisteme liniare

13.1 Matrici

13.1.1 Matricile definite ca tablouri dreptunghiulare

Fie m și n două numere naturale. Numim *matrice* $m \times n$ un tablou dreptunghiular, organizat pe m linii și n coloane care conține $m \cdot n$ elemente dintr-un corp dat. Convenim, pe moment, ca acest corp să fie corpul numerelor reale $\mathbb{R}$. Dacă $m=n$ atunci matricea se numește pătratică. Notăm matricile cu majuscule romane $A, B, \dots$ sau cu punerea în evidență a elementelor lor, $[a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$. Mulțimea tuturor matricilor de aceeași dimensiune, $m \times n$ cu elemente reale o notăm cu $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ sau $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$. De exemplu: Fie matricea A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & \pi & -3,6 & 9 \\ -2 & \frac{3}{4} & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Mulțimea matricilor cu două linii și patru coloane, cu elemente reale, o vom nota $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$. Cum în continuare vom lucra doar cu matrici cu elemente reale nu mai specificăm apartenența elementelor la $\mathbb{R}$.

$$A \in \mathcal{M}_{2,4}.$$

Elementul din matricea A situat pe linia i și coloana j îl vom nota cu a_{ij} . În exemplul considerat $a_{13} = -3,6$.

13.1.2 Câteva tipuri particulare de matrici

Menționăm următoarele tipuri de matrici:

1. **Matricile pătrate** sunt caracterizate de faptul că numărul de linii este egal cu numărul de coloane, de exemplu $A = \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}$.
În acest tip de matrici numim diagonală principală toate elementele de tip a_{ii} , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$. În exemplul anterior diagonală principală este formată din elementele $a_{11} = 5$ și $a_{22} = -2$.
2. Numim **matrice diagonală** o matrice pătratică care are elemente nenule doar pe diagonală principală. Un tip special de matrice diagonală este **matricea unitate** care are proprietatea că toate elementele de pe diagonală principală sunt egale cu 1 în rest elementele ei sunt nule. Matricea unitate de ordin m se notează cu I_m sau dacă nu există posibilitatea de confuzie notația este doar I .
De exemplu, matricea B este diagonală iar matricea I_2 este matricea unitate de ordin 2. $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$; $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.
3. O matrice specială este **matricea nulă**, notată $O_{m,n}$ care are toate elementele 0. $O_{2,4} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
4. Numim **matrice de permutare** o matrice pătratică ce are pe fiecare linie și pe fiecare coloană un element egal cu 1 iar restul elementelor sunt egale cu 0.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elementele nenule din această matrice sunt p_{12} , p_{23} , p_{31} . Permutarea atașată acestei matrici este

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observați că avem corespondența dată de permutare, identică cu indicii elementelor nenule din matricea de permutare.

$$p_{12} = 1 \Rightarrow \alpha(1) = 2, p_{23} = 1 \Rightarrow \alpha(2) = 3, p_{31} = 1 \Rightarrow \alpha(3) = 1.$$

După ce vom introduce operațiile cu matrici vom descrie acțiunea matricilor de permutare asupra unei matrici oarecare.

5. Numim **matrice superior triunghiulară** o matrice care are toate elementele situate sub diagonala principală egale cu 0, de exemplu: $S = \begin{bmatrix} 45 & 23 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.

O matrice **inferior triunghiulară** este una cu elementele de deasupra diagonalei principale egale cu 0, de exemplu:

$$T = \begin{bmatrix} 45 & 0 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}.$$

Definiția 13.1. Numim urma unei matrici pătratice suma elementelor de pe diagonala principală a matricii. Urma matricii A se va nota TrA .

$$\text{Dacă } A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}; \quad TrA = 5 - 2 = 3.$$

13.2 Operații cu matrici

13.2.1 Adunarea a două matrici

Adunarea matricilor se definește doar pe matrici de aceeași dimensiune. Rezultatul acestei operații este o matrice care păstrează dimensiunea și se obține adunând elementele de pe pozițiile similare din cele două matrici.

$$A_{m,n} + B_{m,n} = C_{m,n} \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

De exemplu:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 23 \\ 11 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -5 \end{bmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 5+3 & 23+1 \\ 11+4 & -2-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 15 & -7 \end{bmatrix}$$

Adunarea matricilor este asociativă și comutativă având ca element neutru matricea nulă de aceeași dimensiune.

13.2.2 Înmulțirea unei matrici cu un scalar

Rezultatul acestei operații va fi o matrice de aceeași dimensiune cu matricea inițială și va avea fiecare element egal cu elementul corespunzător din matricea inițială înmulțit cu scalarul considerat.

$$\text{Dacă } A_{m,n} = [a_{ij}]_{m,n} \text{ atunci } \alpha A = [\alpha a_{ij}]_{m,n}$$

Exemplu:

$$\alpha = 2, \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \quad \alpha A = 2 \cdot A = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 14 & -4 \end{bmatrix}.$$

13.2.3 Înmulțirea a două matrici

Spunem că două matrici A și B pot fi înmulțite dacă numărul coloanelor matricii A este egal cu numărul liniilor din matricea B . Rezultatul acestei înmulțiri va fi o matrice C care va avea numărul liniilor egal cu numărul liniilor matricii A iar numărul coloanelor egal cu numărul coloanelor matricii B . Matricile $A_{m,n}$ și $B_{n,p}$ se înmulțesc după următoarea regulă:

$$A_{m,n} \cdot B_{n,p} = C_{m,p} \text{ cu } c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} \\ i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, p \quad (13.1)$$

Numim această regulă de înmulțire "linie pe coloană".

Exemple:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot 2 + 4 \cdot 5 \\ 5 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 & 5 \cdot 2 + (-1) \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 26 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow AB \in \mathcal{M}_{2,2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}; \quad \text{Atunci } A_{3,2} \cdot B_{2,3} = C_{3,3}.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 5 + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 & 3 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot 5 + (-1) \cdot 4 \\ 4 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 1 & 14 \\ 7 & 4 & 11 \\ 16 & 2 & 28 \end{bmatrix}.$$

13.3 Transpusa unei matrici

Considerăm o matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ de elemente a_{ij} . Definim **transpusa** lui A ca fiind matricea $A^T \in \mathcal{M}_{n,m}$ de elemente a_{ji} . Cu alte cuvinte matricea transpusă se obține din matricea A schimbând între ele liniile în coloane.

Exemplu:

$$\text{Dacă } A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{atunci } A^T = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Propoziția 13.1. *Transpusa unei matrici satisface relația de inversare a ordinii*

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Observația 13.1. *Produsul $A^T A$ este o matrice pătratică și se numește matrice Gram.*

13.4 Determinanți

Determinantul unei matrici pătratice A este un număr, notat $\det A$, asociat matricii astfel:

$$\text{Dacă } A \in \mathcal{M}_n \text{ atunci } \det A = \sum_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \quad (13.2)$$

În formula 13.2 sumarea se face după toate cele $n!$ permutări σ ale mulțimii $1, 2, \dots, n$ iar $\operatorname{sgn}(\sigma)$ este semnul permutării σ , $+$ sau $-$ după cum permutarea este pară sau impară. O permutare σ a mulțimii $1, 2, \dots, n$ se numește pară dacă numărul minim de schimbări între două elemente ale permutării astfel încât permutarea să devină permutarea identică este par. Altfel permutarea se spune că este impară. Dacă se schimbă $\operatorname{sgn}(\sigma)$ și considerăm acel coeficient mereu 1 obținem noțiunea de permanent al unei matrici.

$$\operatorname{per} A = \sum_{\sigma} \left(\prod_{i=1}^n a_{i\sigma(i)} \right).$$

Noțiunea de determinant implică asocierea unui fenomen multivariat, care este o matrice, a unui număr semnificativ și este o noțiune foarte importantă în matematică. Determinantul unei matrici de ordin n

se numește determinant de ordin n . Avem următoarele notații, de exemplu pentru o matrice de dimensiune 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

13.4.1 Calculul determinanților de ordin 1, 2 și 3

Formula 13.2 pentru calculul determinanților matricilor de dimensiune mai mare ca trei este foarte complicată. Vom da, pentru cazul general, o formulă inductivă pentru calculul determinanților și aplicarea ei o vom exemplifica pentru cazurile $n=1, 2, 3$.

Să considerăm pentru început cazul general al unei matrici de dimensiune n , $A \in \mathcal{M}_n$, $A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ pe care o vom nota simplu $A = [a_{ij}]$.

Notăm cu A_{ij} submatricea lui A obținută prin eliminarea din A a liniei i și a coloanei j . Matricea A_{ij} va fi o matrice de dimensiune $n-1$. Presupunem că știm să calculăm determinantul unei matrici de ordin $n-1$. Atunci:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \quad \forall i \text{ fixat} \quad (13.3)$$

sau

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}, \quad \forall j \text{ fixat}. \quad (13.4)$$

Formulele 13.3 și 13.4 se numesc formulele lui Laplace de dezvoltare a unui determinant după linia i , $i = 1, \dots, n$ (13.3) sau după coloana j , $j = 1, 2, \dots, n$ (13.4). Să exemplificăm formulele Laplace pentru cazurile $n = 1, 2, 3$. Avem:

1. Fie matricea de dimensiune 1, $A = [a_{11}]$. Cum determinantul este un număr ce caracterizează matricea este natural să luăm în acest caz

$$\det A = a_{11}.$$

2. Pentru o matrice de dimensiune doi avem: $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

- (a) Dezvoltarea după linia 1, de exemplu, se face astfel. Avem submatricile lui A , $A_{11} = [a_{22}]$ (obținută din A eliminând linia 1 și coloana 1) și, similar, $A_{12} = [a_{21}]$. Formula lui Laplace 13.3 spune că:

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12}$$

deci:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (13.5)$$

- (b) Să dezvoltăm determinantul după coloana a doua, de exemplu. Avem submatricile $A_{12} = [a_{21}]$ și $A_{22} = [a_{11}]$. Formula 13.4 ne conduce la

$$\det A = (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + (-1)^{2+2}a_{22}\det A_{22},$$

adică:

$$\det A = -a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (13.6)$$

Observația 13.2. Foarte important este să vedem că, fără a trece prin formulele lui Laplace, determinantul de ordin doi are o formulă de calcul foarte simplă și anume:

Dacă $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **atunci determinantul său este dat de produsul elementelor de pe diagonala principală minus produsul elementelor de pe diagonala secundară.**

3. Putem acum calcula un determinant de ordin 3.

Fie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. Vom calcula, pentru exemplificare cu formula Laplace, determinantul acestei matrici prin dezvoltare după prima linie. Avem pe rând:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

Similar avem:

$$A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

Formula lui Laplace ne dă

$$\det A = (-1)^{1+1}a_{11}\det A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}\det A_{12} + (-1)^{1+3}a_{13}\det A_{13}$$

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Folosind formula de calcul a determinanților de ordinul 2 și efectuând toate calculele obținem:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}. \end{aligned} \quad (13.7)$$

Observația 13.3. *Există două reguli simple de calcul al determinanților de ordin 3.*

(a) *Regula lui Sarrus.*

Se scrie determinantul lui A. Sub el se copiază primele două linii. Determinantul lui A se obține ca suma produselor elementelor de pe diagonalele descendente minus suma produselor elementelor de pe diagonalele ascendente.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13}$$

(b) *Regula triunghiului.*

La fel ca la regula lui Sarrus avem șase termeni formați cu produse de trei elemente, trei cărora nu le alterăm semnul și trei cărora le schimbăm semnul. Procedul este următorul: primii trei termeni sunt dați de produsul elementelor de pe diagonala principală plus produsele termenilor care reprezintă vârfurile triunghiurilor care au o latură paralelă cu diagonala principală iar cu minus avem produsul elementelor de pe diagonala secundară și produsele elementelor din vârfurile triunghiurilor care au o latură paralelă cu diagonala secundară. Schematic avem:

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

13.4.2 Proprietăți ale determinantilor

Fie A o matrice pătratică și $\det A$ determinantul său. Atunci:

1. Determinantul matricii A este egal cu determinatul matricii transpuse.

$$\det A = \det A^T.$$

De aici rezultă că toate proprietățile care implică linii ale matricii A rămân adevărate și pentru coloanele lui A .

2. Dacă o linie a matricii A este formată doar cu zerouri atunci determinantul lui A este zero.
3. Dacă în matricea A schimbăm două linii sau două coloane între ele determinantul schimbă semnul.
4. Dacă matricea A are două linii egale atunci determinantul său este 0. Proprietatea rezultă imediat din proprietatea 3.
5. Dacă înmulțim elementele unei linii a matricii A cu o constantă determinantul lui A se înmulțește cu acea constantă.

Atenție: O matrice se înmulțește cu un scalar înmulțind toate elementele ei cu acel scalar iar un determinant se înmulțește cu un scalar înmulțind elementele unei singure linii (sau ale unei singure coloane) cu acel scalar.

6. Dacă matricea A are două linii proporționale determinantul lui A este nul.
7. Dacă elementele unei linii a matricii A pot fi scrise ca suma a două elemente atunci determinantul lui A poate fi scris ca suma a doi determinanți.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

8. Dacă la o linie a matricii A adunăm elementele altei linii atunci determinantul noii matrici este chiar determinantul lui A .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + a_{31} & a_{22} + a_{32} & a_{23} + a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det B = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \det A + 0 = \det A.$$

9. Dacă o linie a matricii A este o combinație liniară a unor linii din matricea A atunci determinantul lui A este zero.

De exemplu, dacă $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ observăm că linia a treia este egală cu prima linie adunată cu de două ori linia a doua. Atunci $\det A = 0$.

10. Dacă A și B sunt două matrici pătratice atunci

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

13.5 Interpretarea geometrică a determinantilor de ordinul al doilea și al treilea

În plan, dacă considerăm punctele $O(0,0)$, $A(a_{11}, a_{12})$ și $B(a_{21}, a_{22})$ atunci modulul determinantului matricii $M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ este aria paralelogramului construit pe segmentele OA și OB .

În plan considerăm punctele $A(1,1)$ și $B(1,-1)$. Paralelogramul construit pe segmentele OA și OB este de fapt un pătrat cu latura $\sqrt{2}$, aria sa fiind 2. Determinantul construit cu coordonatele punctelor A și B este

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Modulul său este aria pătratului construit pe OA și OB .

În spațiu, considerăm punctele $O(0,0,0)$, $A(a_{11}, a_{12}, a_{13})$, $B(a_{21}, a_{22}, a_{23})$

și $C(a_{31}, a_{32}, a_{33})$. Atunci modulul determinantului matricii $M =$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$
 este egal cu volumul paralelipipedului construit pe segmentele OA , OB , OC . De exemplu, considerăm punctele $A(1, 1, 0)$, $B(0, 1, 1)$ și $C(1, 0, 1)$. Dacă dorim să calculăm volumul tetraedrului construit pe segmentele OA, OB, OC ne folosim de faptul că volumul tetraedrului menționat este a șasea parte din volumul paralelipipedului construit pe OA, PB, OC . Volumul paralelipipedului îl aflăm astfel: calculăm determinantul

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Volumul va fi 2 iar volumul tetraedrului va fi $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

13.6 Complementul algebric al unui element

Considerăm un determinant Δ de ordin n și a_{ij} elementul situat pe linia i și coloana j . Notăm cu δ_{ij} determinantul obținut din Δ prin suprimarea liniei i și a coloanei j . Numim complement algebric al elementului a_{ij} numărul γ_{ij} definit astfel:

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \delta_{ij}.$$

Exemplu:

Fie

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{vmatrix}, \quad a_{12} = 3, \quad \Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{5} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{3} \end{vmatrix} \quad \delta_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma_{12} = (-1)^{1+2} \Delta_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)(-3) = 3.$$

13.7 Dezvoltarea unui determinant după o linie sau o coloană

Fie Δ un determinant de dimensiune n . Calculul determinantului prin dezvoltarea după linia i este dată de:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} \gamma_{ij} = a_{i1} \gamma_{i1} + a_{i2} \gamma_{i2} + \dots + a_{in} \gamma_{in}$$

Exemplu:

Să dezvoltăm determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ după linia a doua.

Avem:

$$\Delta = a_{21}\gamma_{21} + a_{22}\gamma_{22} + a_{23}\gamma_{23} = (-1)^{2+1}a_{21}\delta_{21} + (-1)^{2+2}a_{22}\delta_{22} + (-1)^{2+3}a_{23}\delta_{23}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^5 \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= (-3)(1) + 2(9) + 0 = 15 \end{aligned}$$

Similar, avem posibilitatea să dezvoltăm un determinant după o coloană. Formula pentru dezvoltarea după coloana j , de exemplu, este:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij}\gamma_{ij} = a_{1j}\gamma_{1j} + a_{2j}\gamma_{2j} + \dots + a_{nj}\gamma_{nj}$$

Exemplu:

Să dezvoltăm același determinant $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ după prima coloană. Avem:

$$\Delta = a_{11}\gamma_{11} + a_{21}\gamma_{21} + a_{31}\gamma_{31} = (-1)^{1+1}a_{11}\delta_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}\delta_{21} + (-1)^{3+1}a_{31}\delta_{31}$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (-1)^2 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^3 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^4 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= 2 \cdot 4 + (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot (-10) = 15 \end{aligned}$$

13.8 Operații fundamentale cu liniile unei matrici

Există trei tipuri de operații fundamentale cu liniile unei matrici, schimbarea a două linii între ele, înmulțirea unei linii cu o constantă și adunarea la linia j a liniei i înmulțită cu o constantă. Aplicate succesiv matricii date, într-o ordine impusă de necesități, matricea va fi transformată într-o formă simplă, unică, folosită la rezolvarea sistemelor, calculul rangului matricii, determinarea, dacă e posibil, a inversei, calculul, dacă e posibil, al determinantului matricii. Schema de lucru pentru obținerea acestei forme a matricii se numește reducere în treaptă relativ la coloană notată RTC. Trebuie menționat că RTC este instabilă la calcule. Cele trei operații menționate vor fi rezultatul

înmulțirii la stânga a matricii date cu matrici specifice fiecărei operații. Aceste matrici se obțin din matricea unitate în care se efectuează operația menționată. Matricea unitate de la care se pleacă are dimensiunea egală cu numărul de linii ale matricii considerate.

13.8.1 Schimbarea a două linii între ele

Fie $A \in \mathcal{M}_{n,m}$. Schimbarea liniilor i și j între ele se realizează cu ajutorul unei matrici de transformare care pornește de la I_n și în care schimbăm liniile i și j între ele. Simbolic transformarea o vom descrie $T = \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}$. Matricea de transformare T va fi, de exemplu, dacă dorim schimbarea liniei a doua cu linia a treia într-o matrice din $\mathcal{M}_{3,m}$:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Să aplicăm matricea de transformare T asupra matricii

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$$TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Atenție: Înmulțirea matricilor nu este comutativă. Operația AT are ca rezultat schimbarea între ele a coloanelor a doua și a treia în ma-

tricea A . (Verificați!). La fel, dacă $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ atunci

$$TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Atenție: Înmulțirea BT nici nu poate fi efectuată.

13.8.2 Înmulțirea unei linii cu un scalar

Considerăm o matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ în care dorim ca linia i să fie înmulțită cu scalarul α . Și în acest caz matricea de transformare T va fi obținută din matricea unitate de ordin n în care pe poziția t_{ii} vom

avea valoarea α . Simbolic notăm această transformare cu $T = \xrightarrow{L_i = \alpha L_i}$. Să presupunem că, pentru o matrice cu trei linii și n coloane, dorim să înmulțim prima linie cu valoarea α . Atunci matricea de transformare este

$$T = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Să aplicăm matricea de transformare T asupra matricii

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$$TA = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La fel, dacă $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ atunci

$$TB = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 3\alpha & 4\alpha \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

13.8.3 Adunarea la linia j a liniei i înmulțită cu un scalar

Fie $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ în care dorim să adunăm la linia j linia i înmulțită cu un scalar α . Matricea de transformare T o vom obține din matricea unitate I_n care va avea în plus elementul $t_{ji} = \alpha$. Simbolic notăm transformarea cu $T = \xrightarrow{L_j = L_j + (\alpha)L_i}$. Dăm exemplu de matrice de transformare tot de ordin trei. Să presupunem că la o matrice cu trei linii și n coloane dorim ca la linia 1 să adunăm linia 3 înmulțită cu 4. Atunci în matricea unitate de ordin trei punem elementul $t_{13} = 4$.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicăm matricea de transformare T asupra matricii

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

$$TA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} + 4a_{31} & a_{12} + 4a_{32} & a_{13} + 4a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

La fel, dacă $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$ atunci

$$TB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 37 & 42 & 47 & 52 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}.$$

13.9 Reducerea în treaptă relativ la coloane

Unei matrici oarecare din $\mathcal{M}_{n,m}$ îi corespunde o unică matrice care reprezintă forma ei canonică și care poate fi obținută printr-o secvență de operații fundamentale cu liniile matricii. Procedul se numește *reducere în treaptă relativ la coloane (RTC)*. De menționat că secvența de transformări care conduce la forma canonică nu este unică.

Definiția 13.2. *Forma canonică a unei matrici este definită prin următoarele condiții:*

- Orice linie ce nu este formată numai cu zerouri are primul element nenul, socotit de la stânga la dreapta, egal cu 1.*
- Toate elementele coloanei acestui 1 sunt 0.*
- Toate liniile care conțin numai zerouri sunt trecute ultimele.*
- Pentru orice linie i , primul element nenul de pe linia $i+1$ se găsește la dreapta primului element nenul de pe linia i .*

Să dăm un exemplu de determinare a redusei în treaptă relativ la coloane a unei matrici $M \in \mathcal{M}_{3,4}$. Fie

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Liniile matricii M le notăm de sus în jos iar coloanele de la stânga la dreapta. Condiția *a)* din definiția 13.2. cere ca primul element nenul de pe prima linie să fie 1, condiție îndeplinită din cum a fost dată matricea. Algoritmul RTC impune ca toate celelalte elemente de pe coloana acestui 1 să fie 0. Acest lucru îl obținem adunând la linia 2 linia 1 înmulțită cu -1 cu alte cuvinte scăzând prima linie din linia a doua. Scriem acest lucru așa $L_2 = L_2 + (-1)L_1$ adică noua linie 2 este vechea linie 2 la care adunăm linia 1 înmulțită cu -1. Obținem:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=L_2+(-1)L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Observăm că obținem o matrice care are îndeplinită condiția *b)* din definiția 13.2. Trecem la linia a doua pentru a relua algoritmul. Primul element nenul de pe această linie se află în dreapta primului element 1 de pe prima coloană și este -1. Cerința este ca acest element să fie 1 așa că vom înmulți linia a doua cu -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2=(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Trecem la pasul următor și facem zero elementele de pe coloana acestui 1 începând cu cel de deasupra. Noua linie 1 o vom obține din vechea linie 1 la care adăugăm linia a doua înmulțită cu -1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1=L_1+(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Aplicăm în continuare transformarea care face ca elementul de dedesubtul lui 1 să fie zero.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3=L_3+(-1)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

Am terminat transformările și pentru linia a doua. Trecând la linia a treia observăm că primul element nenul de pe această linie este 2. Cum metoda cere ca să avem acolo 1 vom aplica transformarea care înmulțește linia a treia cu $\frac{1}{2}$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 = \frac{1}{2}L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Vom face în continuare zerouri celelalte elemente de pe coloana acestui 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + (-1)L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Secvența se termină făcând zero și elementul de pe linia a doua și coloana treia.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Am obținut că

$$RTC(M) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Să scriem acum, pe rând, transformările care ne-au dus la rezultatul final. Prima transformare face ca la linia 2 să adunăm linia 1 înmulțită cu -1. Asta înseamnă că transformarea o vom obține din matricea identitate de ordin trei în care vom plasa -1 pe linia 2 și coloana 1.

$$T_1 = \xrightarrow{L_2 = L_2 + (-1)L_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A doua transformare înmulțește linia a doua cu -1. Ea se obține din matricea unitate de ordin trei înlocuind elementul de pe poziția 2,2 cu -1.

$$T_2 = \xrightarrow{L_2 = (-1)L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Similar obținem

$$T_3 = \xrightarrow{L_1 = L_1 + (-1)L_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T_4 = \xrightarrow{L_3=L_3+(-1)L_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T_5 = \xrightarrow{L_3=\frac{1}{2}L_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

$$T_6 = \xrightarrow{L_1=L_1+(-1)L_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$T_7 = \xrightarrow{L_2=L_2+L_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$RTC(M) = T_7 T_6 T_5 T_4 T_3 T_2 T_1 M \quad (13.8)$$

Reducerea în treaptă relativ la coloane cu ajutorul MATLAB are doar două instrucțiuni.

Exemplu de RTC(A) cu softul MATLAB

```
>> M=[1,1,3;1,2,1;2,3,4]
```

```
M =
```

```

1      1      3
1      2      1
2      3      4
```

```
>> rref(M)
```

```
ans =
```

```

|
1      0      5
0      1     -2
0      0      0
```

Fig. 13.1: RTC(M)

13.10 Inversa unei matrici

Considerăm o matrice $A \in \mathcal{M}_n$. Numim **inversa matricii** A , dacă există, o matrice pe care o notăm cu A^{-1} care are proprietatea că

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

În acest caz spunem că matricea A este inversabilă.

Propoziția 13.2. *Matricea pătratică A este inversabilă dacă și numai dacă determinantul ei este diferit de zero.*

Pentru a determina inversa unei matrici A procedăm astfel:

- calculăm determinantul său care trebuie să fie diferit de zero;
- considerăm A^T , transpusa matricii A ;
- în matricea transpusă înlocuim fiecare element cu complementul său algebric.

$$\gamma_{ij} = (-1)^{i+j} \delta_{ij}$$

unde δ_{ij} este determinantul obținut din A^T eliminând linia i și coloana j . Obținem astfel o matrice notată A^* , numită adjuncta matricii A .

- inversa matricii A va fi

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*. \quad (13.9)$$

13.11 Inversarea matricilor de ordin doi și trei

13.11.1 Inversa unei matrici de ordin 2

Fie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Verificăm dacă $\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$ caz în care putem determina inversa.

Considerăm transpusa matricii $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Determinăm matricea adjunctă

$$\gamma_{11} = (-1)^{1+1}a_{22}; \quad \gamma_{12} = (-1)^{1+2}a_{12}; \quad \gamma_{21} = (-1)^{2+1}a_{21};$$

$$\gamma_{22} = (-1)^{2+2}a_{11}.$$

$$A^* = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Observația 13.4. Adjuncta unei matrici de ordinul al doilea se obține foarte ușor astfel:

- pe diagonala principală a matricii A se schimbă elementele între ele;
- pe diagonala secundară elementele se păstrează dar li se schimbă semnul.

Inversa matricii A va fi:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \quad (13.10)$$

Exemplu:

Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Avem:

$$\det A = 3, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \gamma_{11} = 5, \quad \gamma_{12} = -1, \quad \gamma_{21} = -2, \quad \gamma_{22} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Se verifică imediat că $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

13.11.2 Inversa unei matrici de ordin 3

Algoritmul de lucru pentru calculul inversei fiind același dăm în continuare doar un exemplu.

Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Avem pe rând:

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = 13.$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\delta_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \delta_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \delta_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\delta_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \delta_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \delta_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\delta_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \delta_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \delta_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\delta_{11} & (-1)^{1+2}\delta_{12} & (-1)^{1+3}\delta_{13} \\ (-1)^{2+1}\delta_{21} & (-1)^{2+2}\delta_{22} & (-1)^{2+3}\delta_{23} \\ (-1)^{3+1}\delta_{31} & (-1)^{3+2}\delta_{32} & (-1)^{3+3}\delta_{33} \end{bmatrix}$$

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -2 \\ -3 & 6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} & \frac{4}{13} \\ \frac{6}{13} & \frac{1}{13} & -\frac{2}{13} \\ -\frac{3}{13} & \frac{6}{13} & \frac{1}{13} \end{bmatrix}$$

Se verifică imediat că

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_3.$$

13.12 Alte metode de aflare a inversei unei matrici

13.12.1 Inversarea folosind teorema Hamilton Cayley

Definiția 13.3. Fie $A \in \mathcal{M}_n$. Numim ecuație caracteristică a matricii A ecuația:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0. \quad (13.11)$$

Dezvoltând determinantul și grupând după puterile lui λ ecuația devine de forma:

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (13.12)$$

Observația 13.5. Coeficienții acestei ecuații pot fi determinați și fără a dezvolta determinantul 13.11 astfel:

$$a_0 = (-1)^n, \quad a_1 = (-1)^{n-1} \text{Tr}(A),$$

.. $a_i = (-1)^{n-i}$. suma subdeterminanților de ordin i cu diagonală pe diagonală principală a lui A ,

$$\dots a_n = \det A.$$

Exemplu: Să considerăm matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Calculăm ecuația caracteristică a matricii A conform definiției și obținem:

$$\det(A - \lambda I_3) = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 2 - \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0;$$

Ecuția caracteristică va fi

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 = 0.$$

Să determinăm această ecuație conform observației 13.5. În ecuația 13.12 avem $n = 3$. Atunci $a_0 = (-1)^3$, $a_1 = \text{Tr}(A) = 1 + 2 + 1 = 4$. Pentru a determina pe a_2 trebuie să vedem care sunt subdeterminanții de ordin doi ai lui $\det A$ care au diagonală principală pe diagonală principală a lui A . Avem trei astfel de determinanți d_1 cu diagonală principală a_{11}, a_{22} , $d_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2$, subdeterminantul d_2 cu diagonală principală a_{11}, a_{33} , $d_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3$ și subdeterminantul de diagonală a_{22}, a_{33} , $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Coeficientul al treilea este $a_2 = (-1)^1(d_1 + d_2 + d_3) = 1$. Coeficientul a_3 este chiar determinantul lui A deci este -4.

Ecuția astfel determinată este tot

$$-\lambda^3 + 4\lambda^2 + \lambda - 4 = 0$$

Teorema 13.1. (Teorema Hamilton Cayley) Matricea $A \in \mathcal{M}_n$ își verifică ecuația caracteristică 13.12 adică:

$$a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n = 0_n \quad (13.13)$$

unde 0_n este matricea de ordin n care are toate elementele 0.

Dacă $a_n = \det A \neq 0$ atunci A^{-1} există. Înmulțim la stânga relația 13.13 cu A^{-1} și obținem:

$$A^{-1}(a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \dots + a_{n-1} A + a_n I_n) = A^{-1} 0_n$$

deci

$$a_0 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I_n + a_n A^{-1} = 0_n$$

De aici exprimăm pe A^{-1} obținând această inversă ca o sumă de puteri ale lui A .

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_n} (a_0 A^{n-1} + a_1 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} I_n) \quad (13.14)$$

Exemplu: Să determinăm cu ajutorul teoremei Hamilton Cayley inversa matricii $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Avem pe rând:

$$\det(A - \lambda I_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Folosind 13.5. obținem ecuația caracteristică a matricii A :

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det A = 0.$$

Matricea A își verifică ecuația caracteristică, deci:

$$A^2 - \text{Tr}(A)A + \det A I_2 = 0_2. \quad (13.15)$$

Presupunem ca $\det A \neq 0$ deci că există matricea A^{-1} . Înmulțim la stânga identitatea 13.15 cu A^{-1} . Rezultă:

$$A^{-1} (A^2 - \text{Tr}(A)A + \det A \cdot I_2) = 0_2. \Rightarrow$$

$$A - \text{Tr}(A)I_2 + \det A \cdot A^{-1} = 0_2.$$

De aici avem:

$$A^{-1} = -\frac{1}{\det A} (A - \text{Tr}(A)I_2)$$

și efectuând calculele rezultă

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}.$$

13.12.2 Inversarea prin partiționare pentru o matrice de ordin doi

,

Pentru a înțelege mai ușor procedeul vom face întâi inversarea unei matrici de ordin doi rezolvând direct sistemul $AA^{-1} = I_2$.

Considerăm o matrice $A \in \mathcal{M}_2$ de determinant nenul $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

și inversa sa $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ unde x, y, z, t sunt necunoscute.

$$AA^{-1} = I_2 \Rightarrow \begin{cases} ax + bz = 1 \\ ay + bt = 0 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases}$$

Presupunem, fără a restrânge generalitatea, că $a \neq 0$. Procedoul rămâne același dacă $b \neq 0$. Evident că a și b nu pot fi simultan zero pentru că atunci determinantul lui A ar fi zero.

Înmulțim prima ecuație din sistem cu a^{-1} . Avem:

$$a^{-1} \cdot | \quad ax + bz = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{a}ax + \frac{1}{a}bz = \frac{1}{a}$$

deci

$$x + \frac{b}{a}z = \frac{1}{a}$$

De aici îl exprimăm pe x și obținem

$$x = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}z.$$

Cu x astfel exprimat venim în ecuația a treia

$$cx + dz = 0 \Rightarrow \frac{c}{a} - \frac{bc}{a}z + dz = 0.$$

Schimbăm semnul relației, dăm pe z factor comun, trecem pe $-\frac{c}{a}$ în membrul drept și rezultă

$$\left(\frac{bc}{a} - d\right)z = \frac{c}{a}.$$

Aducem în paranteză la același numitor

$$\frac{bc - ad}{a}z = \frac{c}{a}$$

Dar $bc - ca = -\det A \neq 0$ și putem împărți cu el obținând pe z

$$z = \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{bc - ad} = -\frac{c}{ad - bc} = -\frac{c}{\det A}$$

Cu valoarea lui z determinată putem să îl obținem și pe x .

$$x = \frac{1}{a} - \frac{b}{a}z = \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{ad - bc}$$

Numitorul comun este $a(ad - bc)$. Aducem la același numitor și avem

$$x = \frac{ad - bc + bc}{a(ad - bc)} = \frac{ad}{a(ad - bc)}$$

Simplificăm cu a rezultând

$$x = \frac{d}{ad - bc} = \frac{d}{\det A}.$$

Procedând identic ca la aflarea lui x și z , din liniile 2 și 4 ale sistemului determinăm pe y și pe t . Rezultă:

$$y = -\frac{b}{ad - bc} = -\frac{b}{\det A} \quad \text{și} \quad t = \frac{a}{ad - bc} = \frac{a}{\det A}.$$

Obținem astfel inversa matricii A ca fiind $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

13.12.3 Inversarea prin partiționare pentru o matrice de ordin trei

Procedeul de inversare prin partiționare pentru o matrice $A \in \mathcal{M}_3$ este:

Fie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ pe care o partiționăm în blocuri, de exemplu, astfel:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right] \stackrel{\text{not.}}{=} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Blocurile din partiționare sunt în acest caz

$$a \in \mathcal{M}_2, \quad a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad b \in \mathcal{M}_{2,1}, \quad b = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{bmatrix}$$

$$c \in \mathcal{M}_{1,2}, \quad c = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}, \quad d = [a_{33}].$$

Presupunem că matricea A este inversabilă și mai știm că a este inversabilă având inversa a^{-1} . Procedeul este același cu cel de la cazul matricii de ordin 2 numai că de data aceasta nu mai lucrăm cu numere ci cu matrici. Considerăm matricea A^{-1} partiționată în același mod cu matricea A , $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$ Tehnica de lucru este aceeași ca și

în cazul matricilor de dimensiune doi cu diferența că acum avem de a face cu matrici deci înmulțirea nu mai este comutativă și $a^{-1} \neq \frac{1}{a}$.

$$AA^{-1} = I_3 \Rightarrow \begin{cases} ax + bz = I_2 \\ ay + bt = 0_2 \\ cx + dz = 0 \\ cy + dt = 1 \end{cases} \quad (13.16)$$

Plecăm de la ipoteza că știm inversa matricii a . Atunci procedeul ne va conduce la inversarea lui A doar cu adunări și înmulțiri de matrici. Înmulțim prima ecuație a sistemului 13.16 cu a^{-1} și explicităm pe x .

$$a^{-1} \cdot |ax + bz = I_2 \Rightarrow x + a^{-1}bz = a^{-1} \Rightarrow x = a^{-1} - a^{-1}bz.$$

Cu x astfel determinat venim în ecuația a treia, îl înlocuim și de acolo aflăm pe z .

$$c(a^{-1} - a^{-1}bz - dz) = 0_2 \Rightarrow ca^{-1} - ca^{-1}bz + dz = 0_2$$

Schimbăm semnul și dăm factor comun pe z

$$-ca^{-1} + (ca^{-1}b - d)z = 0_2 \Rightarrow (ca^{-1}b - d)z = ca^{-1}$$

Coeficientul lui z este un număr nenul și astfel îl putem afla pe z și implicit pe x .

$$z = (ca^{-1}b - d)^{-1}ca^{-1} \quad x = a^{-1} - a^{-1}b(ca^{-1}b - d)^{-1}ca^{-1}$$

Pentru a afla pe y și t înmulțim ecuația a doua din sistemul 13.16 cu a^{-1} și îl explicităm pe y .

$$a^{-1} \cdot |ay + bt = 0_2; \quad y + a^{-1}bt = 0_2 \Rightarrow y = -a^{-1}bt$$

Pe y astfel determinat îl înlocuim în ecuația a patra, îl aflăm pe t și implicit rezultă și y .

$$-ca^{-1}bt + dt = 1; \quad (ca^{-1}b - d)t = -1; \quad t = -(ca^{-1}b - d)^{-1};$$

$$y = a^{-1}b(ca^{-1}b - d)^{-1}.$$

Exemplu:

Să determinăm prin partiționare inversa matricii $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Determinantul lui A este egal cu 1, deci inversa ei există. Partiționăm matricea după modelul prezentat teoretic

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

unde

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad c = [1 \ 1]; \quad d = 0.$$

Avem:

$$\det a = -1; \quad a^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad a^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculăm ca^{-1} , $a^{-1}b$, $ca^{-1}b$.

$$ca^{-1} = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = [1 \ 0]; \quad a^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$ca^{-1}b = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1.$$

$$(ca^{-1}b - d)^{-1} = 1$$

$$a^{-1}b(ca^{-1}b - d)^{-1}ca^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \ 0] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Avem acum toate componentele calculate pentru a afla x , y , z , t .

$$x = a^{-1} - a^{-1}b(ca^{-1}b - d)^{-1}ca^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix};$$

$$y = a^{-1}b(ca^{-1}b - d)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$z = (ca^{-1}b - d)^{-1}ca^{-1} = [1 \ 0]$$

$$t = -(ca^{-1}b - d)^{-1} = -1.$$

Atunci:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Se verifică ușor că $AA^{-1} = A^{-1}A = I_3$.

13.13 Inversarea matricilor prin RTC

Se poate determina inversa unei matrici pătratice nesingulare și utilizând numai operații fundamentale cu liniile ei. Dăm exemplu unei matrici de dimensiune 2. Fie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$. Presupunem fără a restrânge generalitatea că $a_{11} \neq 0$.

Facem ca primul element nenul de pe prima linie să devină 1 înmulțind prima linie a matricii A cu $\frac{1}{a_{11}}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = \frac{1}{a_{11}} L_1} \begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Transformarea T_1 este

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (13.17)$$

Aplicăm transformarea care va face ca în locul lui a_{21} să avem 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12}/a_{11} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_2 + (-a_{21})L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

În consecință, transformarea T_2 va fi

$$T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \quad (13.18)$$

Următorul pas cere ca primul element nenul de pe linia a doua să fie 1. Deci

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & \frac{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}}{a_{11}} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 = \frac{a_{11}}{a_{22}a_{11} - a_{21}a_{12}} L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformarea T_3 va fi

$$T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \quad (13.19)$$

La ultimul pas vom face elementul de pe poziția (1,2) egal cu 0.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 = L_1 + \left(-\frac{a_{12}}{a_{11}}\right)L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Transformarea T_4 este

$$T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (13.20)$$

Avem astfel

$$RTC(A) = T_4 T_3 T_2 T_1 A = I_2$$

și de aici tragem concluzia că

$$T_4 T_3 T_2 T_1 = A^{-1}$$

Adică

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{a_{11}}{a_{12}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a_{21} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{a_{22}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & -\frac{a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} & \frac{a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplu:

Fie matricea $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ Calculăm inversa matricii A cu ajutorul transformărilor date de formulele 13.17-13.20 Avem

$$T_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad T_4 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

și

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Putem face inversarea unei matrici prin reducere în treaptă relativ la coloane pornind de la matricea concatenată $M = [A|I_n]$. Dacă în urma procedurii de reducere în treaptă relativ la coloană obținem o matrice de forma $M_1 = [I_n|B]$ atunci matricea B este chiar inversa matricii A . Acest lucru se observă imediat pornind de la faptul că dacă avem matricea A nesingulară atunci $RTC(A) = I_n$ deci există transformările $T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 A = I_n$. Rezultă că produsul acelor transformări este chiar A^{-1} deci

$$T_k T_{k-1} \dots T_2 T_1 [A|I_n] = [I_n|A^{-1}]$$

13.14 Linii, coloane liniar independente

Considerăm o matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ și $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$. Notăm liniile matricii A cu $l_1, l_2, \dots, l_n$.

Definiția 13.4. *Spunem că liniile $l_{i_1}, l_{i_2}, \dots, l_{i_k}$ sunt liniar independente dacă oricare ar fi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ astfel încât*

$$\alpha_1 l_{i_1} + \alpha_2 l_{i_2} + \dots + \alpha_k l_{i_k} = 0$$

să rezulte că

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0.$$

În caz contrar spunem că liniile sunt liniar dependente.

Definim similar liniar independența unei mulțimi de coloane.

Definiția 13.5. *Coloanele $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_k}$ spunem că sunt liniar independente dacă oricare ar fi scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ astfel încât*

$$\alpha_1 c_{i_1} + \alpha_2 c_{i_2} + \dots + \alpha_k c_{i_k} = 0$$

să rezulte că

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_k = 0.$$

În caz contrar spunem că acele coloane sunt liniar dependente.

Observația 13.6. ‘

1. Orice linie nenulă a unei matrici este liniar independentă.
2. Orice două linii proporționale sunt liniar dependente.
3. Orice coloană nenulă este liniar independentă.
4. Orice două coloane proporționale sunt liniar dependente.

13.15 Rangul unei matrici oarecare

Definiția 13.6. Numim minor de ordin k al matricii $A \in \mathcal{M}_{n,m}$, $k \leq \min(n, m)$ determinantul format cu elementele matricii aflate la intersecția a k linii diferite și a k coloane diferite.

Exemple:

Fie matricea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$.

1. a_{11}, a_{31}, a_{23} sunt exemple de minori de ordin 1.
2. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$ sunt unii dintre minori de ordin doi.
3. $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ este singurul minor de ordin trei.

Definiția 13.7. Fie matricea $A \in \mathcal{M}_{n,m}$. Numim rangul matricii A ordinul celui mai mare minor nenul din matrice.

Propoziția 13.3. O matrice are rangul k dacă și numai dacă ea are maxim k linii liniar independente.

Propoziția 13.4. Matricea A și matricea sa transpusă, A^T , au același rang.

O consecință a acestei propoziții este că o matrice are rangul k dacă în ea există maxim k coloane liniar independente.

Propoziția 13.5. Operațiile elementare cu liniile unei matrici nu modifică rangul matricii obținute. Astfel

$$\text{rang} A = \text{rang}(RTC(A)) = \text{numărul de linii nenule din } RTC(A).$$

Teorema 13.2. Fie $A \in \mathcal{M}_{n,m}$ o matrice. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Rangul matricii A este k .
2. Există în A un minor nenul, de ordin k și toți minorii de ordin $k+1$ sunt nuli.

Teorema 13.3. Dacă A este o matrice $m \times n$, avem că $\text{rang}(A^T A) = \text{rang} A$ și $\text{rang}(A A^T) = \text{rang} A$.

Teorema 13.4. Dacă A este o matrice de dimensiune m , C este o matrice de dimensiune n , $\det A \neq 0$, $\det C \neq 0$ și B este o matrice de dimensiune $m \times n$ atunci

$$\text{rang} AB = \text{rang} BC = \text{rang} ABC = \text{rang} B.$$

Teorema ne spune că rangul nu se schimbă dacă înmulțim o matrice la stânga sau la dreapta cu o matrice nesingulară.

Determinarea rangului unei matrici

O primă metodă este reducerea în treaptă relativ la coloană a matricii și numărarea liniilor nenule.

Altfel, de exemplu, pentru matrici pătratice de dimensiune trei procedăm astfel: presupunem că $a_{11} \neq 0$ și căutăm un determinant de ordin doi care conține pe a_{11} și e diferit de 0. Dacă găsim un astfel de determinant atunci rangul matricii este cel puțin doi. Calculăm determinantul matricii și dacă este diferit de zero rangul este trei altfel rangul este doi.

Exemple:

1. Fie $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Elementul $a_{11} = 2 \neq 0$.
0. Trecem la minori de ordin 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \text{ deci rangul matricii } A \text{ este cel puțin doi.}$$

Determinantul lui A este zero și în acest caz rangul matricii A este doi.

2. Considerăm matricea $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

Observăm că $a_{11} = 1 \neq 0$ și deci trecem la minori de ordin 2.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{14} \\ a_{21} & a_{24} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Am găsit un minor de ordin doi diferit de zero. Trecem la minorii de ordin trei și dintre ei trebuie să alegem pe cel care conține minorul nenul deci îl alegem pe

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

pentru că primele două coloane sunt liniar dependente. Și ceilalți doi minori de ordin trei sunt nuli (au câte două coloane proporționale deci liniar dependente). Rezultă că rangul matricii A este doi.

Exemplu referitor la teorema 13.3.:

Fie $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Atunci:

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 13 \end{bmatrix}$$

Observăm că $\text{rang} A = 2$, $\text{rang} A^T = 2$, $\text{rang} AA^T = 2$. Pentru determinarea rangului lui $A^T A$ considerăm minorul $\delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Determinantul matricii $A^T A$ este 0 deci rangul lui $A^T A$ este tot 2.

13.16 Sisteme liniare

O expresie de forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

poartă numele de **ecuație liniară cu n necunoscute**. Elementele $a_1, a_2, \dots, a_n$ sunt coeficienții ecuației, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sunt necunoscutele iar b este termenul liber. Dacă avem simultan m ecuații liniare cu n

necunoscute spunem că avem un sistem liniar $m \times n$.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (13.21)$$

Totalitatea coeficienților ecuațiilor din sistem, necunoscutele și termenii liberi pot fi scrise matricial astfel:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Putem obține astfel forma matricială a sistemului 13.21

$$AX = B \quad \text{unde} \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}, \quad X \in \mathcal{M}_{n,1}, \quad B \in \mathcal{M}_{m,1}.$$

Matricea care se obține prin concatenarea matricii A cu matricea B

$$(A|B) \stackrel{not.}{=} \tilde{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

se va numi **matricea extinsă** a matricii A .

Exemplu:

Sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 5 \end{cases}$$

este un sistem cu 2 ecuații și patru necunoscute. Matricea sistemului, termenul liber și matricea extinsă sunt:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 2 & 2 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

Dacă B este matricea nulă atunci sistemul se numește **sistem liniar omogen**.

O mulțime ordonată $\bar{S} = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$ se numește soluție a sistemului 13.21 dacă înlocuind în fiecare ecuație a sistemului pe x_i cu $\bar{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, toate ecuațiile sunt verificate.

Definiția 13.8.

1. Dacă sistemul are cel puțin o soluție el se numește sistem compatibil.
2. Dacă soluția este unică sistemul se numește compatibil determinat.
3. Dacă sistemul are cel puțin două soluții distincte (de fapt are o infinitate de soluții) sistemul se numește compatibil nedeterminat.
4. Dacă sistemul nu are soluție el se numește incompatibil.

Observația 13.7. Sistemele liniare omogene sunt întotdeauna compatibile. Problema în cazul lor se pune dacă sunt determinate sau nedeterminate.

Exemple:

1. Următorul sistem este compatibil determinat

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{cases}$$

El admite soluția unică $x_1 = 2, \quad x_2 = 1$.

2. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

Observăm că sistemul are două ecuații și trei necunoscute. Pornim de la două egalități, ecuațiile sistemului, și trebuie să ajungem la 3 egalități, scrierea soluțiilor, ($x_1 = \dots, x_2 = \dots, x_3 = \dots$) ceea ce ne conduce la concluzia că dacă acest sistem este compatibil el este compatibil nedeterminat. Fără a detalia, sistemul din acest exemplu este compatibil. În rezolvarea sa, vom considera o necunoscută ca fiind un parametru real α și vom rezolva sistemul obținând soluțiile depinzând de acel parametru. Vom spune că sistemul este compatibil unu nedeterminat. Dacă luăm $x_3 = \alpha$ soluția sa va fi $x_1 = 2 - \frac{3}{4}\alpha, \quad x_2 = 1 + \frac{1}{\alpha}$.

3. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ 2x_1 + 2x_2 = 9 \end{cases}$$

Se observă că acest sistem este incompatibil, pentru compatibilitate ar trebui ca ecuația a doua să fie $2x_1 + 2x_2 = 10$, de exemplu.

13.16.1 Rezolvarea sistemelor liniare

Înainte de a prezenta diferite metode de rezolvare a sistemelor liniare vom da teoremele care ne descriu condițiile în care un sistem este compatibil determinat sau nedeterminat ori este incompatibil.

Teorema 13.5. (*Kroneker-Capelli*). *Considerăm un sistem liniar cu n necunoscute care sub forma matricială este $AX = B$. Atunci:*

1. *Dacă rangul matricii A este strict mai mic decât rangul matricii extinse $\tilde{A} = (A|B)$ sistemul este incompatibil.*
2. *Dacă rangul matricii A este egal cu rangul matricii extinse $\tilde{A}$ și $\text{rang} A = r < n$ sistemul este compatibil $n - r$ nedeterminat.*
3. *Dacă rangul matricii A este egal cu rangul matricii $\tilde{A}$ și este egal și cu numărul de necunoscute n , atunci sistemul este compatibil determinat.*

Pentru sistemele omogene unde avem întotdeauna soluția nulă, discuția rămâne doar pentru cazurile de nedeterminare.

Propoziția 13.6. *În cazul sistemelor omogene avem:*

- a) *Dacă $\text{rang} A = r = n$ sistemul este compatibil determinat.*
- b) *Dacă $\text{rang} A = r < n$ sistemul este compatibil $n - r$ nedeterminat având și soluții nenule.*

În particular, dacă matricea A este pătratică atunci:

- c) *sistemul este compatibil determinat dacă și numai dacă $\det A \neq 0$. În acest caz singura soluție este cea banală.*
- d) *Sistemul este compatibil nedeterminat dacă și numai dacă $\det A = 0$. ■*

Considerăm sistemul

$$AX = B, \quad A \in \mathcal{M}_{m,n}, \quad B \in \mathcal{M}_{m,1}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Presupunem că rangul matricii A este r . Considerăm un minor de ordin r nenul. Acest determinant se va numi determinant sau minor

principal. Ecuatiile care au coeficienți în acest determinant se numesc ecuații principale iar celelalte ecuații se numesc ecuații secundare. Necunoscutele cu coeficienți în determinantul principal se numesc necunoscute principale, celelalte sunt necunoscute secundare. Dacă $r < m$ considerăm toți determinanții obținuți prin bordarea minorului principal cu coeficienții necunoscutelor principale dintr-o ecuație secundară și termenii liberi corespunzători. Acești determinanți se vor numi determinanți caracteristici.

Teorema 13.6. *Sistemul liniar $AX = B$ este compatibil dacă și numai dacă toți determinanții caracteristici sunt nuli. Dacă nu există determinanți caracteristici sistemul este compatibil.*

Exemplu: Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x + 3y + 4z = 4 \\ 3x + 5y + 7z = 3 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad \det A = 0.$$

Detreminantul principal îl putem alege

$$d_p = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Necunoscutele principale vor fi x, y iar ecuațiile principale vor fi prima și a doua. Avem un singur minor caracteristic

$$\det_{car} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Sistemul este incompatibil.

13.16.2 Metode de rezolvare și discuția sistemelor liniare

Considerăm pentru început că numărul de necunoscute este egal cu numărul de ecuații asta însemnând că matricea A este pătratică.

Metoda matricială

Fie sistemul $AX = B$ cu $A \in \mathcal{M}_n$. Calculăm $\det A$ și dacă este diferit de 0 știm că există A^{-1} , inversa matricii A . Calculăm această inversă și apoi înmulțim sistemul la stânga cu ea.

$$A^{-1}|AX = B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

determinând astfel soluția.

Exemplu:

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x + 5y = 12 \end{cases}$$

Avem

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix};$$

$$\det A = 1 \neq 0; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

De aici găsim soluția

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Regula lui Cramer

Rămânem în contextul în care matricea sistemului, A , este pătratică. Dacă determinantul ei este nenul atunci cu regula lui Cramer putem să determinăm soluția sistemului care este unică. Vom face următoarea notație: Dacă avem o matrice $A \in \mathcal{M}_n$ ale cărei coloane le notăm cu $a_1, a_2, \dots, a_n$ și avem și matricea coloană $c \in \mathcal{M}_{n,1}$ atunci matricea $A_{i \leftarrow c}$ este matricea provenită din matricea A în care înlocuim coloana i cu matricea coloană c .

Exemplu:

Considerăm matricile

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}; \quad c = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}; \quad \text{și} \quad i = 2.$$

Atunci

$$A_{2 \leftarrow c} = \begin{bmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 2 & 20 & 4 \\ 3 & 30 & 7 \end{bmatrix}.$$

Fie sistemul liniar

$$AX = B \quad \text{cu} \quad A \in \mathcal{M}_n, \quad B \in \mathcal{M}_{n,1}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Din $AX = B$ se obține egalitatea $AI_{i \leftarrow X} = A_{i \leftarrow B}$. Această ultimă egalitate rămâne valabilă și pentru determinanții ambilor membri.

$$\det A \cdot \det(I_{i \leftarrow X}) = \det(A_{i \leftarrow B}).$$

Facem următoarele notații $\det A = \Delta$ și $\det A_{i \leftarrow B} = \Delta_{x_i}$. Dar $\det(I_{i \leftarrow X}) = x_i$ rezultă

$$x_i \Delta = \Delta_{x_i} \quad \text{de unde} \quad x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}$$

Metoda Cramer poate fi folosită și pentru rezolvarea sistemelor liniare compatibile, nedeterminate. Se procedează astfel:

Fie sistemul liniar $AX=B$ unde A este o matrice m/n , X e $n/1$ și B e $m/1$.

1. Se determină rangul matricii A și fie acesta $r < n$.
2. Se determină rangul matricii extinse $(A|B)$ care trebuie să fie tot r .
3. Se rearanjează ecuațiile și necunoscutele sistemului fără a afecta soluțiile astfel încât determinantul principal, cel care dă rangul lui A , să fie plasat în sistem pe liniile 1, 2, ..., r și pe coloanele 1, 2, ..., r . Necunoscutele principale le vom nota cu $x_1, x_2, \dots, x_r$ iar cele secundare vor fi $x_{r+1}, \dots, x_n$.
4. Ecuațiile cu numerele $r+1, r+2, \dots, n$ sunt ecuații secundare și nu aduc informație nouă în sistem pentru că sunt combinații liniare de ecuațiile principale, deci la rezolvarea sistemului le vom ignora, eliminându-le.
5. În ecuațiile principale trecem toți termenii care conțin necunoscute secundare în membrul drept.
6. Considerăm necunoscutele secundare ca parametri $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-r}$. Soluția sistemului va depinde de acești parametri. O soluție care depinde de acești $n - r$ parametri poartă numele de soluție generală a sistemului.

Propoziția 13.7. *Fie sistemul liniar $AX=B$, compatibil și nedeterminat. Soluția sa generală se poate obține din soluția generală a sistemului omogen $AX=0$ plus o soluție particulară a sistemului $AX=B$.*

Demonstrație Fie S_0 soluția generală a sistemului $AX=0$ și S_p o soluție particulară a sistemului $AX=B$. Atunci $AS_0 = 0$ și $AS_p = B$. De aici rezultă că

$$A(S_0 + S_p) = AS_0 + AS_p = 0 + B = B,$$

deci $S_0 + S_p$ e soluția generală a sistemului considerat.

Exemplu:

Fie sistemul

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 9 \\ x - 2y + z = 2 \\ x + 12y - 5z = 12 \end{cases}$$

Pus sub formă matricială, $AX=B$ sistemul se scrie:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 12 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Determinantul matricii A este 0 și va trebui să găsim rangul matricii A . Observăm că determinantul cu elemente pe liniile 1 și 2 și coloanele 1 și 3 este nenul.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Rangul matricii A este 2. Din modul în care am ales Δ_1 rezultă că putem să considerăm acest determinant ca determinant principal și în consecință îl vom nota cu Δ_p . Necunoscutele x și z sunt necunoscute principale iar ecuațiile 1 și 2 sunt ecuații principale, ecuația a treia fiind ecuație secundară. Pentru comoditatea calculului punem sistemul sub forma

$$\begin{cases} 2x - z + 3y = 9 \\ x + z - 2y = 2 \\ x - 5z + 12y = 12 \end{cases} \quad (13.22)$$

Avem un singur determinant caracteristic pentru că avem o singură ecuație secundară. Construim determinantul caracteristic bordând determinantul principal cu coeficienții necunoscutelor principale din ecuația secundară și cu termenii liberi corespunzători.

$$\Delta_{car} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -5 & 12 \end{vmatrix}$$

Calculând acest determinant obținem că $\Delta_{car} = 0$ și cum acesta este singurul determinant caracteristic rezultă că sistemul este compatibil 1-nedeterminat (avem 3 necunoscute dintre care două sunt principale și una secundară.)

Pentru rezolvarea sistemului procedăm astfel:

Pornim de la primele două ecuații, considerăm necunoscuta secundară ca fiind un parametru, o notăm cu α și termenii care o conțin îi trecem în membrul drept. Sistemul devine:

$$\begin{cases} 2x - z = 9 - 3\alpha \\ x + z = 2 + 2\alpha \end{cases}$$

Acest sistem îl putem rezolva cu regula lui Cramer sau adunăm cele două ecuații obținând $3x = 11 - \alpha$ de unde

$$x = \frac{11 - \alpha}{3}.$$

Pe x astfel determinat îl înlocuim în ecuația a doua

$$\frac{11 - \alpha}{3} + z = 2 + 2\alpha \Rightarrow z = 2 + 2\alpha - \frac{11 - \alpha}{3},$$

de unde

$$z = \frac{7\alpha - 5}{3}$$

Atunci soluția generală a sistemului 13.22 este

$$S_G = \left\{ x = \frac{11 - \alpha}{3}, \quad z = \frac{7\alpha - 5}{3}, \quad y = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\} \quad (13.23)$$

Să arătăm acum că soluția generală 13.23 putem să o obținem din soluția generală a sistemului omogen

$$\begin{cases} 2x - z + 3y = 0 \\ x + z - 2y = 0 \\ x - 5z + 12y = 0 \end{cases} \quad (13.24)$$

la care adăugăm o soluție particulară a sistemului neomogen 13.22.

Ca mai înainte, soluția generală a sistemului 13.24 o obținem pornind de la sistemul

$$\begin{cases} 2x - z = -3\alpha \\ x + z = 2\alpha \end{cases}$$

Adunăm ecuațiile și obținem $3x = -\alpha$ de unde $x = -\frac{\alpha}{3}$.

Înlocuim x astfel determinat în a doua ecuație și îl aflăm pe z .

$$-\frac{\alpha}{3} + z = 2\alpha, \quad z = \frac{7\alpha}{3}$$

. Atunci soluția generală a sistemului omogen este

$$S_{GO} = \left\{ x = -\frac{\alpha}{3}, \quad z = \frac{7\alpha}{3}, \quad y = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}. \right\} \quad (13.25)$$

O soluție particulară a sistemului 13.22 o putem obține, de exemplu, luându-l pe $y=0$ iar pe x și z le aflăm din sistemul

$$\begin{cases} 2x - z = 9 \\ x + z = 2 \end{cases}$$

Rezultă soluția particulară a sistemului 13.22

$$S_P = \left\{ x = \frac{11}{3}, \quad z = -\frac{5}{3}, \quad y = 0 \right\}$$

Observăm că

$$S_{GO} + S_P = \left\{ x = -\frac{\alpha}{3} + \frac{11}{3}, \quad z = \frac{7\alpha}{3} - \frac{5}{3}, \quad y = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}. \right\} = S_G.$$

13.16.3 Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda Gauss

Metoda Gauss de rezolvare a sistemelor liniare este, în esență, o metodă de diagonalizare superioară a matricii extinse a sistemului și apoi rezolvarea recursivă a ecuațiilor obținute.

Considerăm sistemul linear $AX = B$ unde A este o matrice $n \times n$, X este de dimensiune $n \times 1$, iar B de dimensiune $n \times 1$.

Se formează un tablou cu matricea extinsă a sistemului. Utilizând doar operații fundamentale cu liniile unei matrici la primul pas a_{11} se transformă în 1 și elementele de pe coloana sa se fac zero.

a_{11}	a_{12}	$\dots$	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$	$\parallel$	b_1
a_{12}	a_{22}	$\dots$	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$	$\parallel$	b_2
a_{13}	a_{32}	$\dots$	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n}$	$\parallel$	b_3
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\parallel$	$\vdots$
$a_{n-2,1}$	$a_{n-2,2}$	$\dots$	$a_{n-2,n-1}$	$a_{n-1,n}$	$\parallel$	b_{n-2}
$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$\dots$	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$	$\parallel$	b_{n-1}
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\dots$	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$	$\parallel$	b_n

Folosim indice superior pentru a marca pasul la care suntem. După pasul 1 obținem:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} & || & b_1 \\
 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2,n-1}^1 & a_{2,n}^1 & || & b_2^1 \\
 0 & a_{32}^1 & \dots & a_{3,n-1}^1 & a_{3,n}^1 & || & b_3^1 \\
 : & : & \dots & : & : & || & : \\
 0 & a_{n-2,2}^1 & \dots & a_{n-2,n-1}^1 & a_{n-2,n}^1 & || & b_{n-2}^1 \\
 0 & a_{n-1,2}^1 & \dots & a_{n-1,n-1}^1 & a_{n-1,n}^1 & || & b_{n-1}^1 \\
 0 & a_{n,2}^1 & \dots & a_{n,n-1}^1 & a_{n,n}^1 & || & b_n^1
 \end{array}$$

La pasul al doilea facem pe a_{22}^1 să fie 1 iar elementele de sub el le facem zero

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1,n-1}^1 & a_{1,n}^1 & || & b_1^1 \\
 0 & 1 & \dots & a_{2,n-1}^2 & a_{2,n}^2 & || & b_2^2 \\
 0 & 0 & \dots & a_{3,n-1}^2 & a_{3,n}^2 & || & b_3^2 \\
 : & : & \dots & : & : & || & : \\
 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1}^2 & a_{n-1,n}^2 & || & b_{n-1}^2 \\
 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1}^2 & a_{n,n}^2 & || & b_n^2
 \end{array}$$

Continuăm la fel până la pasul n-1 unde avem:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1,n-1}^1 & a_{1,n}^1 & || & b_1^1 \\
 0 & 1 & \dots & a_{2,n-1}^2 & a_{2,n}^2 & || & b_2^2 \\
 0 & 0 & \dots & a_{3,n-1}^2 & a_{3,n}^2 & || & b_3^2 \\
 : & : & \dots & : & : & || & : \\
 0 & 0 & \dots & 1 & a_{n-1,n}^{n-1} & || & b_{n-1}^{n-1} \\
 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^{n-1} & || & b_n^{n-1}
 \end{array}$$

Observația 13.8. Dacă la un anumit pas elementul de pe poziția pivotului următor este 0 se fac permutări de linii (dintre cele de pe care nu am ales încă pivot) și/sau coloane (dintre cele de pe care nu am ales pivot, cu renumerotarea corespunzătoare a necunoscutelor).

La terminarea cu succes a pasului n-1 avem determinantul matricii A dat de $\Delta = a_{n,n}^{n-1}$ iar b_n^{n-1} este chiar Δ_{x_n} . Rezolvăm sistemul de jos în sus

$$x_n = \frac{b_n^{n-1}}{a_{n,n}^{n-1}}, \quad x_{n-1} = b_{n-1}^{n-1} - a_{n-1,n}^{n-1} x_n \dots$$

$$\dots x_1 = b_1^1 - a_{12}^1 x_2 - \dots - a_{1,n}^1 x_n$$

13.16.4 Rezolvarea sistemelor liniare cu metoda Gauss-Jordan

Regula dreptunghiului

Considerăm o matrice A cu m linii și n coloane, un element al său nenul a_{ij} pe care îl vom numi pivot și un alt element din matrice a_{kl} cu $k \neq i$ și $l \neq j$. Regula dreptunghiului transformă elementul a_{kl} în elementul a'_{kl} astfel:

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{kj}a_{il}}{a_{ij}}. \quad (13.26)$$

Vizual, avem dreptunghiul cu vârfurile în elementele a_{ij} , a_{il} , a_{kj} , a_{kl}

$$\begin{array}{ccccc} a_{ij} & & \dots & & a_{il} \\ & \swarrow & & \searrow & \\ : & & & & : \\ & \swarrow & & \searrow & \\ : & & & & : \\ a_{kj} & & \dots & & a_{kl} \end{array}$$

Elementul calculat îl determinăm ca raportul dintre produsul elementelor care constituie vârfurile de pe diagonala pivotului minus produsul elementelor de pe cealaltă diagonală, totul împărțit la pivot. Împărțim la pivot și obținem formula 13.26.

$$a'_{kl} = \frac{a_{ij}a_{kl} - a_{kj}a_{il}}{a_{ij}}$$

de unde

$$a'_{kl} = a_{kl} - \frac{a_{kj}a_{il}}{a_{ij}}.$$

Metoda Gauss-Jordan

Pornim de la forma matricială a sistemului, $AX = B$, și alcătuim un tablou cu matricea extinsă.

1. Alegem din matricea A un element nenul pe care îl vom considera pivot. Să presupunem că acel element este a_{ij} .
2. Transformăm tabloul astfel: elementele de pe coloana j vor fi toate 0 în afară de pivot care va fi 1. Elementele de pe linia i le obținem din tabelul anterior împărțind elementele de pe linia i la pivot. Celelalte elemente ale tabloului le obținem cu regula dreptunghiului.

3. Se repetă pașii 1 și 2 până când nu mai există linie de pe care să se poată alege pivot, cu observația că acele coloane de pe care s-a ales pivot rămân neschimbate la trecerea la un nou pas.

4. Discuția sistemului se face astfel.

a) Dacă s-au putut alege pivoți de pe toate cele m linii, sistemul este compatibil. Pentru $m = n$ sistemul este compatibil determinat iar pentru $n > m$ sistemul este compatibil $n - m$ nedeterminat.

b) Dacă există linii de pe care nu se poate alege pivot atunci în cazul în care acea linie are toate elementele 0 ea se trece ultima în tablou și poate fi ignorată (acea ecuație din sistem este o combinație liniară de celelalte ecuații). Dacă toate elementele sunt 0 în afară de cel corespunzător termenului liber atunci sistemul este incompatibil.

Example:

1. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \\ -x + y + 3z = 2 \end{cases}$$

Matricea sistemului, vectorul necunoscutelor și vectorul liber sunt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Tabelul cu matricea extinsă este:

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right].$$

Alegem pivotul (elementul marcat cu roșu)

$$a) \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & 2 \end{array} \right].$$

Aplicăm transformările pe coloana și linia pivotului. Avem :

$$b) \left[\begin{array}{ccc|c} \color{red}{1} & \color{blue}{1} & \color{blue}{1} & \color{blue}{6} \\ \color{blue}{0} & -1 & 2 & 3 \\ \color{blue}{0} & 1 & 3 & 2 \end{array} \right].$$

Detreminăm restul elementelor cu regula dreptunghiului pornind de la tabelul a).

$$a'_{22} = a_{22} - \frac{a_{12} \times a_{21}}{a_{11}} = -1 - \frac{1 \times 1}{1} = -2$$

$$a'_{23} = a_{23} - \frac{a_{13} \times a_{21}}{a_{11}} = 2 - \frac{1 \times 1}{1} = 1$$

$$a'_{24} = a_{24} - \frac{a_{14} \times a_{21}}{a_{11}} = 3 - \frac{6 \times 1}{1} = 9$$

$$a'_{32} = a_{32} - \frac{a_{12} \times a_{31}}{a_{11}} = 1 - \frac{-1 \times 1}{1} = 2$$

$$a'_{33} = a_{33} - \frac{a_{13} \times a_{31}}{a_{11}} = 3 - \frac{-1 \times 1}{1} = 4$$

$$a'_{34} = a_{34} - \frac{a_{14} \times a_{31}}{a_{11}} = 2 - \frac{-1 \times 6}{1} = 8$$

Obținem tabelul:

$$c) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right].$$

Alegem drept pivot elementul de pe coloana 3 și linia 2

$$d) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 8 \end{array} \right].$$

Repetând pașii anteriori pe linia 2 și coloana trei vom avea:

$$e) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & \textcolor{blue}{1} & 0 & \textcolor{blue}{6} \\ 0 & -2 & \textcolor{red}{1} & -3 \\ 0 & \textcolor{blue}{2} & 0 & \textcolor{blue}{8} \end{array} \right].$$

Elementele marcate cu albastru le vom calcula pornind de la tabelul d) folosind formula 13.26. Obținem tabelul:

$$f) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & \boxed{10} & 0 & 20 \end{array} \right].$$

Pe linia a treia avem o singură posibilitate de a alege pivotul și anume elementul a_{32} . Scriem noile valori pentru linia a treia și coloana a doua:

$$g) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \textcolor{blue}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \textcolor{blue}{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 2 \end{array} \right] = [A'|B'].$$

Observăm că pe fiecare linie a matricii A am putut să alegem pivot și că numărul de ecuații este egal cu numărul de necunoscute deci acest sistem este compatibil și determinat.

Soluția sistemului o obținem înmulțind cu X , vectorul necunoscutelor, pe A' , matricea sistemului după reducere, și egalând totul cu vectorul B' , al termenilor liberi după reducere. Avem astfel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Soluția este $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$.

2. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Matricial avem:

$$AX = B \quad \text{unde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Pornim de la tabelul:

$$a) \quad [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{array} \right].$$

Alegem primul pivot

$$b) \quad [A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{array} \right].$$

Prima transformare, respectiv linia și coloana pivotului și celelalte elemente corespunzător formulei 13.26, ne conduce la tabelul

$$c) \quad \left[\begin{array}{cc|c} \boxed{1} & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Alegem pivot și pe linia a treia

$$d) \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{array} \right].$$

Transformările uzuale ne conduc la

$$e) \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Observăm că obținem o linie în care coeficienții necunoscutelor sunt toți zero iar termenul liber este nenul deci sistemul este incompatibil.

3. Fie sistemul:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 6 \\ 2x - y - z = 0 \\ 4x + 3y + 5z = 12 \end{cases}$$

Matricial avem:

$$AX = B \quad \text{unde} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{bmatrix}.$$

Pornim de la tabelul:

$$a) [A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 12 \end{array} \right].$$

Alegem primul pivot

$$b) \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 12 \end{array} \right].$$

După transformări tabelul devine:

$$c) \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{array} \right].$$

Alegem pivot pe linia a doua:

$$d) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{-5} & -7 & -12 \\ 0 & -5 & -7 & -12 \end{array} \right].$$

După ce efectuăm transformările avem:

$$e) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Linia a treia este toată nulă deci putem ca în sistem să eliminăm cea de a treia ecuație. Vom ajunge la un sistem cu două ecuații și trei necunoscute

$$f) \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & \boxed{1} & -\frac{7}{5} & -\frac{12}{5} \end{array} \right] = A'B'.$$

Sistemul este compatibil (am putut alege pivot din fiecare linie) și unu nedeterminat pentru că avem 3 necunoscute și două ecuații. Soluția sistemului o aflăm astfel

$$A'X = B' \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ -\frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

De aici avem:

$$\begin{cases} x + 3z = 6 \\ y + \frac{7}{5}z = -\frac{12}{5} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 6 - 3z \\ y = -\frac{12}{5} - \frac{7}{5}z \end{cases}$$

Necunoscuta secundară z o vom considera un parametru real α și atunci soluțiile sistemului vor fi date de mulțimea S unde

$$S = \left\{ x = 6 - 3\alpha, \quad y = -\frac{12}{5} - \frac{7}{5}\alpha, \quad z = \alpha \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Metoda Gauss-Jordan poate fi folosită și pentru determinarea inversei unei matrici pătrate pornind de la un tabel de forma:

$$A|I_n$$

Dacă matricea redusă $A' = I_n$ atunci matricea A este inversabilă iar inversa ei o obținem din tabloul:

$$\left[\begin{array}{cc|c} A & || & I_n \\ \cdots & || & \cdots \\ I_n & || & A^{-1} \end{array} \right]$$

Sisteme slab condiționate

Definiția 13.9. *Un sistem compatibil și determinat se numește slab condiționat dacă foarte mici modificări ale termenilor liberi duc la o variație mare a soluției.*

Exemplu: Considerăm sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} 0,39528x + 0,79055y = 1,18583 \\ 1,35721x + 2,71441y = 4,07162 \end{cases}$$

Se verifică imediat că $x = 1$ și $y = 1$ este soluția acestui sistem. Modificăm sistemul adunând la fiecare din cei doi termeni liberi valoarea 0,00001. Sistemul devine

$$\begin{cases} 0,39528x + 0,79055y = 1,18584 \\ 1,35721x + 2,71441y = 4,07163 \end{cases}$$

Soluția acestui sistem este însă $x = 3, y = 0$.

Observația 13.9. Pentru rezolvarea sistemelor de ecuații liniare se folosesc în mod curent softuri dedicate calculelor matematice atât numerice cât și formale. Printre cele mai cunoscute enumerăm : MATH-EMATICA, MATLAB, MATHCAD, MAPLE, DERIVE. Ele oferă posibilități de rezolvare rapidă și eficientă dar au și ele limitările lor legate de pragul de rotunjire al computerului. Am amintit că metoda reducerii în treaptă relativ la coloană este instabilă numeric în sensul că o împărțire cu rezultat sub pragul de rotunjire este interpretat ca zero deși nu e nul iar de acolo încolo calculele sunt afectate grav. La fel, sistemele slab condiționate nu sunt detectate de produsele informatice și o eroare mică, ați observat în exemplul precedent, duce la erori grave. De aceea raționamentele și calculele individuale sunt foarte importante.

13.17 Interpretare geometrică a sistemelor liniare

Sisteme liniare cu două necunoscute

Reamintim că o relație de forma $ax + by + c = 0$ reprezintă în planul euclidian o dreaptă. Tangenta unghiului pe care dreapta îl face cu axa Ox se numește panta dreptei și pentru $b \neq 0$ se obține ca fiind coeficientul lui x din explicitarea lui y din ecuația dreptei. Avem:

$$ax + by + c = 0 \quad \text{pentru } b \neq 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}; \quad \text{cu notația } y = mx + n.$$

Panta dreptei este $m = -\frac{a}{b}$ iar $n = -\frac{c}{b}$ este intersecția dreptei cu axa Oy .

Considerăm sistemul

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Avem două drepte în plan și următoarele posibilități:

1. Dacă dreptele sunt concurente (se intersectează într-un singur punct) înseamnă că există o singură pereche (x_0, y_0) care verifică simultan cele două ecuații deci sistemul este compatibil și determinat. Acest lucru se întâmplă dacă pantele celor două drepte sunt distincte.

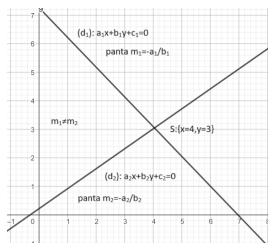


Fig. 13.2: Sistem compatibil determinat

2. Dacă cele două drepte coincid atunci sistemul se reduce la o singură ecuație și deci vom avea o infinitate de soluții

$$S : \left\{ x = -\frac{b_1}{a_1}\alpha - \frac{c_1}{a_1}, \quad y = \alpha, \quad a_1 \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \right\}$$

sistemul fiind în acest caz compatibil unu nedeterminat.

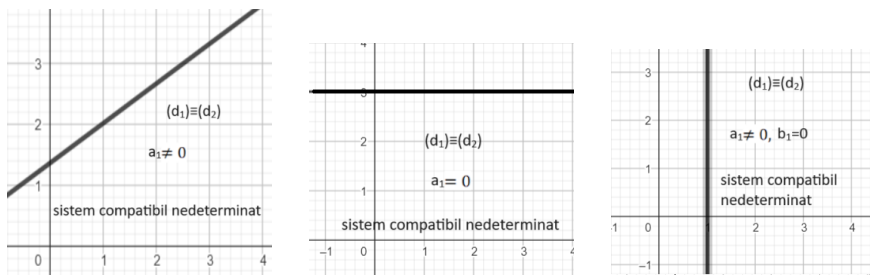


Fig. 13.3: Sisteme compatibile unu nedeterminate

Pentru cazul în care $a_1 = 0$ soluția arată de forma

$$S : \left\{ x = \alpha, \quad y = -\frac{c_1}{b_1}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\};$$

iar dacă $b_1 = 0$ soluția este

$$S : \left\{ x = -\frac{c_1}{a_1}, \quad y = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \right\}.$$

3. Cazul în care cele două drepte sunt distincte (nu au niciun punct în comun) se traduce prin sistem incompatibil.

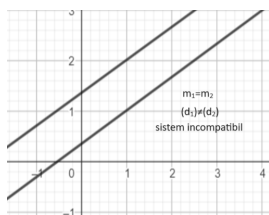


Fig. 13.4: Sistem incompatibil

În cazul unui sistem cu trei ecuații și două necunoscute

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \\ a_3x + b_3y + c_3 = 0 \end{cases}$$

imaginea geometrică a rezolvării sistemului se rezumă la descrierea pozițiilor relative ale celor trei drepte.

1. Cele trei drepte sunt distincte și concurente sau sunt două confundate intersectate de a treia. Soluția sistemului există și este unică.

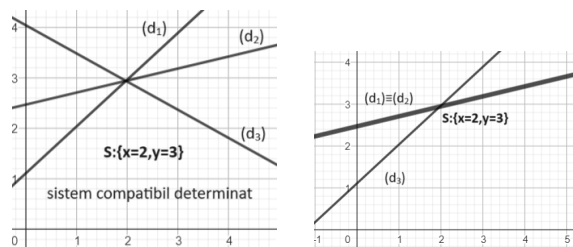


Fig. 13.5: Sistem compatibil determinat

2. Cele trei drepte sunt confundate deci avem o infinitate de soluții. Sistemul este compatibil unu nedetreminat.
3. a) Cele trei drepte sunt trei distincte, neconcurente și neparalelele două câte două. Ele se intersectează două câte două în trei puncte distincte. În consecință, nu există în planul real niciun punct care să aparțină simultan celor trei drepte. În

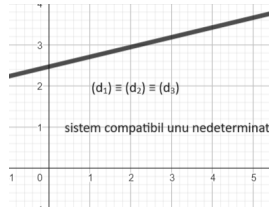


Fig. 13.6: Sistem compatibil unu nedeterminat

limbaj algebric, rangul matricii sistemului este 2 în timp ce rangul matricii extinse este 3. Sistemul este incompatibil.

b). Două drepte sunt paralele, distincte, iar a treia este secantă. În acest caz, avem două puncte de intersecție distincte în care secanta taie cele două paralele. Nici în acest caz nu există un punct comun celor trei drepte. Sistemul este incompatibil.

c) Cele trei drepte sunt paralele neconfundate. Sistem incompatibil.

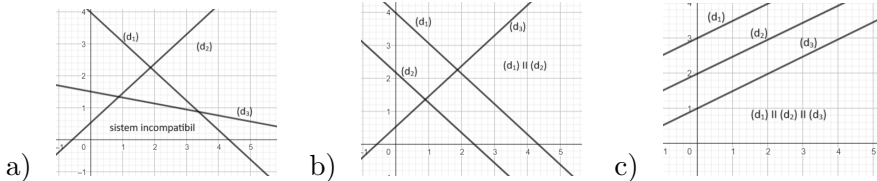


Fig. 13.7: Sisteme incompatibile

Sisteme cu trei necunoscute

O relație de forma $ax + by + cz + d = 0$ reprezintă ecuația unui plan în spațiul euclidian cu trei dimensiuni. Vectorul $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ este perpendicular pe planul considerat și se numește vector normală.

- Sisteme cu două ecuații și trei necunoscute

Fie sistemul:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

Normalele celor două plane pot satisface una dintre următoarele condiții:

1. Cele două plane se intersectează după o dreaptă. Normalele lor sunt doi vectori neparaleli. Acest lucru se exprimă prin

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \quad \text{sau} \quad \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \quad \text{sau} \quad \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

deci cel puțin unul dintre determinanții

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

este nenul ceea ce înseamnă că rangul matricii sistemului este 2 și este egal cu numărul de ecuații și, implicit, este egal cu rangul matricii extinse, deci sistemul este compatibil. Numărul necunoscutelor este 3, mai mare decât rangul matricii sistemului deci avem un sistem compatibil unu nedeterminat.

2. Cele două plane sunt paralele și distincte, intersecția lor este mulțimea vidă, sistemul este incompatibil. Cele două plane sunt paralele și distincte dacă și numai dacă

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}.$$

Această ultimă relație se traduce prin faptul că rangul matricii sistemului este 1 în timp ce rangul matricii extinse este 2.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_1 & d_1 \\ a_2 & d_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

Sistemul este incompatibil.

3. Planele sunt confundate. Sistemul este compatibil 2 nedeterminat.

- Sisteme cu trei ecuații și trei necunoscute

Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Avem următoarele cazuri:

1. Cele trei plane sunt distincte și neparalele. Ele se vor intersecta într-un punct. Sistemul este compatibil determinat.

2. Cele trei plane au o dreaptă comună. Acest lucru se traduce prin faptul că rangul matricii sistemului este doi și rangul matricii extinse este tot 2. Numărul de necunoscute este 3 deci sistemul este compatibil unu nedeterminat.
3. Cele trei plane nu au niciun punct în comun, sunt paralele cu o dreaptă sau se taie după trei drepte paralele, formând o prismă triunghiulară infinită. Algebric acest lucru se exprimă prin faptul că rangul matricii sistemului este 2, există un minor principal și minorul său caracteristic este nenul. Sistemul în acest caz este incompatibil.
4. Planele sunt paralele neconfundate. Algebric avem determinantul matricii sistemului este 0, toți minorii de ordin doi sunt nuli și în ipoteza că avem coeficientul a_1 nenul, determinanții săi caracteristici sunt nenuli. Sistemul este incompatibil.
5. Cele trei plane sunt confundate. În acest caz rangul matricii sistemului este 1, rangul matricii extinse este 1, sistemul este compatibil. Avem 3 necunoscute și rangul matricii sistemului 1 deci sistemul este compatibil dublu nedeterminat.

13.18 Acțiunea unei matrici de permutare

Vom exemplifica astfel de acțiuni. Fie permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Matricea asociată acestei permutări este $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Această

matrice de permutare poate acționa la stânga asupra unei matrici de tipul $A \in \mathcal{M}_{4,n}$ sau la dreapta asupra unei matrici de tipul $B \in \mathcal{M}_{n,4}$ astfel:

$P \cdot A$ schimbă liniile matricii A între ele conform permutării

$$l_1 \rightarrow l_3, \quad l_2 \rightarrow l_1, \quad l_3 \rightarrow l_4, \quad l_4 \rightarrow l_2$$

iar $B \cdot P$ schimbă corespunzător coloanele între ele

$$c_1 \rightarrow c_3, \quad c_2 \rightarrow c_1, \quad c_3 \rightarrow c_4, \quad c_4 \rightarrow c_2.$$

De exemplu, dacă $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ a & b & c & d & e \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \\ x & y & z & t & u \end{bmatrix}$ atunci

$$P \cdot A = \begin{bmatrix} a & b & c & d & e \\ x & y & z & t & u \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}. \quad \text{Pentru } B = \begin{bmatrix} 1 & a & x & 6 \\ 2 & b & y & 5 \\ 3 & c & z & 4 \end{bmatrix} \text{ avem}$$

$$B \cdot P = \begin{bmatrix} a & 6 & 1 & x \\ b & 5 & 2 & y \\ c & 4 & 3 & z \end{bmatrix}.$$

13.19 Exerciții și probleme

1. Se dau matricile $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ și $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$. Să se calculeze $A + B$, $3A - 2B$, AB , BA , A^T , $A^T B^T$. Să se arate că $(AB)^T = B^T A^T$.

2. Se dau matricile $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ și $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$. Să se calculeze AB și BA .

3. Să se calculeze următorii determinanți: $D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$,

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

4. Să se găsească valoarea următorilor determinanți, fără a îi calcula, folosind numai proprietățile determinantilor

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}, \quad e) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad f) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

$$g) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad h) \begin{vmatrix} a-b & p-q & x-y \\ b-c & q-r & y-z \\ c-a & r-p & z-x \end{vmatrix}.$$

5. Să se calculeze următorii determinanți dezvoltând după o linie sau o coloană

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -7 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

6. Să se rezolve următoarele ecuații:

$$a) \begin{vmatrix} 1-x & 3 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} = 0, \quad b) \begin{vmatrix} 6 & 2-x \\ 1-x & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$c) \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Să se determine rangul următoarelor matrici:

$$a) \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 8 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Considerăm matricea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Să se verifice că

$$\text{rang}(A^T A) = \text{rang}(A^T A) = \text{rang} A = \text{rang} A^T.$$

9. Să se inverseze următoarele matrici:

$$a) A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

10. Considerăm matricea $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$. Să se inverseze

matricea A

- a) Folosind teorema Hamilton Cayley.
 b) Folosind Reducerea în Treaptă relativ la Coloane.
 c) Prin partiționare după linia a doua și coloana a doua.

11. Să se rezolve următoarele sisteme:

$$a) \begin{cases} 3x - 5y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \end{cases}$$

12. Să se decidă dacă următoarele sisteme sunt compatibile și dacă da să se rezolve:

$$a) \begin{cases} x + y - z = 4 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}, \quad b) \begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + y = 4 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

13. Considerăm sistemul $\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y = -1 \\ x - z = -2 \end{cases}$ Să se rezolve acest sis-

tem folosind următoarele metode:

- Metoda Cramer.
 - Matricial.
 - Metoda Gauss.
 - Reducere în treaptă relativ la coloane.
 - Metoda Gauss-Jordan.
14. Rezolvați exercițiile și problemele anterioare utilizând softul MATLAB.

13.20 Calcul matricial cu MATLAB

Prezentăm pe scurt capturi de ecran pentru elemente esențiale de calcul matricial.

- Linia de comandă este marcată cu simbolurile `>>`
- Liniile care nu au aceste simboluri sunt linii de răspuns.
- Liniile care încep cu simbolul `%` sunt linii de comentariu.

Pentru început dăm exemple de introducere a unei linii, a unei coloane, a unei matrici, concatenarea a două matrici pe linie și concatenarea a două matrici pe coloane. Apoi scriem transpusa unei matrici, calculăm un determinant, rangul unei matrici, inversa ei, facem reducerea în treaptă relativ la coloane a unei matrici, determinăm inversa unei matrici cu RTC și determinăm rangul unei matrici cu RTC. În final avem o aplicație legată de teorema Hamilton Cayley și de înmulțire a unei matrici cu o matrice de permutare.

```
>> %introducerea unei linii  
>> %elementele sunt separate cu spațiu sau virgulă  
>> a=[1,2,3,4]
```

a =

1	2	3	4

```
>> %introducerea unei coloane  
>> %liniile sunt separate cu ;  
>> b=[5;2]
```

b =

5
2

```
>> %introducere matrice 3X2  
>> c=[3,4,5;2,5,1]
```

c =

3	4	5
2	5	1

```
>> %concatenarea matricilor c și b
>> d=[c,b]
```

```
d =
```

```

     3     4     5     5
     2     5     1     2
```

```
>> %concatenarea matricilor d și a
>> e=[d;a]
```

```
e =
```

```

     3     4     5     5
     2     5     1     2
     1     2     3     4
```

```
>> %rangul matricii e
>> rank(e)
```

```
ans =
```

```

     3
```

```
>> %rangul matricii e*e'
>> rank(e*e')
```

```
ans =
```

```

     3
```

```
>> e'*e
```

```
ans =
```

```

    14    24    20    23
    24    45    31    38
    20    31    35    39
    23    38    39    45
```

```
>> rank(e'*e)
```

```
>> %RTC pentru matricea inversabilă e*e'
>> ee=e*e'

ee =

    75    41    46
    41    34    23
    46    23    30

>> det(ee)

ans =

    1.2070e+03

>> rref(ee)

ans =

     1     0     0
     0     1     0
     0     0     1

>> %RTC pentru matricea neinvertibilă e'*e
>> rref(e'*e)

ans =

    1.0000         0         0   -1.6429
         0    1.0000         0    0.7857
         0         0    1.0000    1.3571
         0         0         0         0
```

```

>> %calculul inversei lui ee cu RTC
>> I=[1,0,0;0,1,0;0,0,1];
>> m=[ee,I]

m =

    75    41    46     1     0     0
    41    34    23     0     1     0
    46    23    30     0     0     1

>> rref(m)

ans =

    1.0000         0         0    0.4068   -0.1425   -0.5145
         0    1.0000         0   -0.1425    0.1110    0.1334
         0         0    1.0000   -0.5145    0.1334    0.7200

>> %la dreapta matricii unitate este inversa matricii ee
>> %ecuația caracteristică a matricii ee
>> %introducem variabila simbolică x
>> syms x
>> eqc=det(ee-x*I)==0

eqc =

- x^3 + 139*x^2 - 1494*x + 1207 == 0

>> %ee își verifică ecuația caracteristică
>> -ee^3+139*ee^2-1494*ee+1207*I

ans =

    0     0     0
    0     0     0
    0     0     0

```



```
>> %acțiunea unei matrici de permutare asupra altei matrici
>> %considerăm matricea de permutare p
>> p=[1,0,0,0;0,0,0,1;0,0,1,0;0,1,0,0]
```

```
p =
```

1	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0

```
>> ex=e'*e
```

```
ex =
```

14	24	20	23
24	45	31	38
20	31	35	39
23	38	39	45

```
>> %p*ex schimbă liniile 2 și 4 între ele
```

```
>> p*ex
```

```
ans =
```

14	24	20	23
23	38	39	45
20	31	35	39
24	45	31	38

```
>> %ex*p schimbă coloanele 2 si 4 între ele
```

```
>> ex*p
```

```
ans =
```

14	23	20	24
24	38	31	45
20	39	35	31
23	45	39	38

Capitolul 14

Spații vectoriale

În capitolul de geometrie analitică am pornit de la faptul că, în geometria euclidiană, știm să măsurăm unghiuri și distanțe, introducând pe acea structură geometrică operații de tip adunare, înmulțire cu un număr, anumite produse, lucru ce a determinat o structură algebrică peste structura geometrică. A apărut în timp necesitatea ca, pe o anumită structură algebrică, să putem introduce o structură geometrică, respectiv să putem generaliza noțiunea de măsurare a unui unghi sau de măsurare a distanței între două obiecte algebrice. De exemplu, să considerăm un sistem de coordonate tridimensional în care ne alegem punctele $O(0, 0, 0)$, $X(1, 0, 0)$, $Y(0, 1, 0)$, $Z(0, 0, 1)$, $XY(1, 1, 0)$, $XZ(1, 0, 1)$, $YZ(0, 1, 1)$, $XYZ(1, 1, 1)$. Aceste puncte reprezintă vârfurile unui cub. În geometria euclidiană distanța dintre punctele O

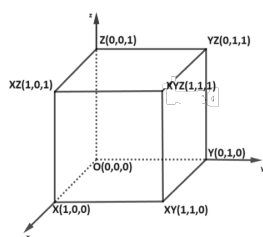


Fig. 14.1: Distanța între două mesaje

și XYZ o calculăm cu Teorema lui Pitagora și este $\sqrt{3}$. Să presupunem că punctele care dau vârfurile cubului sunt de fapt niște mesaje binare $O, X, Y, Z, XY, XZ, YZ, XYZ$. Dacă, de exemplu, se transmite mesajul O și se recepționează mesajul XYZ ne dorim să știm cât de departe este ceea ce am recepționat de ceea ce a fost trans-

mis. Cu alte cuvinte vrem să știm câte poziții din mesajul primit sunt diferite de mesajul emis. Nu înseamnă altceva decât să știm distanța între cele două mesaje. În mod evident nu putem folosi distanța euclidiană care este $\sqrt{3}$ pentru că acesta este un număr irațional și în calculator el este simulat cu o anumită precizie. Putem însă considera, pe cubul nostru, numărul minim de laturi ce trebuie parcurse pentru a ajunge de la O la XYZ și să spunem că distanța dintre O și XYZ este 3. Mai mult, pe fiecare axă deplasarea este de o unitate de lungime având în final o deplasare de trei unități de lungime. Trei este și numărul de erori între cele două mesaje. Spunem că, încă nu am definit exact această noțiune, *distanța de la O la XYZ* este trei. Introducem astfel o noțiune geometrică care acționează pe obiecte algebrice. Oricum, urmând această cale, pe cazuri elementare, trebuie să ajungem la noțiunile uzuale de geometrie. De exemplu, pe o axă a sistemului de coordonate, dacă ne alegem o unitate de măsură, distanța euclidiană și cea introdusă anterior coincid.

14.1 Legi de compoziție interne

Amintim pentru început noțiunile de grup și corp.

Definiția 14.1.

Fie M o mulțime nevidă. Numim operație binară internă, definită pe M , o funcție $\varphi : M \times M \rightarrow M$ care atașează fiecărei perechi $(x, y) \in M \times M$ un element $z \in M$ notat $\varphi(x, y)$ sau $x\varphi y$. O operație binară se mai numește și lege de compoziție binară. Dacă nu există posibilitate de confuzie putem folosi denumirile de operație sau lege de compoziție.

Elementele x și y le vom numi operanzi iar φ va fi operator. Pentru că în mulțimile de numere studiate avem regula de scriere în cadrul operațiilor *operand-operator-operand* vom păstra și în cazul legilor de compoziție aceeași regulă de scriere și aceeași regulă de lucru cu paranteze. Notățiile uzuale pentru operații sunt $+$, $\cdot$, $*$, $\circ$, $\perp$, $\top$ cu observația că notația aditivă $+$ sau multiplicativă $\cdot$ nu semnifică neapărat o adunare sau o înmulțire de numere, iar când folosim pentru o operație notația $\circ$ nu avem neapărat compunere de funcții.

Exemple:

1. Adunarea și înmulțirea de numere sunt operații binare interne dacă sunt definite pe $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.
2. Scăderea de numere este o operație în $\mathbb{Z}$ dar nu este operație internă în $\mathbb{N}$ căci dacă $m < n$, $m - n \notin \mathbb{N}$. Acest lucru nu

înseamnă că nu putem face scăderea $3 - 5$ ci doar că nu putem face această scădere în $\mathbb{N}$.

3. Operația prin care la două numere asociem cel mai mic divizor comun al lor este lege de compoziție internă pe $\mathbb{N}$ dar nu este la fel în $\mathbb{Z}$ pentru că asocierea $x, y \in \mathbb{Z}, \quad (x, y) \rightarrow c.m.m.d.c.\{x, y\}$ nu este funcție în $\mathbb{Z}$.
4. Dacă considerăm o mulțime nevidă M și mulțimea părților sale $\mathcal{P}(M)$, atunci reuniunea și intersecția de mulțimi sunt legi de compoziție pe $\mathcal{P}(M)$.

Asociativitate, element neutru, element simetrizabil, comutativitate, distributivitate

Definiția 14.2. Fie (M, φ) o mulțime pe care am definit o lege de compoziție internă.

1. Spunem că φ este asociativă dacă

$$x \varphi (y \varphi z) = (x \varphi y) \varphi z \quad \forall x, y, z \in M$$

2. Spunem că φ admite element neutru dacă

$$\text{există } e \in M \text{ astfel încât } x \varphi e = e \varphi x = x \quad \forall x \in M.$$

3. Presupunând că legea de compoziție asociativă φ admite element neutru, spunem că elementul $x \in M$ este simetrizabil dacă există un element $x' \in M$ astfel încât

$$x \varphi x' = x' \varphi x = e.$$

4. Legea de compoziție φ este comutativă dacă

$$x \varphi y = y \varphi x \quad \forall x, y \in M$$

Teorema 14.1. Elementul neutru dacă există este unic.

Dacă elementele x și y sunt simetrizabile atunci și $x \varphi y$ este simetrizabil și:

$$(x \varphi y)' = y' \varphi x'.$$

Observația 14.1. 1. Să presupunem că avem definită pe M o operație binară internă notată $*$, trei elemente $x, y, z \in M$ și dorim să vedem care este rezultatul compunerii $x * y * z$. Cum

operația este binară va trebui să grupăm doi operanzi fără a schimba ordinea lor. Avem două posibilități: $(x * y) * z$ sau $x * (y * z)$. Avem de respectat regulile de precedență așa că vom efectua întâi operația din paranteze. Obținem:

$$\underbrace{(x * y)}^u * z = u * z; \quad x * \underbrace{(y * z)}^v = x * v$$

Dacă nu cerem ca operația să fie asociativă nu vom putea face compunerea $x * y * z$. De exemplu, să considerăm pe $\mathbb{R}_+^*$ operația binară $a * b = a^b$. Să încercăm să vedem care este rezultatul operației $x * y * z$. Efectuăm calculele făcând grupările ca mai sus. Avem:

$$(x * y) * z = (x^y) * z = (x^y)^z = x^{yz}$$

și

$$x * (y * z) = x * (y^z) = x^{y^z}.$$

Cum rezultatele sunt diferite rezultă că nu putem compune cu această lege trei sau mai multe elemente. Operația nu este asociativă.

2. Facem convenția ca, dacă operația este notată aditiv, este asociativă, admite element neutru pe e și orice element x este simetrizabil atunci elementul x' cu proprietatea $x * x' = x' * x = e$ să se numească simetricul lui x iar dacă operația este notată multiplicativ să se numească inversul lui x .

Definiția 14.3. Fie M o mulțime pe care am definit două legi de compoziție interne, φ și ψ . Spunem că φ este distributivă la stânga față de legea ψ dacă

$$x \varphi (y \psi z) = (x \varphi y) \psi (x \varphi z) \quad \forall x, y, z \in M.$$

Spunem că φ este distributivă la dreapta față de legea ψ dacă

$$(y \psi z) \varphi x = (y \varphi x) \psi (z \varphi x) \quad \forall x, y, z \in M.$$

Spunem că legea de compoziție φ este distributivă față de legea ψ dacă este distributivă la stânga și la dreapta.

14.2 Grupuri, inele, corpuri

14.2.1 Noțiunea de grup

Definiția 14.4. Fie G o mulțime nevidă pe care avem definită legea de compoziție φ . Spunem că G este înzestrată cu o structură de grup în raport cu φ dacă legea de compoziție are proprietățile:

1. Este asociativă.
2. Admite element neutru.
3. Orice element din G este simetrizabil.

Dacă în plus, legea este comutativă spunem că avem un grup comutativ.

Exemple:

1. Mulțimile de numere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt grupuri comutative în raport cu adunarea definită pe ele. Mulțimea numerelor naturale nu este grup în raport cu adunarea.
2. Clasele de resturi modulo n sunt grupuri comutative în raport cu adunarea definită astfel

$$\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a + b}.$$

3. Mulțimea vectorilor liberi din spațiul euclidian este grup comutativ în raport cu adunarea vectorilor.

14.2.2 Noțiunea de inel

Convenim ca, în continuare, pentru noțiunile de inel și corp să utilizăm următoarele denumiri: cele două operații care intervin în cazul lor vor purta numele de adunare și înmulțire, elementele lor neutre vor fi zero (elementul neutru față de adunare) și 1 (elementul neutru față de înmulțire), simetricul față de adunare rămâne cu denumirea de simetric iar simetricul față de înmulțire îl vom numi element invers.

Definiția 14.5. Fie A o mulțime nevidă pe care avem definite două legi de compoziție notate cu $+$ și $\cdot$ pe care le vom numi adunare și înmulțire. Spunem că tripletul $(A, +, \cdot)$ are o structură de inel dacă:

1. $(A, +)$ este grup comutativ.
2. Înmulțirea este asociativă și admite element neutru.

3. Înmulțirea este distributivă față de adunare.

Dacă înmulțirea este comutativă spunem că inelul este comutativ.

Exemple:

1. Mulțimile de numere $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt inele comutative în raport cu adunarea și înmulțirea definite pe ele.
2. Clasele de resturi modulo n sunt inele comutative în raport cu adunarea și înmulțirea definite astfel

$$\widehat{a} + \widehat{b} = \widehat{a+b} \quad \widehat{a} \cdot \widehat{b} = \widehat{a \cdot b}.$$

3. Mulțimea $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a matricilor pătratice de dimensiune n este inel în raport cu adunarea și înmulțirea definite pe ea.

14.2.3 Noțiunea de corp

Definiția 14.6. Fie F o mulțime pe care avem definite o adunare și o înmulțire. Spunem că tripletul $(F, +, \cdot)$ este corp dacă:

1. F este inel.
2. Orice element din F diferit de elementul nul este inversabil.

Dacă înmulțirea este comutativă spunem că corpul este comutativ.

Exemple:

1. Mulțimile de numere $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sunt corpuri comutative în raport cu adunarea și înmulțirea definite pe ele.
2. Clasele de resturi modulo n cu n număr prim sunt corpuri comutative în raport cu adunarea și înmulțirea definite pe ele.

14.3 Spații vectoriale

14.3.1 Acțiune, lege de acțiune

Fie K și V două mulțimi nevide. Notăm cu V^V mulțimea tuturor funcțiilor definite pe V cu valori în V .

Definiția 14.7. Numim acțiune a mulțimii K asupra mulțimii V o aplicație care asociază fiecărui element α din K o funcție $f_\alpha \in V^V$.

Definiția 14.8. Fie f_α o acțiune a mulțimii K asupra mulțimii V . Numim lege de acțiune (la stânga) atașată acțiunii date, o aplicație care realizează asocierea

$$(\alpha, x) \in K \times V \mapsto f_\alpha(x) \in V$$

Exemplu:

Considerăm $K = (\mathbb{R}, +, \cdot)$, corpul numerelor reale și $V = (\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R}), +)$, grupul aditiv al matricilor de tip m, n cu elemente reale. O acțiune a lui K pe V este o funcție care atașează unui element real α o funcție $f_\alpha : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Putem alege funcția f de așa manieră ca legea ei de acțiune la stânga să fie dată de înmulțirea unei matrici cu un scalar.

$$(\alpha, A) \mapsto f_\alpha(A) = \alpha A.$$

Pe K și V avem definite trei operații distincte iar legea de acțiune are comportament specific pe fiecare. Pentru adunarea din $\mathbb{R}$ avem

$$(\alpha + \beta, A) \mapsto (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Asta înseamnă că pornind de la $\alpha + \beta$ o adunare în $\mathbb{R}$ legea de acțiune propusă o transformă într-o adunare de matrici $\alpha A + \beta B$.

Pentru înmulțirea din $\mathbb{R}$ avem:

$$(\alpha\beta, A) \mapsto (\alpha\beta)A = \alpha(\beta A).$$

Pentru adunarea din $\mathcal{M}$ avem:

$$(\alpha, A + B) \mapsto \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

O ultima proprietate a acestei legi de acțiune este:

$$(1, A) \mapsto 1 \cdot A = A.$$

■

Considerăm un grup comutativ, aditiv $(V, +, \mathcal{O})$ și un corp $(K, +, \cdot, 0, 1)$. În notația lor am pus în evidență elementele neutre ale operațiilor. Cele două tipuri de adunări le-am notat cu același simbol "+" deși sunt operații diferite în general. Elementul neutru al adunării din V îl notăm pentru început cu $\mathcal{O}$ pentru a face distincția față de elementul neutru al adunării din K . Elementele lui V le vom numi vectori (algebri) și le vom nota cu litere latine iar elementele lui K vor fi scalari și le vom nota pentru început cu litere grecești. Pentru a putea avea o imagine geometrică care să faciliteze înțelegerea noțiunilor vom lua corpul K chiar $\mathbb{R}$.

14.3.2 Noțiunea de spațiu vectorial

Fie $(V, +, \mathcal{O})$ un grup comutativ și $(\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$ corpul numerelor reale. Pe $\mathbb{R} \times V \rightarrow V$ definim legea de acțiune $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$.

Definiția 14.9. Grupul comutativ V se numește spațiu vectorial real dacă legea de acțiune considerată are proprietățile:

1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x \in V.$
2. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad x, y \in V.$
3. $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad x \in V.$
4. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in V.$

Un spațiu vectorial real îl vom numi pe scurt doar spațiu vectorial. Legea de acțiune o vom numi înmulțire cu scalari.

Propoziția 14.1. Într-un spațiu vectorial V următoarele proprietăți sunt adevărate:

1. $0x = \mathcal{O} \quad \forall x \in V.$
2. $\alpha\mathcal{O} = \mathcal{O} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
3. $(-1)x = -x \quad \forall x \in V$ ceea ce se traduce în **înmulțirea lui x cu -1 îl duce pe x în simetricul său.**
4. $\alpha x = \mathcal{O} \Rightarrow \alpha = 0 \text{ sau } x = \mathcal{O}.$

Exemple de spații vectoriale:

1. Corpul numerelor reale poate fi privit ca spațiu vectorial peste el însuși, înmulțirea cu un scalar fiind de fapt înmulțirea obișnuită din $\mathbb{R}$.
2. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ (x, y) \stackrel{\text{not.}}{=} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ este spațiu vectorial dacă definim adunarea pe $\mathbb{R}^2$ așa $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + c \\ b + d \end{bmatrix}$ adică adunare pe componente iar înmulțirea cu scalari o definim $\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}.$
3. Mulțimea $\mathbb{R}_1^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$ împreună cu adunarea din $\mathbb{R}^2$ și înmulțirea obișnuită cu scalari este spațiu vectorial.

4. Mulțimea $\mathbb{R}_2^2 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$ împreună cu adunarea din $\mathbb{R}^2$ și înmulțirea obișnuită cu scalari este spațiu vectorial.
5. Mulțimea matricilor cu m linii și n coloane cu elemente din $\mathbb{R}$ împreună cu adunarea de matrici și înmulțirea unei matrici cu un număr este spațiu vectorial.
6. Mulțimea polinoamelor de grad cel mult k cu coeficienți reali, împreună cu adunarea de polinoame și cu înmulțirea unui polinom cu un număr real este un spațiu vectorial.
7. Mulțimea tuturor funcțiilor reale de variabilă reală, $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ pe care am definit adunarea funcțiilor și înmulțirea unei funcții cu un scalar astfel

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (f + g)(t) = f(t) + g(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

$$(\alpha f)(t) = \alpha f(t) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{și} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

este un spațiu vectorial.

14.3.3 Sisteme de generatori, sisteme liniar independente

Fie $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \quad x_i \in V \quad \forall i = 1, \dots, n\}$ o mulțime de vectori finită, nevidă. Convenim ca o astfel de mulțime să o numim sistem de vectori.

Definiția 14.10. Fie $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un sistem de vectori. Un element oarecare $x \in V$ se numește *combinație liniară de elementele sistemului S* dacă există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel încât să avem

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n.$$

Definiția 14.11. Fie $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un sistem de vectori. Numim *închiderea liniară a sistemului S* mulțimea

$$[S] = \{x \in V \mid x \text{ este combinație liniară de elementele lui } S\}.$$

Propoziția 14.2. Închiderea liniară a sistemului S este spațiu vectorial.

Definiția 14.12. Fie V' spațiul vectorial dat de închiderea liniară a sistemului de vectori S . Atunci S se va numi *sistem de generatori pentru V'* .

Exemple:

1. Mulțimea $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ fixat}, x \neq 0\}$ este un sistem de generatori pentru spațiul vectorial $\mathbb{R}$. Oricare ar fi numărul real y există un număr real α astfel încât $y = \alpha x$.
2. Mulțimea $S = \left\{c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, c_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right\}$ este un sistem de generatori al spațiului $\mathbb{R}^2$ pentru că oricare ar fi elementul $v \in \mathbb{R}^2$ exista scalarii $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ astfel încât $v = \alpha c_1 + \beta c_2$.
3. Mulțimea $S = \{1, 1+X\}$ este un sistem de generatori al spațiului vectorial al polinoamelor de grad cel mult unu cu coeficienți reali pentru că orice polinom $a + bX$ cu coeficienți reali poate fi scris sub forma $\alpha \cdot 1 + \beta(1 + X)$ dacă $\alpha = a - b$, și $\beta = b$.
4. Mulțimea $S = \{x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 0 \end{bmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R}, x_1 \text{ fixat}, x_1 \neq 0\}$ este un sistem de generatori pentru $\mathbb{R}_1^2$.

Definiția 14.13. Considerăm un sistem de vectori $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Spunem că vectorii din S sunt liniar independenți dacă orice combinație liniară a lor nulă este identic nulă.

$$\forall \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \mathcal{O} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Sistemul S la rândul său se numește sistem liniar independent.
 S se numește liniar dependent dacă nu este liniar independent.

Propoziția 14.3. Dacă sistemul S este liniar dependent atunci există un element $x_i \in S$ care poate fi scris ca o combinație liniară de ceilalți vectori ai sistemului.

Orice sistem de vectori care conține vectorul nul este liniar dependent.
 Orice sistem de vectori care conține un subsistem liniar dependent este liniar dependent.

Exemple:

1. Mulțimea $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \text{ fixat}, x \neq 0\}$ este un sistem liniar independent în $\mathbb{R}$.
2. Mulțimea $S = \{x, y \in \mathbb{R} \mid x, y \text{ fixati}, x \neq 0, y \neq 0\}$ este un sistem liniar dependent.

3. Sistemul $S = \{ f_1(t) = e^t, f_2(t) = e^{2t} \mid \forall t \in \mathbb{R} \}$ este un sistem liniar independent în spațiul $\mathcal{F}$.
4. Sistemul $S = \{ f_1(t) = \cos(t), f_2(t) = \sin(t) \mid \forall t \in \mathbb{R} \}$ este un sistem liniar independent în spațiul $\mathcal{F}$.

14.3.4 Bază și dimensiune a unui spațiu vectorial

Definiția 14.14. Fie V un spațiu vectorial. Un sistem de vectori S este o bază pentru V dacă este sistem de generatori liniar independent pentru V .

Propoziția 14.4. Fie B o bază a spațiului vectorial V . Dacă B are n elemente atunci orice sistem de generatori al lui V cu $n+1$ elemente este liniar dependent. Orice sistem S cu $n-1$ elemente nu poate să fie sistem de generatori al lui V .

Propoziția 14.5. Oricare două baze ale lui V au același număr de elemente.

Propoziția 14.6. Orice sistem liniar independent poate fi prelungit la o bază și orice sistem de generatori poate fi redus la o bază.

Definiția 14.15. Numim dimensiune a spațiului vectorial V numărul de elemente dintr-o bază a sa.

Propoziția 14.7. Fie V un spațiu vectorial și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a sa. Atunci orice vector $x \in V$ admite o reprezentare unică

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

Definiția 14.16. Scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ poartă numele de coordonatele vectorului x în baza B .

Se stabilește astfel o corespondență între V și $\mathbb{R}^n$ care atașează unui

$$\text{vector } x \in V \text{ n-uplul } \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Definiția 14.17. Asocierea

$$x \longmapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

poartă numele de sistem de coordonate atașat bazei B .

Definiția 14.18. *O bază în care coordonatele și componentele unui vector coincid se numește bază canonică.*

Exemplu: În $\mathbb{R}^2$ baza canonică este formată din vectorii

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Observăm că în această bază componentele unui vector din $\mathbb{R}^2$ sunt chiar coordonatele în baza canonică.

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

De aici rezultă că $x_1 = \alpha_1$ și $x_2 = \alpha_2$. Dacă luăm o altă bază nu vom mai avea această egalitate. Fie baza $B = \{e_1, e_2\}$ unde $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ și

$$e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Atunci:}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

Deci în această bază componentele sunt x_1, x_2 iar coordonatele sunt $\alpha_1 = x_1, \alpha_2 = x_2 - x_1$.

14.3.5 Matricea schimbării de baze, schimbări de coordonate

Fie V un spațiu vectorial de dimensiune n . Alegem două baze oarecare pentru V , $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $C = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$. Reamintim că bazelor B și C putem să le asociem matrici pătratică de dimensiune n , nesingulare, ale căror coloane sunt chiar $e_1, e_2, \dots, e_n$ și $f_1, f_2, \dots, f_n$. Aceste matrici, fără a fi posibilă o confuzie le vom nota tot cu B și C . Fiecare dintre elementele bazei B pot fi exprimate în mod unic cu ajutorul elementelor din baza C . Atunci există o matrice A_{CB} determinată în mod unic astfel încât să avem relația

$$B = A_{CB} \cdot C. \quad (14.1)$$

Matricea A_{CB} se va numi matrice de schimbare a bazei C în baza B . Un calcul simplu ne arată că $A_{CB} = BC^{-1}$. Considerăm vectorul X care în baza B are coordonatele X_B iar în baza C are coordonatele X_C . Atunci între cele două sisteme de coordonate avem relația

$$X_C = A_{CB} X_B. \quad (14.2)$$

Exemplu:

Fie spațiul vectorial $\mathbb{R}^3$ și bazele

$$B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$C = \left\{ f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, f_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, f_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Vom determina matricea de trecere de la baza C la baza B și pornind de la un vector ale cărui coordonate în baza C sunt $X_C = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ determinăm coordonatele sale X_B exprimate în baza B folosind softul MATLAB.

Matricea A_{CB} este notată în aplicație ACB .

```
>> B=[1,1,1;0,1,0;0,0,1];
>> C=[1,1,0;0,1,1;1,0,1];
>> XC=[3;2;1];
>> ACB=B*inv(C)

ACB =

    0.5000    0.5000    0.5000
    0.5000    0.5000   -0.5000
   -0.5000    0.5000    0.5000

>> XB=ACB\XC

XB =

     2
     3
     1
```

Fig. 14.2: Determinarea lui A_{CB} și a lui X_B

Matricea de trecere de la baza B la baza C este diferită de matricea de trecere de la C la B iar coordonatele lui X_B în baza C sunt chiar X_C .

Se observă ușor că, în general:

1. $A_{BC} \cdot A_{CB} = I_n$.

2. $A_{BB} = I_n$.
3. $A_{BD} = A_{BC} \cdot A_{CD}$.

```
>> ABC=C*inv(B)
```

```
ABC =
```

```

1      0     -1
0      1      1
1     -1      0
```

```
>> XCC=ABC\XB
```

```
XCC =
```

```

3
2
1
```

Fig. 14.3: Determinarea lui A_{BC} și a lui X_C

14.3.6 Izomorfisme de spații vectoriale

Definiția 14.19. Fie U și V două spații vectoriale. Spunem că ele sunt izomorfe dacă există o funcție $f: U \rightarrow V$ cu proprietățile:

1. Funcția f este bijectivă.
2. $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in U$.
3. $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } \forall x \in U$.

Teorema 14.2. Fie U, V două spații vectoriale izomorfe, $f: U \rightarrow V$ un izomorfism al lor și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază pentru U . Atunci $B' = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ este o bază pentru V .

Demonstrație: Arătăm întâi că B' este un sistem de generatori pentru V .

Fie $y \in V$. Cum f este surjectivă rezultă că există un $x \in U$ astfel încât $f(x) = y$. Dar pentru $x \in U$ există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel încât

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$$

. Atunci

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = f(\alpha_1 e_1) + f(\alpha_2 e_2) + \dots + f(\alpha_n e_n) = \\ &= \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \dots + \alpha_n f(e_n). \end{aligned}$$

Cum y a fost ales oarecare în V rezultă că sistemul B' este sistem de generatori pentru V .

Demonstrăm că B' este și liniar independent.

Considerăm o combinație liniară nulă de elementele lui B' . Avem:

$$\begin{aligned} \alpha_1 f(e_1) + \alpha_2 f(e_2) + \dots + \alpha_n f(e_n) = 0 &\Rightarrow f(\alpha_1 e_1) + f(\alpha_2 e_2) + \dots + f(\alpha_n e_n) = 0 \\ \Rightarrow f(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) &= 0. \end{aligned}$$

Izomorfismele de spații vectoriale au proprietatea că singura soluție a ecuației $f(x) = 0$ este $x = 0$ rezultă că

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = 0.$$

Dar B este sistem liniar independent deci

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Rezultă că și B' este sistem liniar independent, prin urmare este o bază. ■

Corolar *Oricare două spații vectoriale izomorfe au aceeași dimensiune.*

Orice spațiu vectorial real de dimensiune n este izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Exemple:

1. Orice spațiu vectorial V de dimensiune unu este izomorf cu $\mathbb{R}$.

Imaginea geometrică a lui $\mathbb{R}$ este o dreaptă. Pe dreaptă nu putem să ne deplasăm decât pe o singură direcție, la stânga sau la dreapta. Spunem că pe dreaptă avem un singur grad de libertate. Este bine să facem corespondența

$$\begin{aligned} \text{dimensiune } 1 &\leftrightarrow \mathbb{R}^1 \leftrightarrow \text{un grad de libertate} \\ &\leftrightarrow \text{un parametru.} \end{aligned}$$

Orice element nenul din V formează o bază pentru V .

2. Un spațiu vectorial de dimensiune doi este izomorf cu $\mathbb{R}^2$. Imaginea geometrică a lui $\mathbb{R}^2$ este un plan. În plan avem două tipuri de mișcări independente: stânga-dreapta și înainte-înapoi. Spunem că avem două grade de libertate. Scoatem din nou în evidență corespondența:

$$\text{dimensiune } 2 \leftrightarrow \mathbb{R}^2 \leftrightarrow \text{două grade de libertate} \leftrightarrow \text{doi parametri.}$$

3. Un spațiu vectorial de dimensiune trei este izomorf cu $\mathbb{R}^3$. Imaginea geometrică a lui $\mathbb{R}^3$ este cea a spațiului înconjurător. În spațiu avem trei grade de libertate pentru că avem trei tipuri de mișcări independente: stânga-dreapta, înainte-înapoi, sus-jos. Avem și în acest caz corespondența:

$$\text{dimensiune } 3 \leftrightarrow \mathbb{R}^3 \leftrightarrow \text{trei grade de libertate} \leftrightarrow \text{trei parametri.}$$

4. Subspațiile vectoriale ale lui $\mathbb{R}^3$ sunt:

- de dimensiune trei - el însuși. O bază este formată din trei vectori liniar independenți. Putem exprima condiția de liniar independență în limbaj matricial și anume matricea formată cu componentele celor trei vectori cerem să aibă rangul 3.

- de dimensiune doi - izomorfe cu $\mathbb{R}^2$, plane care conțin originea. O bază este formată din doi vectori cu trei componente, liniar independenți.

- de dimensiune unu - izomorfe cu $\mathbb{R}$, o dreaptă care trece prin origine.

5. Să considerăm sistemul

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases} \quad (14.3)$$

Dăm factor comun x pe prima coloană și y pe cea de a doua coloană. Scris "pe coloane" acest sistem devine:

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

În această relație avem scalarii x, y și vectorii

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Vectorii c_1, c_2 sunt liniar independenți dacă rangul matricii formate cu ei este doi. Avem că:

$$\text{rang}[c_1 c_2] = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 2$$

pentru că minorul $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Astfel, vectorii c_1, c_2 devin o bază pentru spațiul vectorial al soluțiilor sistemului 14.3 format din toate combinațiile liniare ale lui c_1 și c_2 . Dacă vectorul b aparține spațiului generat de c_1 și c_2 atunci sistemul considerat este compatibil și determinat. Spațiul generat de c_1 și c_2 este un subspațiu de dimensiune doi al lui $\mathbb{R}^3$. Dacă b aparține acestui subspațiu înseamnă că există $\tilde{x}, \tilde{y}$ astfel încât $\tilde{x}c_1 + \tilde{y}c_2 = b$. Asta înseamnă că vectorii c_1, c_2, b sunt liniar dependenți și deci rangul matricii și rangul matricii extinse a sistemului 14.3 sunt egale. Afirmația că sistemul este compatibil determinat este probată. Dacă nu există $\tilde{x}, \tilde{y}$ astfel $\tilde{x}c_1 + \tilde{y}c_2 = b$ atunci coloanele c_1, c_2, b sunt liniar independente deci rangul matricii extinse este mai mare decât rangul matricii sistemului, sistemul este incompatibil. În cazul nostru, sistemul fiind compatibil determinat putem găsi și soluția lui. Fie vectorul p cu proprietatea că $p^\tau c_2 = 0$. Pornind de la relația $xc_1 + yc_2 = b$ înmulțim la stânga cu p^τ și avem:

$$p^\tau(xc_1 + yc_2) = p^\tau b \quad \Rightarrow \quad xp^\tau c_1 + yp^\tau c_2 = p^\tau b$$

Rezultatele înmulțirilor $p^\tau c_1, p^\tau c_2, p^\tau b$ sunt sclari și p a fost ales astfel încât $p^\tau c_2 = 0$. Rezultă că

$$xp^\tau c_1 = p^\tau b, \quad \text{deci} \quad \tilde{x} = \frac{p^\tau b}{p^\tau c_1}.$$

Similar îl determinăm și pe $\tilde{y}$. În exemplul dat avem:

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}. \text{ Alegem } p = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$p^T c_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 1, \quad p^T c_2 = 0,$$

$$p^T b = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} = 2$$

Rezultă $\tilde{x} = 2$. Alegem un vector q astfel încât $q^T c_1 = 0$. Alegem vectorul q astfel: $q = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Efectuăm calculele $q^T c$, $q^T c_2$ și $q^T b$ obținem:

$$q^T c_1 = 0, \quad q^T c_2 = -3, \quad q^T b = -3 \Rightarrow \tilde{y} = 1.$$

6. Considerăm sistemul

$$\begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ x - y + 3z = 10 \end{cases} \quad (14.4)$$

Scriem acest sistem "pe coloane"

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}$$

deci

$$xc_1 + yc_2 + zc_3 = b$$

unde x, y, z sunt scalari iar c_1, c_2, c_3, b sunt vectori cu două componente,

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 9 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Rezultă că închiderea liniară a sistemului de vectori $\{c_1, c_2, c_3\}$ poate să fie un spațiu vectorial de dimensiune maxim 2. Vectorii

c_1, c_2 sunt liniar independenți pentru că $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

Rezultă că c_1, c_2 formează o bază pentru spațiul generat de c_1, c_2, c_3 . Pe c_3 îl eliminăm din sistemul de generatori c_1, c_2, c_3 iar scalarul z îl vom considera parametru. Înseamnă că sistemul 14.4 este compatibil unu nedeterminat. Soluțiile sale vor depinde de un parametru. Deci soluțiile sistemului nostru vor fi toate pe o dreaptă. Să arătăm acest lucru. Sistemul poate fi scris sub forma

$$xc_1 + yc_2 = b - \alpha c_3$$

iar soluțiile sale vor fi

$$\tilde{x} = \tilde{x}(\alpha), \quad \tilde{y} = \tilde{y}(\alpha).$$

Procedăm ca în exemplul anterior. Determinăm doi vectori p și q cu proprietatea $p^\tau c_2 = 0$ și $q^\tau c_1 = 0$. Fie $p = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ și $q = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Atunci

$$xp^\tau c_1 + yp^\tau c_2 = p^\tau b - \alpha p^\tau c_3$$

Dar

$$p^\tau c_1 = 2, \quad p^\tau c_2 = 0, \quad p^\tau b = 19, \quad p^\tau c_3 = 5$$

Deci

$$2x = 19 - 5\alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \frac{19}{2} - \frac{5}{2}\alpha$$

. Pentru $\tilde{y}$ avem

$$xq^\tau c_1 + yq^\tau c_2 = q^\tau b - \alpha q^\tau c_3$$

Dar

$$q^\tau c_1 = 0, \quad q^\tau c_2 = 2, \quad q^\tau b = -1, \quad q^\tau c_3 = -1$$

Deci

$$2y = -1 + 5\alpha \quad \Rightarrow \quad \tilde{y} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\alpha$$

.

14.3.7 Spațiul polinoamelor de grad cel mult unu cu coeficienți reali

Considerăm spațiul $\mathcal{P}_1(X) = \{a + bX \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Sunt doi parametri independenți care intră în definiția spațiului așa că dimensiunea sa este doi. Acest lucru înseamnă că spațiul este izomorf cu $\mathbb{R}^2$. Un polinom oarecare p din $\mathcal{P}_1(X)$ poate fi scris sub forma $p = a \cdot 1 + b \cdot X$. Baza canonică a lui $\mathcal{P}_1(X)$ este atunci formată din polinoamele 1 și X . Izomorfismul canonic f dintre $\mathcal{P}_1(X)$ și $\mathbb{R}^2$ va duce baza canonică din primul în baza canonică din cel de al doilea

$$f(1) = e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad f(X) = e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Să considerăm în spațiul de polinoame sistemul $S = \{p_1 = 1, p_2 = 1 + X\}$. Prin izomorfismul canonic acest sistem se duce în sistemul

$$S' = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Pentru că $\det(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ rezultă că S' este o bază pentru $\mathbb{R}^2$ ceea ce înseamnă că S este o bază pentru $\mathcal{P}_1(X)$. Să determinăm matricea de trecere de la baza S la baza canonică și care este scrierea în baza S a polinomului care în baza canonică este $p = 5 + 6X$. Problema o vom reduce la o problemă în $\mathbb{R}^2$ trecând în final rezultatul în spațiul de polinoame. Imaginea lui p prin izomorfismul canonic este vectorul $v = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$. Trecerea de la baza S' la baza $\mathcal{C}$ se face cu relația $\mathcal{C} = A_{S'\mathcal{C}}S'$ deci $A_{S'\mathcal{C}} = (S')^{-1}$. Atunci

$$(S')^{-1} \cdot v_{\mathcal{C}} = v_{S'}.$$

Dar

$$(S')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (S')^{-1}v_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

În concluzie, revenind la spațiul $\mathcal{P}_1(X)$, polinomul care în baza canonică este $p_{\mathcal{C}} = 5 + 6X$ va fi în baza S

$$p_S = -1 + 6(1 + X).$$

14.4 Produs scalar, normă, metrică

Am început studiul spațiilor vectoriale ca pe o structură pur algebrică. În continuare vom introduce pe ele și "o geometrie", acest lucru însemnând că vom defini prin intermediul unor funcții speciale noțiuni de tipul lungimea unui vector, unghiul dintre doi vectori, o condiție de perpendicularitate a doi vectori, distanțe într-un spațiu vectorial. Toate aceste noțiuni conduc la structuri cu proprietăți geometrice similare sau distincte față de modelul dat de geometria euclidiană.

14.4.1 Produsul scalar

Definiția 14.20. Considerăm V un spațiu vectorial de dimensiune n cu baza canonică și doi vectori $x, y \in V$. Numim produs scalar o funcție

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

care are următoarele proprietăți:

1. $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in V.$
2. $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V.$
3. $\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle \quad \forall x, y \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$
4. $\langle x, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in V \quad \text{și} \quad \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$

Observația 14.2. *Produsul scalar verifică și următoarele relații:*

1. $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle \quad \forall x, y, z \in V.$
2. $\langle 0, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = \langle x, 0 \rangle = 0 \quad \forall x \in V.$
3. $\alpha \langle x, y \rangle = \langle x, \alpha y \rangle \quad \forall x, y \in V.$

Exemple de produse scalare:

1. Dacă V este $\mathbb{R}^3$ înzestrat cu baza canonică

$$B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

și $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3, \quad y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3$ atunci

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Acest tip de produs scalar ne conduce la construcția unei geometrii euclidiene pe $\mathbb{R}^3$. El nu este însă singurul tip de produs scalar pe care îl putem introduce pe $\mathbb{R}^3$.

2. În condițiile de la exemplul anterior un alt produs scalar este:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{1!} x_1 y_1 + \frac{1}{2!} x_2 y_2 + \frac{1}{3!} x_3 y_3.$$

3. Considerăm A o matrice pătratică de ordin n . Reamintim că urma matricii A , notată $Tr(A)$ este suma elementelor de pe diagonala principală.

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Pe spațiul vectorial al matricilor pătratice de ordin n cu elemente reale definim următorul produs scalar

$$\langle A, B \rangle = Tr(A^T B) \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Reamintim că A^T este transpusa matricii A .

Următoarea teoremă ne furnizează o inegalitate fundamentală prin intermediul căreia putem să ne definim unghiul dintre doi vectori.

Teorema 14.3. *Dacă V este un spațiu vectorial pe care avem definit un produs scalar, oricare ar fi vectorii nenuli x, y avem îndeplinită inegalitatea (Cauchy-Schwarz)*

$$\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Această inegalitate o putem împărți la $\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ și obținem inegalitatea:

$$\frac{\langle x, y \rangle^2}{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle} \leq 1. \quad (14.5)$$

Din ea rezultă:

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle}} \leq 1. \quad (14.6)$$

14.4.2 Normă

Definim în continuare noțiunea de lungime a unui vector pornind de la noțiunea de modul. Reamintim că modulul are ca semnificație geometrică noțiunea de distanță de la origine la un punct.

Definiția 14.21. *Numim normă pe spațiu vectorial V o aplicație $\|\cdot\| \rightarrow \mathbb{R}_+$ care are următoarele proprietăți:*

1. $\|x\| \geq 0$ și $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$.
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exemple de norme definite pe $\mathbb{R}^2$

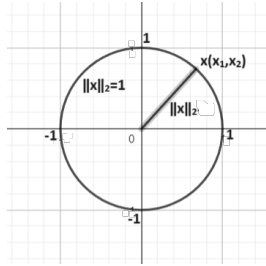
1. Norma euclidiană notată cu $\|\cdot\|_2$ definită astfel pentru $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Aceasta este o normă provenind din produsul scalar uzual definit pe $\mathbb{R}^2$.

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Ea ne dă, în sens euclidian, lungimea segmentului de dreaptă determinat de punctele $O(0,0)$ și $x(x_1, x_2)$. În cazul în care nu există posibilitatea de confuzie, norma euclidiană o vom nota



simplicu cu $\|\cdot\|$.

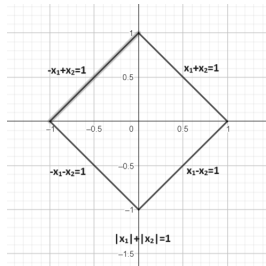
Să observăm că relația $\|x\|_2 = 1$ este un cerc de rază 1 centrat în origine care se numește și bila unitate.

2. Norma-1. Este o normă care nu mai provine dintr-un produs scalar și care se definește;

$$\|x\|_1 = |x_1| + |x_2|$$

În cazul acestei norme, bila unitate este dată de un pătrat centrat în origine și cu vârfurile pe axe.

$$|x_1| + |x_2| = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 & \forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 + x_2 = 1 & \forall x_1 \leq 0, x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 = 1 & \forall x_1 \leq 0, x_2 \leq 0 \\ x_1 - x_2 = 1 & \forall x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

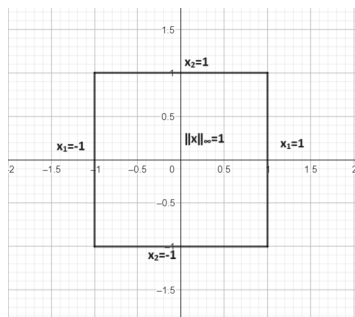


3. Norma infinit sau norma maxim se definește astfel:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}.$$

Pentru $\|x\|_\infty = 1$ reprezentarea grafică este un pătrat centrat în origine, cu laturile de lungime 2, paralele cu axele de coordonate.

$$\|x\|_\infty = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \pm 1 & x_2 \in [-1, 1] \\ x_2 = \pm 1 & x_1 \in [-1, 1] \end{cases}$$



Observația 14.3. În cazul în care definim aceste trei norme pe $\mathbb{R}$ ele coincid cu modulul obișnuit.

Cele trei norme au proprietatea că un șir convergent în una este convergent în toate. Spunem că normele acestea sunt echivalente.

14.4.3 Metrică

Definiția 14.22. Numim metrică sau distanță pe un spațiu vectorial V o aplicație $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_+$ cu proprietățile:

1. $d(x, y) \geq 0$, și $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in V$.
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in V$.

Un spațiu vectorial pe care am definit un produs scalar îl numim spațiu cu produs scalar. Un spațiu pe care am definit o normă îl numim spațiu normat iar unul pe care am definit o metrică se numește spațiu metric. Produsul scalar, norma și metrica pot fi definite independent pe un spațiu vectorial. Dacă avem un spațiu cu produs scalar pe care am definit norma euclidiană și metrica

$$d(x, y) = \|y - x\|^2$$

spunem că avem un spațiu euclidian.

14.5 Unghi dintre doi vectori, ortogonalitate

Considerăm un spațiu euclidian. Pornind de la inegalitățile 14.6 ne definim cosinusul unghiului dintre doi vectori x, y , nenuli ca fiind

$$\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}$$

Astfel definit, cosinusul unghiului dintre doi vectori ne conduce la următoarea afirmație:

Definiția 14.23. 1. Spunem că vectorii x și y sunt perpendiculari sau ortogonali dacă sunt nenuli și produsul lor scalar este 0.

$$x \perp y \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = 0.$$

2. O mulțime $M \subset V$ spunem că este ortogonală dacă oricare doi vectori din ea sunt ortogonali.

3. O mulțime ortogonală se numește ortonormată dacă toate elementele ei au lungimea 1.

Propoziția 14.8. 1. Doi vectori ortogonali sunt liniar independenți.

2. Dacă $M = \{v_1, v_2, \dots, v_k\} \subset V$ este ortogonală și $\dim V = n$ atunci $k \leq n$.

Schițăm demonstrația. Presupunem că vectorii ortogonali x și y nu sunt liniar independenți. Atunci există scalarii $a, b \in \mathbb{R}^*$ astfel încât $ax + by = 0$. Înmulțim scalar la stânga cu x și obținem:

$$a \langle x, x \rangle + b \langle x, y \rangle = 0, \quad \langle x, x \rangle \neq 0, \quad \langle x, y \rangle = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Similar arătăm că $b = 0$ deci x, y sunt liniar independenți. Demonstrăm prin inducție că astfel M este un sistem de vectori liniar independenți. Propoziția 14.6. ne asigură că $k \leq n$. ■

Fie V un spațiu euclidian de dimensiune n și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a sa. Dacă

$$e_i \perp e_j \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \quad i \neq j$$

spunem că spațiul este înzestrat cu o bază ortogonală. Dacă, în plus, fiecare vector din baza B este de lungime unu spunem că avem o bază ortonormată. Faptul că B este ortonormată poate fi exprimat și astfel:

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} \text{ este simbolul lui Kroneker, } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j \\ 0 & \text{pentru } i \neq j. \end{cases}$$

Definiția 14.24. Considerăm V un spațiu vectorial euclidian și $v \in V$.

1. Numim proiecția vectorului $x \in V$ pe v , vectorul

$$pro_v x = \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v.$$

2. Numim mărimea algebrică a proiecției lui x pe v mărimea

$$x_v = \frac{\langle x, v \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

Observăm că mărimea algebrică a proiecției poate fi și negativă.

Exemplu:

Fie vectorii $v, w, x \in \mathbb{R}^3$, $v = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Atunci:

$$pro_v x = \frac{3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} \\ \frac{2}{7} \\ -\frac{1}{7} \end{bmatrix}, \quad x_v = \frac{1}{7}.$$

$$pro_w x = \frac{-3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1)}{(-3) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{-4}{14} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-2}{7} \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{6}{7} \\ \frac{-4}{7} \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}, \quad x_w = -\frac{2}{7}.$$

Propoziția 14.9. Fie V un spațiu euclidian, $\dim V = n$ și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază ortonormată a sa. Atunci orice vector $x \in V$ poate fi scris sub forma

$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

14.6 Procedeu de ortonormalizare Gram-Schmidt

Procedeu Gram-Schmidt este un procedeu de a obține dintr-o mulțime finită de vectori din $\mathbb{R}^n$ o mulțime ortogonală S' cu proprietatea că închiderea liniară a lui S coincide cu închiderea liniară a lui S' . Dacă S este liniar independentă atunci și S' este liniar independentă. Dacă S este o bază a lui $\mathbb{R}^n$ atunci și S' este o bază a lui $\mathbb{R}^n$. Fie $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k \mid k \in \mathbb{N}, k \leq n\}$. Construim inductiv pe $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ în acest mod:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \text{pro}_{w_1} v_2.$$

$$\Rightarrow \langle w_1, w_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \langle v_1, v_1 \rangle = 0$$

$$w_3 = v_3 - \text{pro}_{w_1} v_3 - \text{pro}_{w_2} v_3, \quad \Rightarrow \quad \langle w_1, w_3 \rangle = 0, \quad \langle w_3, w_2 \rangle = 0.$$

...

$$w_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \text{pro}_{w_i} v_k$$

Am obținut astfel sistemul S' ortogonal care are aceeași închidere liniară ca și S . Dacă dorim să obținem din S' un sistem ortonormat $S'' = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ normalizăm toți vectorii w_i , $i = 1, 2, \dots, k$.

$$S'' = \left\{ e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|}, e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|}, \dots, e_k = \frac{w_k}{\|w_k\|}, \right\}$$

De menționat că dacă v_p este liniar dependent de $v_1, \dots, v_{p-1}$ atunci $w_p = 0$.

Dacă S este liniar independent și $k = n$ atunci S este o bază a lui $\mathbb{R}^n$ iar S'' este o bază ortonormată a lui.

Exemplu:

Fie $S = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$. Cum determinantul format cu componentele vectorilor v_1, v_2, v_3 este diferit de zero rezultă că S este o bază pentru $\mathbb{R}^3$. Construim pornind de la S pe S'' .

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1, \quad w_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$e_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sqrt{\frac{2}{3}} \end{bmatrix}$$

Similar calculăm pe w_3

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\langle w_2, w_2 \rangle} w_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

$$w_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}, \quad e_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

14.7 Transformări liniare

Definiția 14.25. Fie U și V două spații vectoriale peste $\mathbb{R}$. Se numește transformare liniară sau morfism de spații vectoriale o funcție $f : U \rightarrow V$ cu proprietățile:

1. $f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in U$
2. $f(\alpha x) = \alpha f(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in U$

Definiția 14.26. 1. Dacă transformarea liniară este de la V la V ea se numește endomorfism.

2. Dacă transformarea liniară este bijectivă ea se numește izomorfism de spații vectoriale.
3. Dacă izomorfismul este de la V la V atunci el se cheamă automorfism.
4. Mulțimea tuturor aplicațiilor liniare de la U la V o notăm $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(U, V)$.

Propoziția 14.10. Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(U, V)$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

1. Transformarea f duce elementul neutru față de adunarea din U în elementul neutru față de adunarea din V , adică

$$f(O_U) = f(O_V).$$

2. $f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in U$.
3. $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in U$.

Proprietatea 3 din propoziția anterioară este echivalentă cu proprietățile 1 și 2 din definiția transformărilor liniare.

Exemple:

1. Aplicația $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}$$

este o transformare liniară din $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$.

Pentru a demonstra acest lucru considerăm elementele oarecare

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ din $\mathbb{R}^2$ și $\alpha \in \mathbb{R}$. Atunci:

$$\begin{aligned} f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \\ &= \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 - y_1 - y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3y_1 + 3y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 - y_1 \\ 2x_1 + 3y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 - y_2 \\ 2x_2 + 3y_2 \end{bmatrix} = \\ &= f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} f\left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) &= f\left(\begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x + \alpha y \\ \alpha x - \alpha y \\ \alpha x + 3\alpha y \end{bmatrix} = \\ &= \alpha \begin{bmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{bmatrix} = \alpha f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right). \end{aligned}$$

Am demonstrat astfel că f este transformare liniară.

2. Fie $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dată de

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y - z \\ y - 2z + 3 \end{bmatrix}.$$

Să arătăm că f nu este transformare liniară.

Acest lucru se vede imediat pentru că

$$f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3. Aplicația $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ nu este o aplicație liniară deși duce pe 0 în 0. Într-adevăr

$$f(x + y) = (x + y)^2 \neq f(x) + f(y) = x^2 + y^2.$$

Acest lucru înseamnă că doar condiția ca f să ducă elementul nul în elementul nul nu este suficientă, este doar necesară.

14.7.1 Imaginea unei transformări liniare

Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(u, v)$.

Definiția 14.27. Numim imaginea transformării liniare f mulțimea

$$Im(f) = \{y \in V \mid \exists x \in U \text{ astfel încât } f(x) = y\}.$$

Imaginea unei transformări liniare de la U la V este un subspațiu vectorial al lui V .

Definiția 14.28. Dimensiunea subspațiului $Im(f)$ se numește rangul transformării liniare f .

$$rang(f) = \dim(Im(f)).$$

Teorema 14.4. Fie f o transformare liniară de la spațiul U la spațiul V . Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Transformarea f este surjectivă (f e un epimorfism).
2. $Im(f) = V$
3. $rang(f) = \dim V$.

Exemple:

1. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$, definită astfel:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y \\ x - y + z \end{bmatrix}.$$

Să calculăm $Im(f)$. Pornim de la definiție.

$$Im(f) = \left\{ (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ a.î. } f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \right\}.$$

Din cum a fost luată transformarea f rezultă că trebuie să determinăm $u, v \in \mathbb{R}$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x + y = u \\ x - y + z = v \end{cases}$$

să aibă soluție. Rangul matricii sistemului este 2 deci sistemul este compatibil oricare ar fi $u, v \in \mathbb{R}$ de unde $Im(f) = \mathbb{R}^2$, f este surjectivă. Rezultă că $rang(f) = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

2. Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dată de:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x - y \\ x + y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}.$$

Să arătăm că această transformare liniară nu este surjectivă, deci să arătăm că există $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ astfel încât sistemul

$$\begin{cases} x - y = u \\ x + y = v \\ 3x + 2y = w \end{cases}$$

să nu aibă soluție. Este suficient să găsim u, v, w astfel încât rangul matricii sistemului să fie strict mai mic decât rangul matricii extinse. De exemplu pentru $u = 1, v = 3, w = 7$ sistemul este incompatibil. Rezultă că transformarea liniară considerată nu este surjectivă. Să determinăm efectiv $Im(f)$.

Pentru aceasta vom rezolva sistemul 2 pe coloane.

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}.$$

Acest sistem are soluție dacă și numai dacă vectorul $\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$

apartține spațiului generat de vectorii $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Cum

cei doi vectori generatori sunt liniar independenți (matricea sistemului are rang 2) rezultă că $Im(f)$ este închiderea liniară a

$$\text{lui } S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}.$$

$$Im(f) = [S], \quad rang(f) = dim(Im(f)) = dim [S] = 2.$$

14.7.2 Nucleul unei aplicații liniare

Fie $f \in \mathcal{L}(U, V)$.

Definiția 14.29. Numim nucleul aplicației f mulțimea

$$\text{Ker}(f) = \{x \in U \mid f(x) = 0_V\}$$

Nucleul transformării f este un subspațiu al lui U .

Definiția 14.30. Dimensiunea lui $\text{Ker}(f)$ poartă numele de defectul lui f .

$$\text{def}(f) = \dim(\text{Ker}(f)).$$

Teorema 14.5. Fie $f \in \mathcal{L}(U, V)$. Următoarele afirmații sunt echivalente:

1. Transformarea liniară f este injectivă.
2. $\text{Ker}(f) = \{0_U\}$.
3. $\text{def}(f) = 0$.

Exemple:

1. Considerăm transformarea liniară $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită astfel:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x + y \\ 3x + 2y \end{bmatrix}$$

Pornind de la definiție să calculăm nucleul transformării.

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

Cum sistemul liniar omogen

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

admite singura soluție soluția nulă rezultă că:

$$\text{Ker}(f) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}; \quad \text{def}(f) = 0.$$

Deducem că transformarea liniară considerată este injectivă.

2. Fie transformarea liniară $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dată de

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ -x + y + 2z \end{bmatrix}.$$

Sistemul atașat pentru aflarea lui $\text{Ker}(f)$ este:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ -x + y + 2z = 0 \end{cases} \quad (14.7)$$

Sistemul este compatibil și unu nedeterminat deci $\text{Ker}(f) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. În consecință,

$$\dim(\text{Ker}(f)) = 1; \quad \text{def}(f) = 1; \quad \text{rang}(f) = 2.$$

În acest caz putem afla un vector $g \in \mathbb{R}^3$ generator al lui $\text{Ker}(f)$. Un procedeu prin care putem determina o bază pentru $\text{Ker}(f)$ este următorul:

- Plecăm de la matricea sistemului 14.7 și o reducem în treaptă relativ la coloane.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} = [I_2 : A].$$

- Nucleul lui f va fi generat de matricea $[-A^\tau : I_1]^\tau$

$$[-A^\tau : I_1]^\tau = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & & \end{bmatrix}^\tau = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \stackrel{\text{not.}}{=} u.$$

Se verifică imediat că $f(\alpha u) = 0_V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$.

14.7.3 Matricea asociată unei transformări liniare

Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază pentru spațiul vectorial U și $B' = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ o bază pentru spațiul vectorial V . Evident, $\dim U = n$ și $\dim V = m$.

Considerăm $f \in \mathcal{L}(U, V)$. Exprimarea imaginilor prin f ale elementelor bazei B în baza B' se face prin intermediul unei matrici $T \in \mathcal{M}_{n \times m}$ dată de

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m t_{ij} v_i, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

iar dacă $y = f(x)$ atunci avem relația

$$y = Tx.$$

Matricea T se va numi matricea transformării liniare f .

Exemple:

1. Considerăm $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definită astfel:

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 2y + 3z \\ -x + 4y + 2z \end{bmatrix}. \quad (14.8)$$

Presupunem că în $\mathbb{R}^3$ avem baza canonică

$$B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Atunci, înlocuind în 14.8, obținem:

$$f(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad f(e_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad f(e_3) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Rezultă că matricea transformării f este

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Vectorul $X \in \mathbb{R}^3$, $X = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ va fi dus prin transformarea f

în vectorul $Y \in \mathbb{R}^2$ astfel:

$$Y = f(X) = TX = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Considerăm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dată de

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + 4y \\ 2x + 3y \end{bmatrix}.$$

Dacă în domeniul de definiție considerăm baza canonică, matricea transformării va fi $T_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, iar imaginea vectorului

$X = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ va fi vectorul $Y = T_1 X = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 \\ 16 \end{bmatrix}$. Dacă însă în domeniul de definiție avem baza

$$B' = \left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

va trebui să calculăm matricea transformării pentru că nu o obținem direct din definiția lui f .

$$f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+4 \\ 2+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

deci matricea transformării va fi

$$T_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

iar vectorul $Y = T_2X$ va fi

$$Y = T_2X = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

14.7.4 Endomorfisme

O transformare liniară este un morfism de spații vectoriale.

Definiția 14.31. Fie $f \in \mathcal{L}(U, V)$.

1. Dacă f este injectiv el se numește monomorfism.
2. Dacă f este surjectiv el se numește epimorfism.
3. Dacă f este bijectiv atunci el se numește izomorfism.

Considerăm că $f \in \mathcal{L}(U, U)$ și $\dim U = n$. Reamintim că, în acest caz, f este injectiv dacă și numai dacă este surjectiv dacă și numai dacă este bijectiv.

1. Un morfism de la un spațiu vectorial în el însuși se numește endomorfism.
2. Dacă f este endomorfism bijectiv el se numește automorfism.

Matricea unui endomorfism în baza canonică

Fie $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$. Știm că $B' = \{f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)\}$ este tot o bază a lui $\mathbb{R}^n$. Matricea de trecere de la baza B la baza B' este $A_{BB'} = [f(e_1) \ f(e_2) \ \dots \ f(e_n)]$.

Exemplu:

Considerăm $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definit astfel:

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_1 + 2x_2 \end{bmatrix} \quad \forall x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Observația 14.4. *In literatura de specialitate din varii motive notația pentru o astfel de transformare este:*

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, 3x_1 + 2x_2).$$

■

Avem pe rând

$$f(e_1) = f\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad f(e_2) = f\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Atunci matricea atașată lui f în baza canonică este

$$T_B(f) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Matricea unui endomorfism într-o baza oarecare

Propoziția 14.11. *Fie $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, B baza canonică a lui $\mathbb{R}^n$, B' o altă bază a sa, $A_{BB'}$ matricea de trecere de la baza B la B' . Atunci*

$$T_{B'}(f) = A_{BB'}^{-1} T_B(f) A_{BB'}.$$

Pornind de la exemplul anterior să calculăm matricea endomorfismului f în baza $B' = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$. Atunci $A_{BB'} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ și $A_{BB'}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Astfel

$$T_{B'}(f) = A_{BB'}^{-1} T_B(f) A_{BB'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

deci

$$T_{B'}(f) = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

14.7.5 Izometrii

Considerăm U spațiu euclidian finit dimensional și $f \in \mathcal{L}(U, U)$.

Definiția 14.32. *Endomorfismul f se numește izometrie dacă invariază produsul scalar, adică*

$$\langle f(x), f(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Exemplu:

Considerăm $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o transformare liniară a cărei matrice atașată este $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Să arătăm că f este o izometrie. Alegem

doi vectori oarecare $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. și calculăm $\langle f(X), f(Y) \rangle$. Avem:

$$\begin{aligned} \langle f(X), f(Y) \rangle &= \langle AX, AY \rangle = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= \left\langle \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix} \right\rangle = \\ &= \begin{bmatrix} z \\ x \\ y \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z & x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ u \\ v \end{bmatrix} = zw + xu + yv = \langle X, Y \rangle. \end{aligned}$$

Propoziția 14.12. *Izometriile păstrează lungimea vectorilor și unghiul dintre ei.*

Demonstrăm această propoziție. Fie $X, Y \in \mathbb{R}^3$ și f o izometrie a lui $\mathbb{R}^3$. Știm că $\langle f(X), f(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle$. Atunci

$$1. \quad \|f(X)\| = \sqrt{\langle f(X), f(X) \rangle} = \sqrt{\langle X, X \rangle} = \|X\|.$$

$$\cos(\widehat{f(X), f(Y)}) = \frac{\langle f(X), f(Y) \rangle}{\|f(X)\| \|f(Y)\|} = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} = \cos(\widehat{X, Y}).$$

14.8 Transformări ortogonale

14.8.1 Matrici ortogonale

Definiția 14.33. *Fie A o matrice pătratică de ordin n . Spunem că A este ortogonală dacă*

$$A^T A = A A^T = I_n.$$

unde A^T este transpusa matricii A .

Observația 14.5. 1. Dacă A este o matrice ortogonală de ordin n și coloanele ei sunt $c_1, c_2, \dots, c_n$ atunci $\|c_i\| = 1, \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$.

2. Dacă A este o matrice ortogonală atunci determinantul său este ± 1 . Afirmatia reciprocă nu este adevărată pentru că nu orice matrice de determinant 1 este ortogonală.

3. Izometriile lui $\mathbb{R}^n$ au matricile asociate matrici ortogonale și reciproc orice matrice ortogonală este asociată unei izometrii.

4. Dacă A este o matrice pătratică de ordin n , $c_1, c_2, \dots, c_n$ sunt coloanele ei și $l_1, l_2, \dots, l_n$ sunt liniile ei, atunci A este matrice ortogonală dacă și numai dacă $B_c = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^n$, dacă și numai dacă $B_l = \{l_1, l_2, \dots, l_n\}$ este o bază ortonormată a lui $\mathbb{R}^n$.

5. Produsul a două matrici ortogonale este o matrice ortogonală. Avem pentru A și B matrici ortogonale de ordin n :

$$(AB)^T AB = B^T A^T AB = B^T (A^T A) B = B^T I_n B = B^T B = I_n.$$

6. Suma a două matrici ortogonale

NU ESTE O MATRICE ORTOGONALĂ.

7. Produsul dintre un scalar și o matrice ortogonală

NU ESTE O MATRICE ORTOGONALĂ.

Observația 14.6. În algebra liniară, uzual, nu se mai face distincție între endomorfisme și transformările liniare. Oricărui endomorfism i se poate asocia o matrice corespunzătoare unei anume baze și reciproc. Matricilor ortogonale le asociem transformări ortogonale. Putem identifica compunerea a două transformări ortogonale cu produsul matricilor ortogonale corespunzătoare. Dacă luăm în calcul endomorfisme oarecare (nu ortogonale) atunci suma a două endomorfisme corespunde sumei a două matrici pătratice, compunerea a două transformări este produsul a două matrici iar inversarea unui endomorfism coincide cu inversarea unei matrici.

Determinantul unei matrici ortogonale este 1 sau -1. Pentru cazul matricilor pătratice de ordin doi sau trei, matricile de determinant 1 caracterizează o rotație în raport cu un punct (în plan), un punct sau o axă (în spațiu) iar cele de determinant -1 o simetrie sau o compunere dintre o rotație și o simetrie. Din proprietățile prezentate în observația 14.5. compunerea a două rotații este tot o rotație, compunerea a două simetrii este o rotație iar compunerea dintre o rotație și o simetrie este o simetrie.

14.8.2 Transformări ortogonale în $\mathbb{R}^2$

Exemple:

1. Matricea unitate I_2 este o identitate.

2. Matricile

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad S_{x=y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

reprezintă simetrii, S_x este o simetrie în raport cu axa Ox , S_y simetrie în raport cu axa Oy iar $S_{x=y}$ reprezintă o simetrie în raport cu prima bisectoare. Acțiunea matricii S_x asupra unui element oarecare din $\mathbb{R}^2$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, este

$$S_x X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix},$$

acțiunea lui S_y asupra lui X este

$$S_y X = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

iar acțiunea lui $S_{x=y}$ asupra lui X este:

$$S_{x=y} X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

3. Compunerea $(S_x \cdot S_{x=y})X = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ care înseamnă o rotație de 90° . Vectorii $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ și $\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$ au produsul scalar 0 deci sunt perpendiculari.

4. Matricea de simetrie față de o dreaptă ce trece prin origine și face cu axa Ox un unghi de mărime $\frac{\alpha}{2}$ este

$$S_{\alpha/2} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{bmatrix}.$$

5. Matricea de rotație de unghi α , efectuată în sens direct trigonometric este:

$$R_{\alpha+} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix},$$

iar cea efectuată în sens invers trigonometric este

$$R_{\alpha-} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Alte transformări importante în plan

1. Translația de vector $u = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

$$X' = X - u; \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - a \\ y - b \end{bmatrix}.$$

2. Omotetia de factor α

$$X' = \alpha X; \quad \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{bmatrix}.$$

Observația 14.7. *Omotetia nu este o izometrie.*

3. Rototranslația este o compunerea unei translații cu o rotație. Efectuăm întâi translația $X' = X - u$ și apoi rotația $X'' = R_{\alpha+}$. Să dăm un exemplu:

Pornim de la vectorul $X = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ pe care îl translatăm cu vectorul $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Obținem vectorul $X' = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$. Pe acesta îl rotim cu un unghi de $\frac{\pi}{4}$ și obținem vectorul

$$X'' = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

14.8.3 Endomorfisme ortogonale în $\mathbb{R}^3$

1. Rotația în sens pozitiv, de unghi α , în jurul axei Ox este dată de:

$$R_{\alpha+,O_x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Dacă $X' = R_{\alpha+,O_x}X$ atunci:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \cos \alpha - z \sin \alpha \\ y \sin \alpha + z \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

2. Rotații în sens pozitiv în jurul axelor Oy , Oz de unghiuri β , respectiv γ :

$$R_{\beta+,O_y} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}; \quad R_{\gamma+,O_z} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

3. Secvența de program MATLAB pentru determinarea produsului

$$T = R_{t+,O_x} R_{u+,O_y} R_{v+,O_z}$$

este:

```
>> syms A B C 3 matrix keepargs;
>> syms f(A,B,C);
>> syms t u v;
>> syms X [3 1] matrix keepargs;
>> A=[1 0 0;0 cos(t) -sin(t);0 sin(t) cos(t)];
>> B=[cos(u) 0 -sin(u); 0 1 0 ; sin(u) 0 cos(u)];
>> C=[cos(v) -sin(v) 0; sin(v) cos(v) 0; 0 0 1];
>> A*B*C
|
ans =

[ cos(u)*cos(v), -cos(u)*sin(v), -sin(u) ]
[cos(t)*sin(v) - cos(v)*sin(t)*sin(u), cos(t)*cos(v) + sin(t)*sin(u)*sin(v), -cos(u)*sin(t)]
[sin(t)*sin(v) + cos(t)*cos(v)*sin(u), cos(v)*sin(t) - cos(t)*sin(u)*sin(v), cos(t)*cos(u)]
```

Pentru $t = \pi/6$, $u = \pi/4$, $v = \pi/3$ obținem matricea trans-

formării T

$$T = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{6}}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} - \frac{3\sqrt{2}}{8} & \frac{\sqrt{6}}{4} \end{bmatrix}$$

Secvența de program corespunzătoare este

```
>> AA=subs(A,pi/6);
>> BB=subs(B, pi/4);
>> CC=subs(C,pi/3);
>> AA*BB*CC

ans =

[      2^(1/2)/4,      -(2^(1/2)*3^(1/2))/4,      -2^(1/2)/2]
[ 3/4 - 2^(1/2)/8, (2^(1/2)*3^(1/2))/8 + 3^(1/2)/4,      -2^(1/2)/4]
[(2^(1/2)*3^(1/2))/8 + 3^(1/2)/4,      1/4 - (3*2^(1/2))/8, (2^(1/2)*3^(1/2))/4]
```

14.9 Elemente de teoria aproximării

Să presupunem că avem un spațiu de fenomene economice care depind de trei variabile x , y , z . O bună încadrare a lui ar fi un spațiu vectorial de dimensiune trei, normat, real și deci izomorf cu $\mathbb{R}^3$. Un fenomen al său ar fi un punct $M(x, y, z)$. Un model liniar simplu al spațiului economic este un plan

$$(\pi) : Ax + By + Cz + D = 0.$$

Fenomenul M îl putem aproxima în modelul nostru (π) cu punctul din plan care se află la cea mai mică distanță de M . În geometria euclidiană acest punct este P , proiecția lui M pe plan. Vom încerca să generalizăm și să formalizăm cele prezentate înainte.

Fie $(V, \|\cdot\|)$ un spațiu vectorial real, normat. Considerăm P o submulțime a lui V și punctul $x \in V$. (V poate să nu aibă dimensiune finită, de exemplu să fie un spațiu de funcții.)

Definiția 14.34. *Spunem că punctul $y_0 \in P$ este cea mai bună aproximare a lui $x \in V$ cu elemente din P dacă*

$$\|x - y_0\| \leq \|x - y\|, \quad \forall y \in P.$$

Așa ceva înseamnă că y_0 este punctul din P care are cea mai mică distanță până la x . Această cea mai bună aproximare poate să existe și să fie unică, poate să existe și să nu fie unică sau poate să nu existe.

Exemplu:

Fie $V = \mathbb{R}^3$, (π) un plan inclus în V , $x \in V \setminus (\pi)$, y_0 proiecția lui x pe (π) .

1. Dacă $P = (\pi)$ atunci y_0 este cea mai bună aproximare a lui x cu elemente din P și este unicul element cu această proprietate.
2. Dacă P este un cerc situat în planul (π) centrat în y_0 și de rază r atunci orice punct din P este o cea mai bună aproximare a lui x cu elemente din P .
3. Dacă $P = (\pi) \setminus \{y_0\}$ atunci cea mai bună aproximare a lui x cu elemente din P nu există.

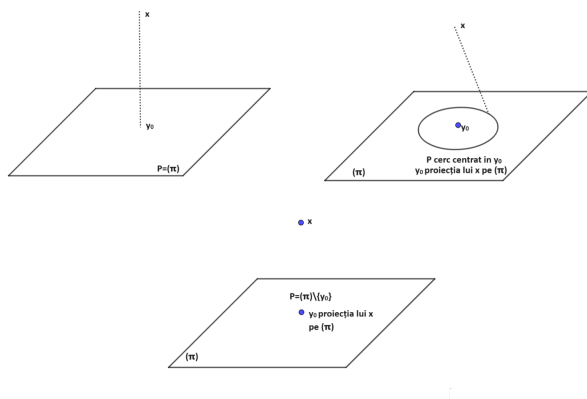


Fig. 14.4: Cea mai bună aproximare

Teorema 14.6. *Dacă P este un subspațiu finit dimensional al lui $(V, \|\cdot\|)$ atunci orice $x \in V$ admite o cea mai bună aproximare cu elemente din P .*

În plus dacă norma definită pe V provine dintr-un produs scalar atunci cea mai bună aproximare a lui x cu elemente din P este unică.

Observația 14.8. *Cea mai bună aproximare depinde de norma aleasă.*

Exemplu:

Să se determine cea mai bună aproximare cu o constantă a funcției

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x \quad \text{pe intervalul } [0, 1]$$

presupunând că pe spațiul funcțiilor avem definită norma astfel:

$$1. \|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| \quad \text{sau}$$

$$2. \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}.$$

- În primul caz trebuie să determinăm

$$\min_{c \in [0,1]} (\|f - c\|)_{\infty} = \min_c \max_{x \in [0,1]} |f(x) - c|.$$

Avem de a face cu o așa numită problemă de tip mini-max. În acest caz soluția grafică este cea mai la îndemână.

Observăm că pentru $c < \frac{1}{2}$ avem $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - c| = 1 - c > \frac{1}{2}$.

pentru $c = \frac{1}{2}$ avem $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - c| = \frac{1}{2}$,

iar pentru $c > \frac{1}{2}$ avem $\max_{x \in [0,1]} |f(x) - c| = c > \frac{1}{2}$.

Atunci, minimul după c se obține pentru $c = \frac{1}{2}$, iar cea mai bună aproximare este tot $\frac{1}{2}$.

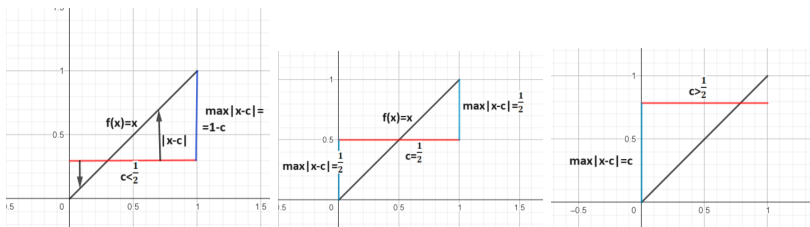


Fig. 14.5: Cea mai bună aproximare în normă infinit

- În cel de al doilea caz observăm că minimul pentru expresia

$$\sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx}$$

se obține pentru aceeași valoare ca și minimul pentru

$$\int_0^1 [f(x)]^2 dx.$$

Calculăm

$$\begin{aligned} [\|f(x) - c\|_2]^2 &= \int_0^1 (x - c)^2 dx = \int_0^1 (x^2 - 2cx + c^2) dx = \\ &= \frac{x^3}{3} - 2c \frac{x^2}{2} + c^2 x \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - c + c^2. \end{aligned}$$

Funcția $g(c) = c^2 - c + \frac{1}{3}$ are ca grafic o parabolă care își atinge minimul în $c = \frac{1}{2}$ și are o valoare minimă $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}$. În aceste condiții avem soluția:

$$\min_c \sqrt{\int_0^1 (x - c)^2 dx} = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \approx 0,289.$$

Problema 4. Să se determine cea mai bună aproximare cu o constantă a funcției $\sin(x)$ pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ folosind norma infinit și apoi folosind norma 2.

Problema 5. Să se determine cea mai bună aproximare cu o constantă a funcției $\cos(x)$ pe intervalul $[0, \frac{\pi}{2}]$ folosind norma infinit și apoi folosind norma 2.

Aproximarea în sensul celor mai mici pătrate

Definiția 14.35. Cea mai bună aproximare dintr-un subspațiu al unui spațiu vectorial înzestrat cu un produs scalar se numește aproximare în sensul celor mai mici pătrate.

Teorema 14.7. Fie V un spațiu vectorial euclidian, P un subspațiu al său finit dimensional, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$ o bază a lui P și $y \in V$ fixat. Atunci cea mai bună aproximare a lui y cu elemente din P este

vectorul $x \in P$, $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ sunt date de soluția sistemului liniar

$$\sum_{j=1}^k \langle e_i, e_j \rangle \alpha_j = \langle y, e_i \rangle, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (14.9)$$

Observația 14.9. B fiind o bază a lui P , știm că matricea A ale cărei coloane sunt vectorii $e_1, e_2, \dots, e_k$ are proprietatea

$$\det(A^T A) = \det(A) \neq 0$$

unde, în notația uzuală, A^T este transpusa matricii A . Dar

$$A^T A = G \in \mathcal{M}_k, \quad \text{cu } g_{ij} = e_i^T e_j = \langle e_i, e_j \rangle \quad i, j = 1, 2, \dots, k.$$

Rezultă că sistemul 14.9 este compatibil și unic determinat.

Matricea G a sistemului 14.9 se numește matrice Gram.

Definiția 14.36. Pentru $y \in (V, \|\cdot\|_2)$ fixat și $x \in P$ oarecare funcția în x

$$\delta(x) = \|x - y\|_2^2$$

se numește funcție normă a erorii sau abatere medie pătratică.

14.10 Regresia liniară

Dreapta de regresie

Să considerăm în plan un nor de puncte $M = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ pe care îl putem aranja sub forma următorului tabel:

$$\begin{array}{c|cccc} x & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y & y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{array}.$$

Dorim să determinăm funcția liniară $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de forma $h(x) = a + bx$ cu proprietatea că suma pătratelor distanțelor $\sum_{i=1}^n |h(x_i) - y_i|^2$ să fie minimă. Graficul lui h este o dreaptă care se numește *dreaptă de regresie*.

Vom încadra problema noastră în contextul teoremei 14.7.

Funcțiile h depind de doi parametri a, b . Atunci considerăm spațiile vectoriale reale, $\mathbb{R}^2$, spațiul polinoamelor de grad maxim unu $\mathbb{R}_1[X]$ și spațiul funcțiilor $\mathcal{F}_1 = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = a + bx\}$. Cele trei

spații sunt de dimensiune doi deci izomorfe. Izomorfismele canonice vor duce baze canonice în baze canonice astfel:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{R}_1[X]} = \{1, X\} \Leftrightarrow \mathcal{C}_{\mathcal{F}_1} = \{f_1, f_2\}.$$

cu $f_1(x) = 1$ și $f_2(x) = x$ Sunt n puncte în mulțimea M deci vom considera spațiul $\mathbb{R}^n$. Vom lua subspațiul P ca fiind un subspațiu de dimensiune doi generat de izomorfismul canonic

$$\{1, X\} \Leftrightarrow \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\}$$

În acest subspațiu se aplică teorema 14.7. Pentru $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ sistemul

este:

$$\begin{cases} \langle e_1, e_1 \rangle a + \langle e_1, e_2 \rangle b = \langle y, e_1 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle a + \langle e_2, e_2 \rangle b = \langle y, e_2 \rangle \end{cases}$$

Necunoscutele sunt a, b . După ce le determinăm, folosind tot calea izomorfismelor, găsim și funcția $h(x) = a + bx$.

Exemplu;

Să se determine dreapta de regresie atașă norului de puncte

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ \hline y & 4 & 1 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

Avem

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad e_2 = x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$\langle e_1, e_1 \rangle = 5, \quad \langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 3, \quad \langle e_2, e_2 \rangle = 7,$$

$$\langle y, e_1 \rangle = 11, \quad \langle y, e_2 \rangle = 10$$

Sistemul atașat este:

$$\begin{cases} \langle e_1, e_1 \rangle a + \langle e_1, e_2 \rangle b = \langle y, e_1 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle a + \langle e_2, e_2 \rangle b = \langle y, e_2 \rangle \end{cases}, \quad \text{deci} \quad \begin{cases} 5a + 3b = 11 \\ 3a + 7b = 10 \end{cases}$$

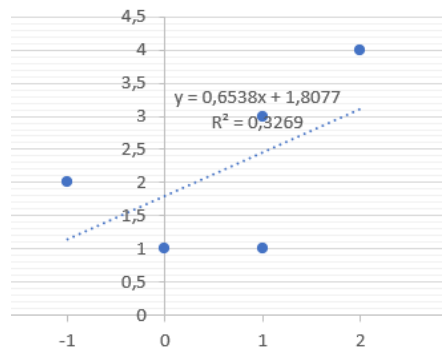


Fig. 14.6: Dreaptă de regresie

Soluția sistemului este $a = 1,807692$, $b = 0,653846$ și rezultă

$$h(x) = 1,807692 + 0,653846x$$

Graficul lui $h(x)$ este dreapta $y = 1,807692 + 0,653846x$.

Hiperplane de regresie

Pe aceleași principii putem determina și un plan de regresie. Planul de regresie este tot o regresie liniară dar în spațiu.

Exemplu:

Se consideră norul de puncte

$$M_1 = (1, 2, 0), M_2(0, 1, 2), M_3(1, 0, 3), M_4(2, 1, 2), M_5(3, 4, 1)$$

căroră le atașăm tabela

$$\begin{array}{c|ccccc} x & 1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & 2 & 1 & 0 & 1 & 4 \\ \hline z & 0 & 2 & 3 & 2 & 1 \end{array} \quad (14.10)$$

Se cere să determinăm planul de regresie

$$z = a + bx + cy.$$

Spațiul vectorial V este $\mathbb{R}^5$ iar P este subspațiul său generat de vectorii liniar independenți

$$B = \left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, e_2 = x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, e_3 = y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}$$

iar vectorul care trebuie aproximat este

$$z = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sistemul atașat este

$$\begin{cases} \langle e_1, e_1 \rangle a + \langle e_1, e_2 \rangle b + \langle e_1, e_3 \rangle c = \langle z, e_1 \rangle \\ \langle e_2, e_1 \rangle a + \langle e_2, e_2 \rangle b + \langle e_2, e_3 \rangle c = \langle z, e_2 \rangle \\ \langle e_3, e_1 \rangle a + \langle e_3, e_2 \rangle b + \langle e_3, e_3 \rangle c = \langle z, e_3 \rangle \end{cases},$$

adică

$$\begin{cases} 5a + 6b + 8c = 8 \\ 6a + 10b + 12c = 9 \\ 8a + 12b + 22c = 8 \end{cases}$$

Rezultă

$$h(x, y) = 2,2 + 0,3x - 0,6y$$

al cărei grafic este planul $z = 2,2 + 0,3x - 0,6y$.

Problema 6. Să se determine dreapta de regresie atașată tabelului

1.

x		3	2	0	-1	1
y		4	3	2	2	3

$$R: 2,3 + 0,5x.$$

2.

x		3	-1	1	1	2
y		2	1	1	2	3

$$R: 1,3636 + 0,3636x$$

Problema 7. Pornind de la tabela 14.10 să se determine planele de regresie

1. $y = a + bx + cz$

2. $x = a + by + cz$

.

Determinarea planelor de regresie folosind MATLAB pentru exemplul considerat. Considerăm vectorii:

$$u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Pentru subpunctul 1 formăm matricea $A = [u, x, z]$ și determinăm coeficienții planului cu instrucțiunea $A \backslash y$ iar pentru subpunctul următor formăm matricea $B = [u, y, z]$ și determinăm coeficienții cu instrucțiunea $B \backslash x$.

```
>> u=[1;1;1;1;1];
>> x=[1;0;1;2;2];
>> y=[2;1;0;1;4];
>> z=[0;2;3;2;1];
>> A=[u,x,z];
>> A\y

ans =

    2.1408
    0.6761
   -0.8451

>> B=[u,y,z];
>> B\x

ans =

    0.1935
    0.3871
    0.2419

>> %planele sunt y=2,1408+0,6761x-0,8451z
>> %și x=0,1935+0,3871y+0,2419z
```

Fig. 14.7: Planele de regresie $y = a_1 + b_1x + c_1z$ și $x = a_2 + b_2y + c_2z$.

14.11 Rezolvarea sistemelor supradeterminate

Definiția 14.37. *Numim sistem supradeterminat un sistem liniar în care numărul ecuațiilor este mai mare strict decât numărul necunoscutelelor.*

În general, aceste sisteme sunt incompatibile. Putem însă determina și pentru acestea o cea mai bună soluție în sensul celor mai mici pătrate.

Fie sistemul $AX = B$ unde $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}$, $B \in \mathcal{M}_{m,1}$ cu $m \geq n$. Fie $c_1, c_2, \dots, c_n$ coloanele lui A . Încercarea de a rezolva sistemul dat pe coloane se reduce la determinarea în spațiul generat de coloanele lui A a celei mai bune aproximări în sensul celor mai mici pătrate a lui B . Dacă coloanele lui A sunt liniar independente atunci ele formează o bază pentru P , subspațiul în care vom căuta soluția și $A^T A$ este inversabilă. Sistemul 14.9 se scrie matricial

$$A^T A X = A^T B$$

și are soluție unică, cea mai bună soluție în sensul celor mai mici pătrate.

Soluția este $\tilde{X} = (A^T A)^{-1} A^T B$.

Exemple:

1. Să se determine cea mai bună soluție în sensul celor mai mici pătrate pentru sistemul

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$$

Avem matricea sistemului și matricea extinsă

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}; \text{rang} A = 2; B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}; \bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{bmatrix};$$

$\text{rang} \bar{A} = 3$. Sistemul este incompatibil. Coloanele lui A fiind liniar independente formează o bază pentru spațiul P și $A^T A$ este inversabilă. Rezolvăm sistemul $A^T A X = A^T B$ unde $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ folosind softul MATLAB. Secvența de rezolvare este:

```
>> A=[1 1;1 -1;2 3];
>> B=[3;1;6];
>> X=inv(A'*A)*A'*B
```

```
X =
```

```
1.8667
0.8000
```

2. Dacă sistemul este compatibil determinat atunci cea mai bună soluție în sensul celor mai mici pătrate coincide cu soluția sistemului. Fie sistemul

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Avem $\text{rang} A = \text{rang} \overline{A} = 2$ și soluția exactă $x = 2$, $y = 1$. Repetăm calculele de la exemplul anterior și obținem:

```
>> A=[1 2;2 1;1 -1];
>> B=[4;5;1];
>> X=inv(A'*A)*A'*B
```

```
X =
```

```
2.0000
1.0000
```

■

Observație: În programele anterioare puteam determina mai simplu pe X cu instrucțiunea $\text{>> } X = A \backslash B$.

III

Calcul diferențial și integral

Capitolul 15

Elemente de calcul diferențial

15.1 Derivabilitate

Reamintim că noțiunea de funcție este în esență, fără a fi foarte riguroși, o corespondență care atașează unui element x un element $y = f(x)$

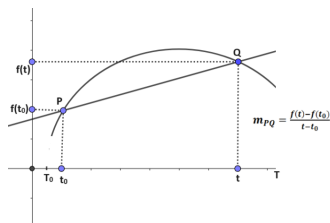
$$x \rightarrow y = f(x).$$

Atât x cât și y sunt numite variabile, x se numește variabilă independentă iar y variabilă dependentă (depinde de x). În cele ce urmează vom studia o noțiune legată de raportul dintre variația lui y când x variază într-un domeniu dat. Pentru a înțelege mai ușor noțiunile vom lua cel mai simplu exemplu și anume considerând mișcarea unui mobil într-un interval de timp. Uzual, variabila independentă fiind timpul, notația pentru ea este t . Presupunem că mișcarea începe la timpul inițial T_0 și se termină la timpul final T . Considerăm de asemenea că legea de mișcare este dată de o funcție $y = f(t)$, $t \in [T_0, T]$. Raportul asupra căruia ne vom concentra este

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad t_0, t \in [T_0, T], \quad t > t_0.$$

15.1.1 Panta secantei la graficul unei funcții

Considerăm că mișcarea unui mobil în intervalul $[T_0, T]$ este dată de o funcție $f(t)$ a cărei reprezentare grafică este $y = f(t)$. Pe graficul lui f ne alegem două puncte P și Q care au coordonatele $P(t_0, f(t_0))$ și $Q(t, f(t))$. Prin cele două puncte P și Q trece o singură dreaptă

Fig. 15.1: Panta secantei la graficul lui $y = f(x)$

numită secanta la graficul funcției. După cum știm, panta secantei este dată de

$$m_{PQ} = \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \quad (15.1)$$

iar ecuația secantei va fi dată de formula dreptei determinată de punctul $(t_0, f(t_0))$ și panta m_{PQ}

$$y - f(t_0) = m_{PQ}(t - t_0) \quad (15.2)$$

Să facem o notație care va fi foarte utilă ulterior și anume

$$h = t - t_0.$$

Mărimea h este pozitivă pentru că mereu $t > t_0$. Atunci formula dată de 15.2 devine:

$$m_{PQ} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (15.3)$$

Mărimea de la numărătorul pantei se numește deplasare și se măsoară cu unități de lungime. Ea poate să fie și negativă deci nu trebuie confundată cu distanța, mărime ce trebuie să fie mereu pozitivă. Numitorul este o mărime de tip timp și se măsoară cu unități de timp. Raportul lor este deci o mărime de tip viteză.

15.1.2 Panta tangentei la graficul funcției într-un punct dat

Vom încerca să definim tangenta la graficul funcției în punctul P ca fiind obținută prin deplasarea lui Q către P . Evident că dacă $Q \rightarrow P$ diferența $t - t_0$ este tot mai mică deci $h \rightarrow 0$. În același timp $f(t_0 + h) \rightarrow f(t_0)$. Tangenta în P o vom obține ca un proces de trecere la limită deci și panta tangentei o vom obține ca un proces de trecere la limită.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

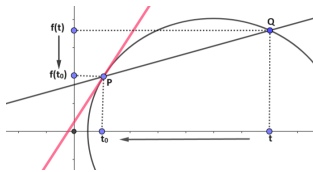


Fig. 15.2: Panta tangentei la graficul lui $y = f(x)$ în $P(t_0, f(t_0))$

Cum în această limită când $h = 0$ atât numitorul cât și numărătorul devin 0 avem o nedeterminare de forma $\frac{0}{0}$. Sunt trei posibilități:

1. Această limită există și este finită (există în $\mathbb{R}$).
2. Această limită există dar este ∞ sau $-\infty$ (există în $\overline{\mathbb{R}}$).
3. Nu există.

În continuare vom presupune că avem doar cazul când această limită există în $\mathbb{R}$. Valoarea ei ne va da panta tangentei la graficul funcției în punctul P .

$$m_P = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (15.4)$$

iar ecuația tangentei va fi

$$y - f(t_0) = m_P \cdot h.$$

15.1.3 Viteză medie

Definiția 15.1. Numim viteză medie în intervalul de timp $[t_0, t_0 + h]$ raportul dintre deplasarea în intervalul $[t_0, t_0 + h]$ și timpul consumat.

$$v_{[t_0, t_0 + h]}^{medie} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (15.5)$$

De exemplu, să presupunem că ecuația de mișcare este

$$f(t) = \frac{t-1}{t}, \quad t \in [1, 3]$$

În acest caz avem $t_0 = 1$, $t = 3$, $h = 2$. Calculul vitezei medii, făcând înlocuirile de rigoare, ne dă:

$$v_{[t_0, t_0 + h]}^{medie} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = \frac{\frac{t_0 + h - 1}{t_0 + h} - \frac{t_0 - 1}{t_0}}{h}$$

pe care o putem rescrie

$$v_{[t_0, t_0+h]}^{medie} = \left[\frac{1}{h} \left(\frac{t_0 + h - 1}{t_0 + h} - \frac{t_0 - 1}{t_0} \right) \right]$$

care după ce aducem la același numitor, efectuăm calculele și simplificăm cu h ne dă

$$v_{[t_0, t_0+h]}^{medie} = \frac{1}{t_0(t_0 + h)}$$

Calculăm

$$v_{[t_0, t_0+h]}^{medie} \Big|_{t_0=1, h=2} = v_{[1,3]}^{medie} = \frac{1}{3}$$

Dăm un alt exemplu în care vom constata că viteza medie ne va da un număr negativ. Considerăm ecuația de mișcare dată de funcția $f(t) = t^2 - 5t + 6$ și ne interesează viteza medie în intervalul de timp $[0, 1]$. Avem în acest caz $t_0 = 0$, $h = 1$ și aplicăm direct formula 15.5

$$v_{[t_0, t_0+h]}^{medie} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} = v_{[0,1]}^{medie} = \frac{f(1) - f(0)}{1} = \frac{2 - 6}{1} = -4.$$

Astfel observăm că noțiunea de viteză medie (în plan sau în spațiu) este caracterizată atât de mărime, de sens și de direcție, deci viteza medie este o mărime vectorială. Mărimea vitezei medii va fi o mărime scalară dată de modulul vitezei medii.

Observația 15.1. *Viteza medie pe intervalul $[t_0, t_0 + h]$ este dată de panta secantei la graficul funcției de deplasare dusă prin punctele $P(t_0, f(t_0))$ și $Q(t_0 + h, f(t_0 + h))$.*

15.1.4 Viteză instantanee într-un punct

Pornind de la noțiunea de viteză medie încercăm să ne definim noțiunea de viteză instantanee și anume viteza pe care o are vehiculul în punctul $P(t_0, f(t_0))$. Acest lucru nu se poate obține direct din formula vitezei medii în intervalul $[t_0, t_0 + h]$ făcându-l pe $h=0$, pentru că numitorul în expresia vitezei medii este h și dacă-l egalăm cu 0 avem o împărțire la 0, operație care nu este permisă. Observăm că și numărătorul formulei de viteză medie devine 0 dacă îl facem pe h egal cu zero astfel încât în formulă avem o nedeterminare care poate fi ridicată printr-un proces de trecere la limită.

Definiția 15.2. *Numim viteză instantanee în punctul t_0 următoarea limită*

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} v_{[t_0, t_0+h]}^{medie} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \quad (15.6)$$

dacă această limită există și este finită.

Observația 15.2. *Punem în evidență faptul că formula 15.6 care ne definește viteza instantanee în punctul t_0 coincide cu 15.4 cea care ne dă panta tangentei la graficul lui f în punctul t_0 .*

15.1.5 Rata de variație medie și rata de variație instantanee

Revenim la cazul general în care variabila dependentă, y , depinde de o variabilă independentă x care nu este în mod necesar timpul. De exemplu $y = f(x)$ poate fi dependența vâscozității unui fluid y în funcție de temperatura x , care va fi variabila independentă sau, alt exemplu, $y = f(x)$ este dependența costurilor de fabricație y în funcție de costul materiilor prime x . Ne vom concentra atenția pe raportul dintre variația lui $y = f(x)$ și variația lui x într-un domeniu dat, de exemplu $[x_0, x_0 + h]$, $h > 0$. Ca și în cazul vitezelor vom determina rata de variație medie și rata de variație instantanee.

Definiția 15.3. *Pentru o funcție f , numim rată de variație medie în domeniul $[x_0, x_0 + h]$ raportul*

$$r_{[x_0, x_0+h]}^{\text{medie}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Observația 15.3. *Ducând o secantă la graficul funcției f prin punctele $P(x_0, f(x_0))$ și $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ observăm că rata de variație medie coincide cu panta secantei PQ la graficul funcției, exact ca și în cazul vitezei medii.*

Definiția 15.4. *Pentru o funcție f , numim rată de variație instantanee în punctul $P(x_0, f(x_0))$ limita, dacă există și e finită,*

$$r(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Observația 15.4. *Ca și în cazul vitezei instantanee într-un punct, rata de variație instantanee a funcției f în raport cu variația lui x este dată, dacă există și e finită, de panta tangentei la graficul funcției $f(x)$ în punctul $P(x_0, f(x_0))$.*

15.2 Derivabilitatea unei funcții într-un punct

Definiția 15.5. Considerăm o funcție $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b) \subseteq A$. Spunem că funcția f este derivabilă în x_0 dacă

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad (15.7)$$

există și este finită. În acest caz, limita se numește derivata funcției f în x_0 .

Observația 15.5. Dacă limita 15.7 există dar este infinită spunem că funcția în acel punct admite derivată dar nu este derivabilă. Graficul funcției f are în acel punct tangentă paralelă cu axa Oy . Dacă limita nu există funcția nu este derivabilă în acel punct.

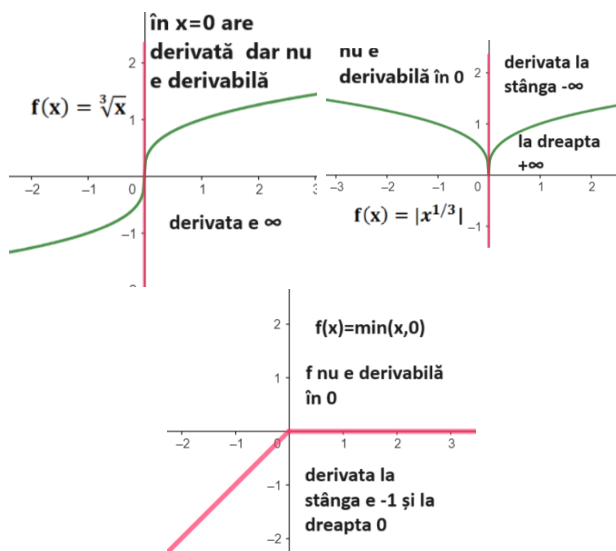


Fig. 15.3: Funcții care nu sunt derivabile în 0.

Definiția 15.6. Dacă funcția f este continuă în x_0 și

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty \quad \text{sau} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

spunem că punctul x_0 se numește punct de inflexiune.

De exemplu $x_0 = 0$ este punct de inflexiune pentru $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

15.3. ECUAȚIILE TANGENTEI ȘI NORMALEI ÎNTR-UN PUNCT LA GRAFICUL U

Definiția 15.7. Dacă funcția f este continuă în x_0 și limita la stânga

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$$

iar limita la dreapta

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty$$

sau

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\infty, \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty$$

spunem că f admite în x_0 un punct de întoarcere.

De exemplu, funcția $f(x) = |x|^{1/3}$ are în $x_0 = 0$ un punct de întoarcere.

Definiția 15.8. Dacă f este continuă în x_0 și

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \neq \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

și cel puțin una dintre limite este finită spunem că f admite în x_0 un punct unghiular.

De exemplu, $f(x) = |x|$ are în $x_0 = 0$ un punct unghiular.

Observația 15.6. Derivata funcției f în x_0 ne dă panta tangentei la graficul lui f în acel punct iar panta tangentei ne dă limita variației lui f în raport cu variația lui x când aceasta din urmă tinde către zero.

15.3 Ecuațiile tangentei și normalei într-un punct la graficul unei funcții derivabile

Considerăm o funcție care are derivată în punctul x_0 . Atunci reprezentarea ei grafică admite în punctul x_0 tangentă și normală. Ecuația tangentei o obținem imediat ca ecuația unei drepte determinată de un punct și panta sa, deci, ecuația tangentei este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0). \quad (15.8)$$

Dacă $f'(x_0)$ are valoare infinită atunci tangenta la graficul lui f este o dreaptă paralelă cu axa Oy deci ecuația ei va fi

$$x = x_0. \quad (15.9)$$

Normala la reprezentarea grafică a lui f în x_0 este dreapta care trece prin punctul $P(x_0, f(x_0))$ și e perpendiculară pe tangenta în acel punct. Ecuația normalei o vom scrie tot ca ecuația unei drepte care trece printr-un punct și are pantă dată. Tangenta și normala fiind perpendiculare între ele, avem între pantele lor relația $m_{tg} \cdot m_{no} = -1$. Atunci ecuația normalei va fi, în cazul în care panta tangentei nu este infinită sau 0:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (15.10)$$

Dacă tangenta este paralelă cu Oy atunci normala este paralelă cu Ox și are ecuația

$$y = f(x_0). \quad (15.11)$$

Dacă tangenta este paralelă cu Ox atunci normala este paralelă cu Oy și are ecuația

$$x = x_0. \quad (15.12)$$

15.4 Reguli de derivare

Definiția 15.9. Fie $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă funcția f este derivabilă în orice punct $x \in (a, b) \subset A$ spunem că f este derivabilă pe (a, b) .

Stabilim astfel o corespondență între $x \in (a, b)$ și $\mathbb{R}$ care este de tip funcție și care se numește derivata lui f . Notăția pentru funcția derivată a lui f este f' .

Pornind de la definiția derivatei unei funcții într-un punct deducem niște proprietăți ale derivatei pe care le vom numi reguli de derivare și pe care le vom utiliza la calculul derivatelor funcțiilor elementare, obținând formule de derivare.

1. *Derivata unei funcții constante este funcția nulă.*

Evident, dacă $f(x)=c$ pentru orice x în domeniul de definiție, atunci raportul

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{c - c}{h} = 0$$

Deci

$$c' = 0 \quad (15.13)$$

2. *Derivata sumei a două funcții este suma derivatelor.*

$$(f + g)' = f' + g'. \quad (15.14)$$

Demonstrația este evidentă pornind de la definiția sumei a două funcții. Fie $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile peste tot. Stim că

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Atunci

$$\begin{aligned} (f + g)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x + h) - (f + g)(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) + g(x + h) - f(x) - g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} + \frac{g(x + h) - g(x)}{h} \right] = f'(x) + g'(x). \end{aligned}$$

3. *Derivata produsului a două funcții derivabile este dată de regula*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \quad (15.15)$$

Pentru a demonstra regula pornim de la definiția produsului a două funcții $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. Avem $(f \cdot g)(x + h) = f(x + h) \cdot g(x + h)$. Atunci

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x + h) - (f \cdot g)(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) \cdot g(x + h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

Scădem și adunăm la numărător $g(x + h) \cdot f(x)$ obținând

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) \cdot g(x + h) - g(x + h) \cdot f(x) + g(x + h)f(x) - f(x) \cdot g(x)}{h} = \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \cdot g(x + h) \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{g(x + h) - g(x)}{h} \cdot f(x) \right] = \end{aligned}$$

Fracțiile tind la valoarea derivatelor, iar $g(x + h)$ tinde la $g(x)$. Obținem astfel

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

4. *Regula de derivare a câtului.*

Dacă f, g sunt derivabile atunci și $\frac{f}{g}$ este derivabilă acolo unde este definită și:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \quad (15.16)$$

Folosim aceeași tehnică pentru a demonstra formula ca în cazul produsului și anume

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)} \right]$$

aducem la același numitor, adunăm și scădem la numărător $f(x) \cdot g(x)$, grupăm convenabil termenii și obținem:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x)}{g(x+h)g(x)} \right] &= \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{g(x+h)g(x)} \left[\frac{(f(x+h) - f(x))g(x) - (g(x+h) - g(x))f(x)}{h} \right] &= \\ = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)} \end{aligned}$$

5. Derivata funcțiilor compuse

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) \quad (15.17)$$

Folosim o altă notație, foarte des utilizată pentru derivata unei funcții și anume

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Vom explica riguros mai târziu simbolurile și semnificația lor. Pentru moment să pornim de la o altă notație și anume pentru variația lui f în jurul lui x scriem

$$f(x+h) - f(x) = \Delta f(x)$$

iar pentru variația lui x scriem

$$x+h-x = \Delta x$$

Dacă îl facem pe h să tindă spre zero atunci dacă limita există și e finită

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x) \stackrel{\text{not}}{=} \frac{df(x)}{dx}. \quad (15.18)$$

Putem renunța la a evidenția că f depinde de x , relația 15.18 devenind

$$f' = \frac{df}{dx}.$$

Derivata lui f în x_0 o scriem

$$f'(x_0) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}.$$

În plus, la compunerea funcțiilor $f \circ g$ secvența

$$x \rightarrow g(x) \rightarrow f(g(x))$$

o putem rescrie

$$x \rightarrow g(x) \stackrel{not}{=} u \rightarrow f(u),$$

unde ținem cont că u este dependent de x , deci f este dependentă de x . Dacă privim pe f ca pe o funcție de u , f derivabilă, putem scrie că $f' = \frac{df}{du}$ și pentru că u este o funcție de x derivabilă, $u' = \frac{du}{dx}$. Intuitiv, avem adevărată egalitatea

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (15.19)$$

Această relație are o importanță deosebită și de aceea cititorul trebuie să o înțeleagă corect și să dobândească abilitatea de o aplica corespunzător. Relația 15.17 se demonstrează evident și direct pornind de la definiția derivatei într-un punct a funcției $f(g(x))$, înmulțind și împărțind cu $g(x+h) - g(x)$ și trecând la limită când $h \rightarrow 0$. Dăm câteva exemple. Primul foarte simplu: (i). Fie $f(x) = 2x+3$ și $g(x) = 3x-5$. Să determinăm $(f \circ g)'(x)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(u) = 2u + 3$$

$f(u)$ este partea exterioară a compunerii și $\frac{df}{du} = 2$.

$u = u(x) = 3x-5$ este partea interioară a compunerii și $\frac{du}{dx} = 3$.

Atunci

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 2 \cdot 3 = 6$$

Să considerăm alt exemplu:

(ii). Fie $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^{20}$. Să se calculeze $f'(x)$.

Și în acest caz avem o compunere de funcții și anume ceea ce este în paranteză este $u(x)$ iar funcția noastră este $f(u) = u^{20}$. Partea exterioară este $f(u)$ iar partea interioară este $u(x)$.

$$\frac{df}{du} = 20u^{19}, \quad \frac{du}{dx} = 2x - 3.$$

Deci:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 20u^{19} \cdot (2x - 3)$$

Pentru că am calculat o derivată în raport cu x , rezultatul final trebuie exprimat tot în x deci:

$$\frac{df}{dx} = 20(x^2 - 3x + 1)^{19}(2x - 3).$$

Dăm un exemplu puțin mai dificil în care folosim și regula de derivare a câtului.

(iii). Considerăm funcția

$$f(x) = \frac{(3x^2 - 2x)^2 + 1}{3x^2 - 2x + 1}.$$

Să se determine ecuația și panta tangentei la graficul funcției în punctul $x = 1$.

Funcția f este definită în punctul 1 și este raport de funcții polinomiale, derivabile, deci este derivabilă în punctul $x = 1$, de unde rezultă că tangenta la graficul funcției există iar panta ei este dată de $f'(1)$. Putem alege acum ca funcție $u(x) = 3x^2 - 2x$. atunci

$$f(u) = \frac{u^2 + 1}{u + 1}.$$

Aceasta este funcția exterioară și derivata ei în raport cu u se face după regula dată de derivarea câtului a două funcții 15.16.

$$\frac{df}{du} = \frac{2u \cdot (u + 1) - (u^2 + 1) \cdot 1}{(u + 1)^2} = \frac{u^2 + 2u - 1}{(u + 1)^2}$$

Aceasta este derivata exterioară. Derivata interioară este

$$\frac{du}{dx} = 6x - 2.$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u^2 + 2u - 1}{(u + 1)^2} \cdot (6x - 2) = \\ &= \frac{(3x^2 - 2x)^2 + 2(3x^2 - 2x) - 1}{(3x^2 - 2x + 1)^2} \cdot (6x - 2). \end{aligned}$$

Ne interesează valoarea derivatei în $x = 1$ și obținem panta tangentei

$$m = \frac{2}{1} = 2$$

Ecuatia tangentei va fi ecuatia dreptei determinate de punctul $M(1, f(1))$ și de pantă dată $m = 2$. Ecuatia va fi:

$$y - 1 = 2(x - 1).$$

6. *Derivata unei funcții de tipul $(f(x))^{g(x)}$.*

Teorema 15.1. Fie $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b)$. Dacă f, g sunt derivabile în x_0 și $f(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b)$, atunci f^g este derivabilă în x_0 și

$$\begin{aligned} (f^g)'(x_0) &= (f(x_0)^{g(x_0)}) \cdot \ln(f(x_0)) \cdot g'(x_0) + \\ &+ g(x_0) \cdot (f(x_0))^{g(x_0)-1} \cdot f'(x_0). \end{aligned} \quad (15.20)$$

Tehnica de lucru pentru a demonstra această formulă este următoarea:

Fie $h = f^g$ (ignorăm variabila pentru a urmări mai ușor demonstrația), știm că f este pozitivă strict, logaritmăm egalitatea și apoi derivăm.

$$h = f^g \Rightarrow \ln(h) = \ln(f^g) = g \ln(f), \Rightarrow \frac{h'}{h} = g' \ln(f) + \frac{f'}{f} g.$$

Înmulțim ambii membri cu $h = f^g$ și obținem:

$$h' = f^g \cdot \ln(f) \cdot g' + g \cdot f^{g-1} \cdot f' \quad (15.21)$$

Formula pare complicată dar poate fi tradusă într-un limbaj mai puțin formalizat astfel: Derivata lui $(f(x))^{g(x)}$ se calculează așa: se derivează întâi ca funcție exponențială (ca și când f este constantă, $(a^u)' = a^u \ln(a) u'$), la care adăugăm derivata ca funcție putere (ca și când g este funcție constantă, $v^r = r v^{r-1} v'$).

Exemple:

- Să se determine derivata funcției $h(x) = (3x+5)^{x^2+x+2}$, $x > 0$.

$f(x) = 3x+5$, $g(x) = x^2+x+2$. $f'(x) = 3$, $g'(x) = 2x+1$.
Aplicăm direct formula 15.21

$$\begin{aligned} h'(x) &= (3x+5)^{x^2+x+2} (\ln(3x+5)) (2x+1) \\ &+ (x^2+x+2) (3x+5)^{x^2+x+2-1} \cdot 3 \end{aligned}$$

deci:

$$h'(x) = (3x+5)^{x^2+x+1} [(3x+5)(2x+1) \ln(3x+5) + 3(x^2+x+2)].$$

15.5 Formule de derivare

Vom prezenta formulele de derivare pentru funcțiile elementare ca și pentru funcțiile compuse împreună cu exemple.

$f(x)$	Domeniu	Derivată	Funcția compusă
x^n	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}	$(u^n)' = nu^{n-1}u'$
x^r	$x > 0, r \in \mathbb{R}$	rx^{r-1}	$(u^r)' = ru^{r-1}u'$
a^x	$a > 0, a \neq 1, x \in \mathbb{R}$	$a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$
e^x	$x \in \mathbb{R}$	e^x	$(e^u)' = e^u \cdot u'$
$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$	$\cos x$	$(\sin(u))' = \cos(u) \cdot u'$
$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$	$-\sin x$	$(\cos(u))' = -\sin(u) \cdot u'$
$\operatorname{tg} x$	$x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{(2k+1)\pi}{2} \right\}$	$\frac{1}{(\cos(x))^2}$	$(\operatorname{tg}(u))' = -\frac{1}{(\cos(u))^2} \cdot u'$
$\ln x$	$x > 0$	$\frac{1}{x}$	$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$
$\log_a(x)$	$x > 0$	$\frac{1}{x \ln a}$	$(\log_a(u))' = \frac{u'}{u \cdot \ln(a)}$

Formule pentru derivarea inverselor funcțiilor trigonometrice sinus, cosinus, tangentă.

$f(x)$	Domeniu	Derivată	Funcția compusă
$\arcsin(x)$	$x \in (-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin(u))' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos(x)$	$x \in (-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos(u))' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg}(x)$	$x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$(\operatorname{arctg}(u))' = \frac{u'}{1+u^2}$

Exerciții rezolvate

1.

$$f(x) = x^r, \quad f'(x) = rx^{r-1}$$

Exemple: $(x^7)' = 7x^6$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4}$$

$$\left(\sqrt[4]{x^3}\right)' = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

Exemple și pentru funcții compuse

Să se determine derivata funcției $f(x) = (3x^2 - x)^5$.

Considerăm funcția interioară $u(x) = 3x^2 - x$ iar funcția exterioară $f(u) = u^5$. Atunci:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 5u^4 \cdot (6x - 1) = 5(3x^2 - x)(6x - 1).$$

Să se determine derivata funcției $f(x) = \sqrt{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1}$. Exercițiul este mai complicat pentru că avem o dublă compunere. Notăm $v(x) = x^2 + 1$, $u(v) = \sqrt[3]{v} + 1$ și $f(u) = \sqrt{u}$. Regula de derivare este în acest caz

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{v^2}} \cdot 2x = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \cdot 2x = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\sqrt[3]{x^2 + 1} + 1}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(x^2 + 1)^2}} \cdot 2x \end{aligned}$$

$$2. \quad f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x; \quad f(u) = e^u, \quad \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot u'$$

Exemple:

Să se determine panta tangentei la graficul funcției $f(x) = e^{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}$ în punctul $x = 4$.

Funcția este derivabilă în $x = 4$. Ea este o funcție compusă. Interiorul ei este $u(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ iar exteriorul este $f(u) = e^u$

Atunci:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = e^u \cdot \frac{\sqrt{x} - (x+1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = e^{\frac{x+1}{\sqrt{x}}} \cdot \frac{x-1}{2x\sqrt{x}}$$

Panta tangentei la graficul funcției în punctul $x = 4$ este dată de

$$m_{(x=4)} = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=4} = \frac{3}{16} e^{\frac{5}{2}}.$$

3. Legea de mișcare a unui mobil este dată de funcția $f(x) = \cos^2\left(t^2 + \frac{\pi}{2}\right)$. Să se determine viteza sa la momentul $t = \sqrt{\pi}$. Legea de mișcare este dată de două compuneri. Funcția interioară este $w(t) = t^2 + \frac{\pi}{2}$, funcția intermediară este $u(w) =$

$\cos(w)$ iar funcția exterioară este $f(u) = u^2$. Viteza mobilului la momentul $t = \sqrt{\pi}$ este dată de $\frac{df}{dt}|_{t=\sqrt{\pi}}$.

$$\begin{aligned}\frac{df}{dt} &= \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dw} \cdot \frac{dw}{dt} = 2u \cdot (-\sin(w)) \cdot 2t = 2u \cdot \left[-\sin\left(t^2 + \frac{\pi}{2}\right) \right] \cdot 2t = \\ &= -2\cos\left(t^2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(t^2 + \frac{\pi}{2}\right) \cdot 2t\end{aligned}$$

care în punctul $t = \sqrt{\pi}$ este 0 pentru că $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

4. Să se arate că dacă legea de mișcare a unui mobil este dată de funcția $f(t) = (\operatorname{tg} t)^3$, pentru $t \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ atunci viteza mobilului este mai mică sau egală cu 6 m/s.

Calculăm viteza mobilului $\frac{df}{dt}$. Legea de mișcare este dată de o funcție compusă, cea interioară fiind $u(t) = \operatorname{tg}(t)$ iar cea exterioară $f(u) = u^3$. Atunci

$$\frac{df}{dt} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dt} = 3u^2 \cdot \frac{1}{(\cos t)^2} = \frac{3(\operatorname{tg} t)^2}{(\cos t)^2} = 3(\sin t)^2.$$

Pe intervalul $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ funcția $\sin t$ este strict crescătoare, deci funcția viteză $\frac{df}{dt}$ este strict crescătoare. În $t = 0$ ea se anulează iar în $t = \frac{\pi}{4}$ are valoarea 6.

5. Să se determine derivata funcției $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x})$.
Avem de a face cu o funcție compusă. Partea interioară este $u(x) = \sqrt{x}$ iar partea exterioară este $f(u) = \operatorname{arctg}(u)$. Atunci:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6. Să se afle ecuațiile tangentei și normalei la funcția

$$f(x) = \frac{(2x+1)^2(x+1)}{(x^4+2)^2}$$

în punctul $x=1$.

Programul MATLAB, comentat, pentru rezolvarea acestei probleme este:

```

>> syms x y %x și y sunt variabile simbolice
>> f=((2*x+1)^2*(x+1))/(x^4+2)^2; %funcția f
>> f1=diff(f,x); %calculul derivatei lui f în raport cu x
>> m=subs(f1,x,1); %panta tangentei e f1(x) în x=1
>> n=-1/m; %panta normalei în x=1
>> %determinarea ecuației tangentei în x=1
>> eqtg=y-subs(f,1)==m*(x-1);
>> %cea mai simplă forma a ecuației tangentei în x=1
>> simplify(eqtg)

ans =

5*x + 3*y == 11

>> % determinarea ecuației normalei în x=1
>> eqno=y-subs(f,1)==n*(x-1);
>> % cea mai simplă formă a ecuației normalei în x=1
>> simplify(eqno)

ans =

3*x + 7 == 5*y

```

Calculăm direct. Avem pentru $x > 0$ că $f(x) > 0$. Logaritmăm.

$$h(x) = \ln(f(x)) = \ln(2x+1)^2 + \ln(x+1) - 2\ln(x^4+2)$$

Derivăm:

$$h'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \cdot \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{8x^3}{(x^4+2)}$$

În $x = 1$ avem

$$\frac{f'(1)}{2} = \frac{4}{3} + \frac{1}{2} - \frac{8}{3}$$

Efectuăm calculele și obținem

$$\frac{f'(1)}{2} = -\frac{5}{6}, \quad \rightarrow \quad f'(1) = -\frac{5}{3}.$$

Ecuația tangentei în $x = 1$ va fi:

$$y - f(1) = f'(1)(x - 1), \quad y - 2 = -\frac{5}{3}(x - 1),$$

$$3y + 5x - 11 = 0,$$

iar ecuația normalei va fi:

$$y - f(1) = -\frac{1}{f'(1)}(x - 1), \quad y - 2 = \frac{3}{5}(x - 1),$$

$$5y - 3x - 7 = 0.$$

15.6 Diferențiabilitatea și diferențiala

Definiția 15.10. Considerăm o funcție $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b)$. Spunem că f este diferențiabilă în x_0 dacă există o constantă reală A și o funcție $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, continuă în x_0 și cu $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$ astfel încât pentru orice $x \neq x_0$ să avem

$$f(x) = f(x_0) + A(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0). \quad (15.22)$$

Definiția 15.11. Dacă f este diferențiabilă în orice punct din (a, b) spunem că f este diferențiabilă pe (a, b) .

Teorema 15.2. Funcția f este diferențiabilă în x_0 dacă și numai dacă f este derivabilă în x_0 .

Demonstrația teoremei ne conduce la egalitatea $A = f'(x_0)$. Rescriem egalitatea dată de definiția diferențiabilității, 15.22, și folosim observația anterioară referitoare la A .

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)](x - x_0).$$

Termenul $\alpha(x)(x - x_0)$ este neglijabil într-o vecinătate strânsă a lui x_0 deci putem să scriem:

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Pentru $x = x_0 + h$ avem:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0) \cdot h.$$

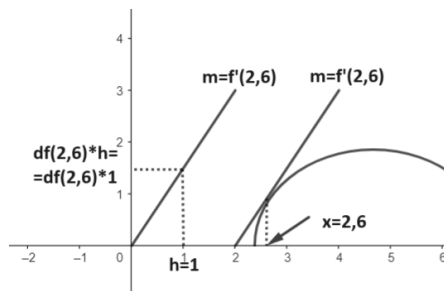
Definiția 15.12. Funcția liniară care asociază lui h pe $f'(x_0) \cdot h$, definită pentru orice $h \in \mathbb{R}$, se numește diferențiala lui f în x_0 și se notează $df(x_0)$.

Observația 15.7. Diferențiala $df(x_0)$ este o funcție liniară în variabila h și avem

$$(df(x_0))(h) = f'(x_0) \cdot h.$$

Astfel $df(x_0)$ este aproximația liniară a diferenței $f(x_0 + h) - f(x_0)$.

Observația 15.8. Derivata lui f în punctul x_0 este o constantă în timp ce $df(x_0)$ este o funcție liniară.

Fig. 15.4: $df(x)(h)$.

Considerăm f diferențibilă pe (a, b) și funcția identitate

$$\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x$$

Cum φ este diferențibilă peste tot și $\varphi'(x) = 1 \quad \forall x$, rezultă că

$$d\varphi(x)(h) = h.$$

Atunci pentru fiecare punct x în care f este diferențibilă avem

$$\frac{(df(x))(h)}{(d\varphi(x))(h)} = \frac{f'(x) \cdot h}{h} = f'(x).$$

Prin abuz de limbaj notăm $d\varphi(x) = dx$ și egalitatea anterioară devine

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} \quad \text{sau} \quad df(x) = f'(x)dx.$$

Dacă renunțăm la variabila x ultima relație devine

$$df = f'dx. \quad (15.23)$$

Teorema 15.3. *Diferențiala respectă aceleași reguli ca și derivarea:*

$$1. \quad d(f + g) = df + dg.$$

$$2. \quad d(f \cdot g) = g \cdot df + f \cdot dg.$$

$$3. \quad d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \cdot df - f \cdot dg}{g^2}.$$

$$4. \quad \text{Dacă } f(x) = f(u(x)) \text{ atunci } \frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \frac{du}{dx}. \text{ În acest mod definim corect și derivarea funcțiilor compuse.}$$

Exemple:

1. Să se calculeze $df(1)$ pentru $f(x) = x^2 + e^x$.

$$df(1)(h) = f'(1) \cdot h, \quad df(1)(h) = (2x + e^x)|_{x=1} \cdot h = (2 + e) \cdot h.$$

2. Să se calculeze $df(2)(0,01)$ pentru $f(x) = \frac{e^x - 1}{x^2}$.

$$df(x)(h) = f'(x) \cdot h = \frac{e^x \cdot x^2 - 2x(e^x - 1)}{x^4} \cdot h = \frac{xe^x - 2e^x + 2}{x^3} \cdot h$$

Atunci:

$$df(2)(0,01) = \frac{2e^2 - 2e^2 + 2}{2^3} \cdot 0,01 = \frac{2}{8} \cdot 0,01 = 0,25 \cdot 0,01 = 0,0025$$

15.7 Teoremele lui Fermat, Rolle, Cauchy, Lagrange

15.7.1 Puncte de extrem local

Definiția 15.13. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ și $x_0 \in (a, b)$. Spunem că punctul x_0 este punct de maxim local dacă există un interval deschis $(c, d) \subseteq (a, b)$ astfel încât

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in (c, d).$$

Punctul x_0 se numește punct de minim local dacă există un interval deschis $(\alpha, \beta) \subseteq (a, b)$ astfel încât

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in (\alpha, \beta).$$

Punctele de maxim local sau de minim local se numesc puncte de extrem local.

Punctul x_0 se numește punct de maxim global pentru $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dacă

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b].$$

Punctul x_0 se numește punct de minim global pentru f dacă

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \forall x \in [a, b].$$

Un punct de maxim global sau de minim global se numește punct de extrem global.

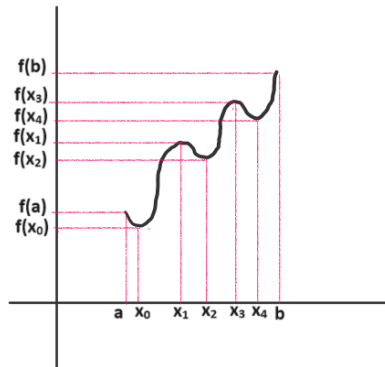


Fig. 15.5: Extreme locale, extreme globale

Observația 15.9. *Un punct de extrem local nu este neapărat un punct de extrem global.*

Un punct de extrem global poate să fie și unul dintre capetele intervalului $[a, b]$.

Valoarea funcției f într-un punct de minim local poate să fie mai mare decât valoarea funcției într-un punct de maxim local pentru că noțiunea de local implică doar o vecinătate a punctului x_0 .

Considerăm funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ al cărei grafic este reprezentat în 15.5. Punctele menționate sunt:

- a - nu este punct de extrem
- $x_0 \in (a, b)$ este punct de minim local dar și punct de minim global. În x_0 funcția are cea mai mică valoare
- $x_1 \in (a, b)$ este punct de maxim local.
- $x_2 \in (a, b)$ este punct de minim local.
- $x_3 \in (a, b)$ este punct de maxim local.
- $x_4 \in (a, b)$ este punct de minim local. Se observă că valoarea funcției în acest punct de minim local este mai mare decât valoarea funcției în x_1 unde funcția are un punct de maxim local.
- b este punct de maxim global fiind punctul în care f ia cea mai mare valoare.

15.7.2 Teorema lui Fermat

Teorema 15.4. (Fermat) Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ și x_0 un punct de extrem local al funcției f . Dacă f este derivabilă în x_0 atunci $f'(x_0) = 0$.

Observația 15.10. Reciproca teoremei lui Fermat nu este în general adevărată.

De exemplu, funcția $f(x) = x^5$ deși e derivabilă în $x = 0$ și derivata sa se anulează în $x = 0$ nu are pe $x = 0$ punct de extrem local.

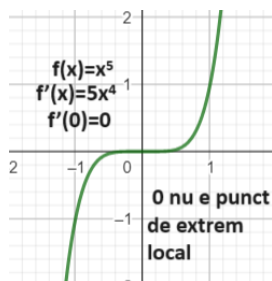


Fig. 15.6: 0 nu e punct de extrem local pentru $f(x) = x^5$.

Definiția 15.14. Soluțiile ecuației $f'(x) = 0$ se numesc puncte critice ale funcției f .

Observația 15.11. Punctele de extrem local ale unei funcții se găsesc, în general, printre rădăcinile ecuației $f'(x) = 0$ sau în puncte în care f nu e derivabilă sau în capetele finite ale domeniului de definiție.

Observația 15.12. În punctele de extrem local ale unei funcții derivabile tangenta la graficul funcției este paralelă cu axa Ox .

Aplicație: Să se precizeze punctele de extrem ale funcției $f(x) = |x^2 - 6x + 5|$ și să se determine care dintre ele respectă Teorema lui Fermat.

Funcția se scrie ca o funcție etajată astfel:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + 4 & x \in (-\infty, 1) \\ -x^2 + 5x - 4 & x \in [1, 5] \\ x^2 - 5x + 4 & x \in (5, \infty) \end{cases}$$

Graficul ei este:

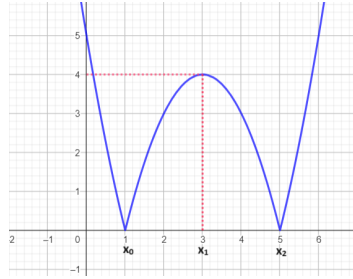


Fig. 15.7: Aplicație la teorema lui Fermat

- Punctul $x_0 = 1$ este un punct de minim local, este un punct de minim global. El este un punct unghiular pentru că tangentele la graficul lui f în $x_0 = 1$ sunt distincte și cu pantă finită deci f nu e derivabilă în acest punct. Teorema lui Fermat nu se aplică.
- Punctul $x_1 = 3$ este punct de maxim local. Funcția f este derivabilă în acest punct și $f'(3) = 0$. Teorema lui Fermat este verificată.
- La fel ca punctul $x_0 = 1$ și punctul $x_2 = 5$ este punct de minim local, punct de minim global, funcția nu este derivabilă în el fiind un punct unghiular iar Teorema lui Fermat nu se aplică.

15.7.3 Funcții monotone pe un interval

Teorema 15.5. Fie $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe domeniul său de definiție.

1. Dacă funcția este crescătoare pe (a, b) atunci funcția derivată este pozitivă pe (a, b) .
2. Dacă funcția este descrescătoare pe (a, b) atunci funcția derivată este negativă pe (a, b) .

Observația 15.13. Dacă funcția f este strict monotonă pe (a, b) nu putem spune că derivata sa este strict diferită de zero.

Exemple:

- 1) Funcția $f(x) = x^3$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ iar derivata sa este pozitivă dar se anulează în $x = 0$.
- 2) Funcția $f(x) = \ln(x)$ este strict crescătoare pe $(0, \infty)$ iar derivata sa, $f'(x) = \frac{1}{x}$ este pozitivă și nu se anulează pe $(0, \infty)$.

15.7.4 Teorema lui Rolle

Teorema 15.6. (Rolle) Fie funcția $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

1. f este continuă pe $[a, b]$,
2. f este derivabilă pe (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$,

atunci există $c \in (a, b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Consecințe:

1. Între două rădăcini consecutive ale ecuației $f(x) = 0$ există cel puțin o rădăcină a derivatei $f'(x)$.
2. Între două rădăcini consecutive ale derivatei $f'(x)$ există cel mult o rădăcină a funcției $f(x)$.

Exemple:

1. Să se separe rădăcinile reale ale ecuației

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 17 = 0$$

Calculăm derivata funcției

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 - 12x + 24$$

Determinăm rădăcinile derivatei

$$12(x^3 - 2x^2 - x + 2) = 0$$

Simplificăm cu 12 și observăm că suma coeficienților polinomului rămas este zero deci acesta admite soluția $x = 1$.

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 1)(x^2 - x - 2).$$

Rădăcinile derivatei sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Determinăm semnul funcției f în punctele $-\infty$, -1 , 1 , 2 , ∞ .

x		$-\infty$	-1	1	2	∞
$f(x)$		$+$	$-$	$+$	$+$	$+$

Avem în tabelul de variație a semnelor două schimbări de semn deci ecuația noastră are două rădăcini reale, una în intervalul $(-\infty, -1)$ și una în intervalul $(-1, 1)$. Dăm și o reprezentare grafică a funcției f obținută cu softul GEOGEBRA CLASIC.

Observăm pe grafic că ecuația $f(x) = 0$ are 2 rădăcini reale situate în intervalele $(-\infty, -1)$ și $(-1, 1)$ așa cum ne dă consecința teoremei lui Rolle. Dar, din grafic, vedem că putem separa mai bine soluțiile în intervalele $(-2, -1)$ și $(-1, 0)$.

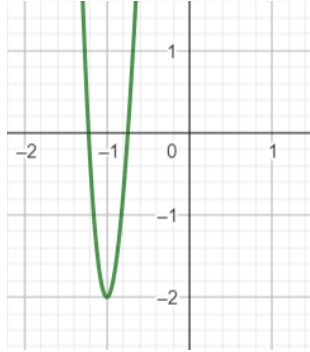


Fig. 15.8: Graficul funcției $f(x) = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + 17$.

15.7.5 Teorema lui Cauchy

Teorema 15.7. (Cauchy) Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

1. f, g sunt continue pe $[a, b]$,
2. f, g sunt derivabile pe (a, b) ,
3. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$,

atunci $g(a) \neq g(b)$ și există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Consecință: În condițiile teoremei lui Cauchy, dacă $f(a) = g(a) = 0$ atunci pentru orice $x \in (a, b)$, există un punct $c \in (a, x)$ astfel încât

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

15.7.6 Teorema lui Lagrange

Teorema 15.8. (Lagrange) Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dacă

1. f este continuă pe $[a, b]$,
2. f este derivabilă pe (a, b) ,

atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

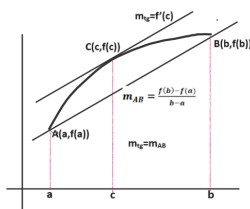


Fig. 15.9: Teorema lui Lagrange.

Interpretarea geometrică a acestei teoreme spune că dacă funcția f îndeplinește condițiile 1. și 2., atunci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât panta tangentei la graficul funcției în punctul $C(c, f(c))$ este egală cu panta dreptei determinată de punctele $A(a, f(a))$ și $B(b, f(b))$.

Consecințe:

Teorema 15.9. 1. Dacă f are derivata nulă pe un interval atunci ea este constantă pe acel interval.

2. Dacă f și g sunt două funcții derivabile pe (a, b) și dacă $f'(x) = g'(x) \quad \forall x \in (a, b)$ atunci funcțiile f și g diferă printr-o constantă.

3. Dacă f este derivabilă pe (a, b) și $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ atunci f este descrescătoare pe (a, b) .

4. Dacă f este derivabilă pe (a, b) și $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$ atunci f este crescătoare pe (a, b) .

15.8 Puncte staționare, puncte de extrem local

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilă pe (a, b) . Reamintim că un punct $x_0 \in (a, b)$ în care derivata se anulează se numește punct critic sau punct staționar.

Propoziția 15.1. Fie x_0 un punct critic pentru funcția f . El este punct de extrem local dacă derivata schimbă semnul în x_0 .

Observația 15.14. Dacă în jurul lui x_0 derivata are semnele $-0+$ atunci x_0 este punct de minim local.

Dacă în jurul lui x_0 derivata are combinația de semne $+0-$ atunci x_0

este un punct de maxim local.

Dacă derivata funcției f păstrează semn constant pe (a, b) , atunci punctele a și b sunt puncte de extrem global și anume dacă derivata este pozitivă atunci a este minim global iar b este punct de maxim global și dacă derivata este negativă, atunci a este punct de maxim global iar b este minim global.

Observația 15.15. Dacă funcția f este continuă în x_0 dar nu este derivabilă, atunci punctul x_0 este punct de întoarcere sau punct unghiular și poate să fie punct de extrem.

Aplicații

1. Să se determine intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru funcția $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

Avem de a face cu o funcție polinomială definită pe un interval închis. Ea este continuă $[0, 3]$ și derivabilă pe $(0, 3)$, admite derivată finită la dreapta în 0 și la stânga în 3. Pentru a determina intervalele de monotonie și punctele de extrem calculăm derivata funcției, o egalăm cu zero, aflăm rădăcinile, semnul derivatei și apoi deducem intervalele de monotonie și punctele de extrem local și în final pe cele de extrem global.

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3; \quad 3x^2 - 8x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{7}}{3}.$$

Observăm că $x_1, x_2 \in (0, 3)$ Alcătuim următorul tabel:

x	0		x_1		x_2		3
$f'(x)$	///	+	0	-	0	+	///
$f(x)$	///	1	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$ 1 ///

Pe prima linie punem valorile variabilei x (capetele intervalului de definiție, și punctele unde se anulează derivata)

Pe linia a doua punem derivata lui f cu variația ei de semn.

Pe linia a treia punem valorile funcției în capetele domeniului de definiție, schematic monotonia funcției și punctele de extrem local dacă există. În final stabilim și care sunt punctele de extrem global.

Tabelul ne indică faptul că funcția nu e derivabilă în 0 și 3. Pe linia a treia observăm că funcția ia valoarea 1 în 0, apoi este

strict crescătoare, are un punct de maxim, este în continuare strict descrescătoare, are un punct de minim iar de la valoarea de minim crește până la $1=f(3)$. În concluzie, punctele de extrem local, în acest caz sunt și puncte de extrem global.

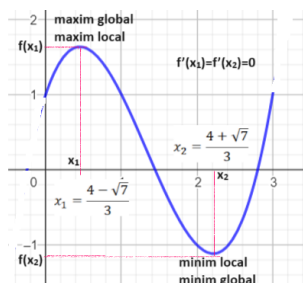


Fig. 15.10: Graficul funcției $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$, $x \in [0, 3]$.

2. Să se studieze monotonia și punctele de extrem ale funcției

$$f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2 - 1.$$

Procedăm ca și în cazul precedent. Funcția este derivabilă pe $(-1, 2)$, derivata este $f'(x) = 2x$ și se anulează în $x_1 = 0$ fiind negativă până la 0 și pozitivă pentru $x > 0$. Tabelul atașat este:

x	-1		$x_1 = 0$		2	
$f'(x)$	///	-	0	+	///	
$f(x)$	///	1 ↘	m	↗ 3	///	

Derivata este negativă pentru $-1 < x < 0$, se anulează în $x_1 = 0$

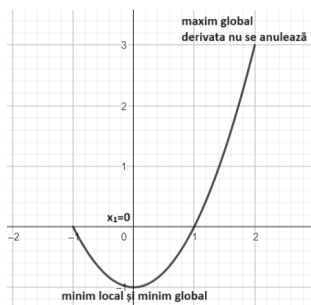


Fig. 15.11: Graficul funcției $f(x) = x^2 - 1$, $x \in [-1, 2]$.

și apoi este pozitivă pentru $0 < x < 2$. Funcția admite un

minim local în $x_1 = 0$. $x_1 = 0$ este și minim global. Punctul $x=2$, capătul domeniului de definiție (funcția așa definită nu e derivabilă în $x=2$) este un punct de maxim global.

3. Să se stabilească monotonia și punctele de extrem pentru funcția

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \leq 1 \\ \ln(x + e - 1) & x > 1 \end{cases} \quad (15.24)$$

Funcția este continuă în punctul $x = 1$ pentru că $\lim_{x \nearrow 1} f(x) = 1$, $f(1) = 1$, $\lim_{x \searrow 1} f(x) = 1$ și nu este derivabilă în $x = 1$ pentru că derivata la stânga este diferită de derivata la dreapta, ambele valori fiind finite. Punctul $x = 1$ este punct unghiular. Funcția nu admite puncte de extrem.

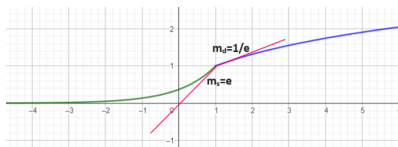


Fig. 15.12: Graficul funcției $f(x)$ dat de sistemul 15.24

4. Să se determine punctele de extrem pentru funcția

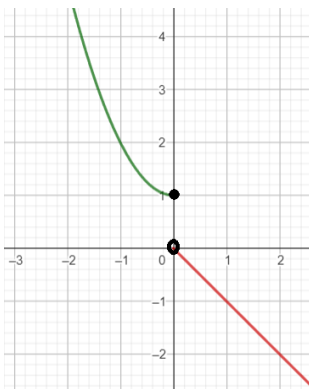
$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ -x & x > 0 \end{cases} \quad (15.25)$$

Funcția nu este continuă în $x = 0$, este peste tot descrescătoare strict deci nu are puncte de extrem.

15.9 Derivate de ordin superior

Fie $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție derivabilă pe A , f' derivata sa și x_0 un punct din A . Dacă f' este derivabilă în x_0 spunem că f este derivabilă de două ori în x_0 . Derivata lui f' în punctul x_0 o vom nota cu $f''(x_0)$. Dacă f' este derivabilă în orice punct din A spunem că f este de două ori derivabilă. Pentru derivata de ordinul al doilea avem notația $(f')' = f''$ sau folosind notația cu diferențiale

$$f'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Fig. 15.13: Graficul funcției $f(x)$ dat de 15.25

Teorema 15.10. *Dacă $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ sunt două funcții derivabile de două ori pe (a, b) atunci funcțiile $f + g$, αf $\alpha \in \mathbb{R}$, fg sunt de două ori derivabile pe (a, b) și avem formulele:*

$$(f + g)'' = f'' + g''; \quad (\alpha f)'' = \alpha f''; \quad (15.26)$$

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + g''f \quad \text{Formula lui Leibniz} \quad (15.27)$$

$$(f(g(x)))'' = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x). \quad (15.28)$$

Exemple:

1. Derivatele de ordinul al doilea pentru funcțiile elementare sunt

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
$x^r, \quad x > 0$	rx^{r-1}	$r(r-1)x^{r-2}$
e^x	e^x	e^x
a^x	$a^x \ln(a)$	$a^x (\ln(a))^2$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\operatorname{tg}(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$	$2\operatorname{tg}(x)[1 + \operatorname{tg}^2(x)] = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$
$\operatorname{arctg}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	$-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

1. Să se calculeze derivata de ordinul al doilea pentru funcțiile:

$$x^3 + 2x + 1; \quad x^2 \sin(x); \quad \sin(x^2).$$

Avem:

$$(x^3 + 2x + 1)'' = (3x^2 + 2)' = 6x.$$

$$(x^2 \cos(x))'' = (2x \sin(x) + x^2 \cos(x))' = 2 \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x).$$

sau aplicând direct formula lui Leibniz

$$\begin{aligned} (x^2 \sin(x))'' &= 2 \sin(x) + 2 \cdot 2x \cdot \cos(x) + x^2(-\sin(x)) = \\ &= 2 \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\sin(x^2))'' &= (\cos(x^2) \cdot 2x)' = -\sin(x^2) \cdot 2x \cdot 2x + \cos(x^2) \cdot 2 = \\ &= -4x^2 \sin(x^2) + 2 \cos(x^2). \end{aligned}$$

15.10 Rolul derivatei a doua în studiul funcțiilor

15.10.1 Interiorul și sensul direct de parcurgere a unei curbe plane

Considerăm o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabilă de două ori pe (a, b) , având graficul $\mathcal{G}_f$, un punct $x_0 \in (c, d) \subseteq (a, b)$, tangenta și normala la $\mathcal{G}_f$ în x_0 . Intervalul (c, d) îl alegem astfel încât graficul să poată avea numai două situații față de tangentă:

1. Graficul este situat de aceeași parte a tangentei în x_0 . Vectorul director al normalei situat de aceeași parte a tangentei ca și curba îl vom numi normală principală. Curba definește la rândul său două regiuni în plan, una conținând normala principală. Definim interiorul curbei zona care conține normala principală. Numim sens pozitiv de deplasare pe $\mathcal{G}_f$ sensul în care interiorul curbei rămâne în stânga (este o convenție).

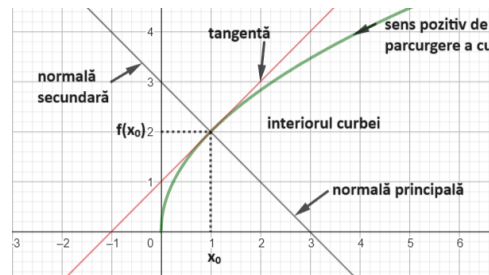


Fig. 15.14: Normală principală, interior, sens de parcurgere

2. Până la x_0 graficul este situat de o parte a tangentei iar de la x_0 încolo el este situat de cealaltă parte a tangentei. În acest caz punctul x_0 se numește punct de inflexiune al graficului funcției.

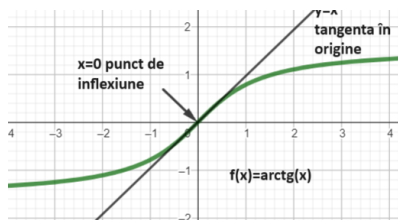


Fig. 15.15: Punct de inflexiune pentru funcția $f(x) = \arctg(x)$.

15.10.2 Convexitatea și concavitățile unei funcții

Definiția 15.15. O funcție derivabilă pe intervalul (a, b) se numește *convexă* pe (a, b) dacă tangenta la graficul funcției se află sub grafic în orice punct din (a, b) .

Definiția 15.16. O funcție derivabilă pe intervalul (a, b) se numește *concavă* pe (a, b) dacă tangenta la graficul funcției se află deasupra graficului în orice punct din (a, b) .

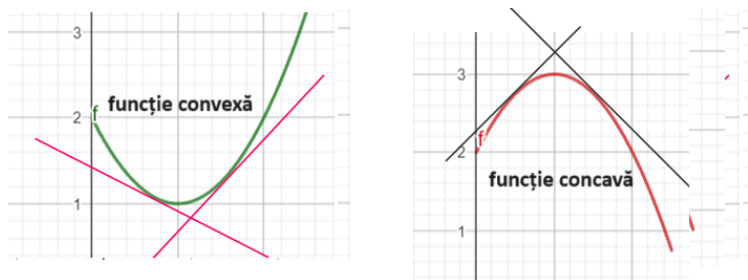


Fig. 15.16: Convexitate și concavități

O imagine sugestivă pentru cele două tipuri de funcții este

Funcție convexă — ține apă, Funcție concavă — nu ține apă.

15.10.3 Rolul derivatei a doua în determinarea convexității sau concavității unei funcții

Teorema 15.11. Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție de două ori derivabilă pe (a, b) .

1. f este convexă pe (a, b) dacă și numai dacă $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.
2. f este concavă pe (a, b) dacă și numai dacă $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$.

În concluzie, determinarea intervalelor de convexitate sau concavitate ale unei funcții de două ori derivabile se reduce la determinarea intervalelor pe care a doua derivată a funcției f are semn constant.

Exemple:

1. Să se stabilească intervalele de convexitate, concavitate și punctele de inflexiune ale funcției $f(x) = \arctg(x)$.

Funcția este definită și de două ori derivabilă pe $\mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad f''(x) = 0 \rightarrow x = 0.$$

x	$-\infty$	0	∞
$f''(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f''(x) = 0$	$+$ 0 $-$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f''(x) = 0$
$f(x)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2}$	$\cup$ 0 $\cap$	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$

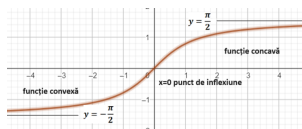


Fig. 15.17: Graficul funcției $\arctg(x)$

Funcția este convexă pe intervalul $(-\infty, 0)$, concavă pe intervalul $(0, \infty)$ și are în $x = 0$ un punct de inflexiune.

2. Să se stabilească intervalele de concavitate, convexitate și punctele de inflexiune pentru funcția $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$.

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}; \quad f''(x) = \frac{2(x^3-3x)}{(x^2+1)^3};$$

$$f''(x) = 0, \quad x_1 = -\sqrt{3}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{3}.$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	∞
$f''(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$	$\frown$	$\frown$	$\smile$	$\smile$	$\smile$

Funcția este concavă pe intervalul $(-\infty, -\sqrt{3})$, admite un punct inflexiune în $-\sqrt{3}$, apoi este convexă pe $(-\sqrt{3}, 0)$, în $x = 0$ are punct de inflexiune, este concavă pe $(0, \sqrt{3})$, are punct de inflexiune în $\sqrt{3}$ și este convexă până la ∞ .

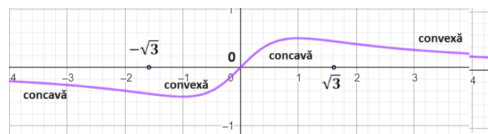


Fig. 15.18: Graficul funcției $\frac{x}{x^2 + 1}$

15.10.4 Rolul derivatei a doua în studiul punctelor critice ale unei funcții de două ori derivabile

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de două ori derivabilă pe (a, b) și x_0 un punct critic al lui f .

Definiția 15.17. Spunem că punctul x_0 este punct critic nedegenerat dacă $f''(x_0) \neq 0$ și este degenerat dacă $f''(x_0) = 0$.

Teorema 15.12. Fie x_0 un punct critic al funcției f de două ori derivabilă.

1. Dacă $f''(x_0) > 0$ atunci x_0 este un punct de minim local.
2. Dacă $f''(x_0) < 0$ atunci x_0 este un punct de maxim local.
3. Dacă $f''(x_0) = 0$ informația nu este suficientă pentru a decide natura punctului critic.

Exemple:

1. Să se studieze natura punctelor critice ale funcției $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 1, \quad f'(x) = 0 \quad x_1 = \frac{1}{3} \quad x_2 = 1,$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) < 0 \quad x_1 \text{ punct de maxim}$$

$$f''(x) = 6x - 4, \quad f''(1) = 2 > 0 \quad x_2 \text{ punct de minim}$$

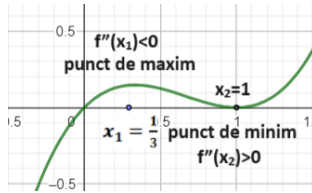


Fig. 15.19: Graficul funcției $f(x) = x^3 - 2x^2 + x$

2. Să se studieze natura punctelor critice ale lui
 $f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$.

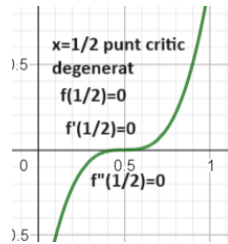


Fig. 15.20: Punct critic degenerat

$$f'(x) = 24x^2 - 24x + 6, \quad f'(x) = 0, \quad x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$$

Avem un punct critic $x_1 = \frac{1}{2}$.

$$f''(x) = 48x - 24, \quad f''(x_1) = 0, \text{ punct critic degenerat}$$

Capitolul 16

Calcul integral

16.1 Primitiva, integrala nedefinită

Definiția 16.1. Fie $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I interval. Spunem că funcția f admite primitivă dacă există o funcție $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietățile:

1. F este derivabilă pe I ;
2. $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$.

Funcția F se va numi primitivă a funcției f .

Teorema 16.1. Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ este continuă pe I atunci ea admite primitivă.

Cele prezentate anterior conduc la cele două probleme esențiale ale Analizei Matematice

1. Problema fundamentală a calculului diferențial este:

Dacă se dă funcția $F(x)$ să se găsească funcția derivată.

2. Problema fundamentală a calculului integral este:

Dacă se dă derivata $f(x)$ să se afle o funcție primitivă $F(x)$ a ei.

Soluția primei probleme se obține, după ce se face studiul derivabilității lui F , cu ajutorul operației fundamentale a calculului diferențial, derivarea. Derivarea generează derivata care este o funcție unică. Unei primitive i se asociază o singură derivată.

Soluția celei de a doua probleme este în general mai dificil de obținut.

Teorema 16.1. ne dă condițiile în care funcția f are primitivă, dar nu ne dă o cale de aflare a acesteia. Calculul integral rezolvă problema cu ajutorul operației sale fundamentale "integrarea". În sens larg, derivarea și integrarea sunt operații inverse una alteia. Rezultatul integrării nu este o singură funcție.

Reamintim trei rezultate importante obținute în capitolul de Calcul diferențial.

1. Dacă o funcție F e derivabilă pe un interval și are derivata nulă în orice punct al intervalului atunci funcția este constantă pe acel interval.
2. Dacă două funcții derivabile pe un interval diferă printr-o constantă atunci ele au aceeași derivată pe acel interval.
3. Dacă două funcții au aceeași derivată pe un interval atunci ele diferă printr-o constantă.

Observația 16.1. Este esențial faptul că F este derivabilă pe un interval. Dacă F este derivabilă pe alt tip de mulțime (de exemplu reuniune de intervale disjuncte) atunci afirmațiile anterioare nu sunt neapărat adevărate.

Cu ajutorul acestor rezultate deducem că dacă pornind de la o funcție derivată $f(x)$ am obținut o funcție primitivă oarecare $F^*(x)$ atunci:

1. Orice funcție $G(x) = F^*(x) + C$, unde C este o constantă oarecare, este o primitivă a lui $f(x)$, funcțiile F^* și G având aceeași derivată.
2. Orice primitivă $G(x)$ a lui $f(x)$ este de forma $F^*(x) + C$ pentru că F^* și G au aceeași derivată, deci diferă printr-o constantă aditivă.

Dacă $f(x)$ este o funcție derivată și $F(x)$ este o primitivă particulară a sa, atunci funcțiile $F(x) + C$ unde C este o constantă arbitrară reprezintă totalitatea funcțiilor primitive ale funcției derivată considerate.

Propoziția 16.1. Există o singură integrală particulară $F^*(x)$ a lui $f(x)$ care trece prin punctul $P(a, b)$, $a \in I$, $b \in F(I)$, a și b fixate.

Exemplu:

Să se determine funcția $y = F(x)$ care descrie traiectoria unui mobil a cărui viteză este dată de funcția $f(x) = x^2$, știind că mobilul trece

prin punctul $P(3, 15)$.

Funcția derivată este $f(x) = x^2$. O primitivă a acestei funcții este $F_1(x) = \frac{x^3}{3}$. Integrala nedefinită va fi $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Problema ne dă că pentru $x = 3$ avem $F(x) = 15$ deci

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + C; \quad F(3) = \frac{27}{3} + C = 15; \quad 9 + C = 15; \quad C = 6.$$

Funcția care descrie traiectoria va fi

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + 6.$$

16.1.1 Notăția cu diferențiale a integralei nedefinite

Convenim să folosim în continuare notația cu diferențiale a integralei nedefinite, alegere ce va fi tratată riguros în secțiunea dedicată integralei definite.

Integrala nedefinită este operația de aflare a primitivei $F(x)$, funcție multiformă dependentă de constanta de integrare C , dacă cunoaștem diferențiala lui F , $dF(x) = f(x)dx$. Astfel dacă avem funcția derivată $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continuă pe I notăm integrala ei nedefinită (care există) cu

$$F(x) = \int f(x)dx$$

înțelegând că $\int f(x)dx$ nu este o primitivă particulară ci reprezintă toate primitivele ei. Când se face integrarea trebuie avut mereu în vedere că acea constantă arbitrară trebuie adăugată. De exemplu, dacă $f(x) = x^5$ atunci

$$\int f(x)dx = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$$

și nu numai $\frac{x^6}{6}$.

16.1.2 Legătura dintre integrala nedefinită și diferențială

Pornim de la

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (16.1)$$

și de la faptul că $F' = f$

$$dF(x) = f(x)dx. \quad (16.2)$$

Diferențiem ambii membrii ai relației 16.1 și avem

$$d \int f(x)dx = d[F(x) + C] = dF(x) = f(x)dx$$

în esență

$$d \int f(x)dx = f(x)dx. \quad (16.3)$$

Pornind de la 16.2 pe care o înlocuim în 16.1 obținem

$$\int dF(x) = F(x) + C, \quad (16.4)$$

observăm că operațiile de integrare nedefinită și diferențiere sunt inverse una celeilalte, apariția simbolurilor d și $\int$ unul după altul în orice ordine, $d \int$ sau $\int d$, duce la anihilarea lor. Într-adevăr, avem din relația (16.3) diferențiala integralei nedefinite este diferențiala de sub integrală iar relația 16.4 ne spune că integrala nedefinită a diferențialei lui F este funcția multifomă $F(x) + C$.

Observația 16.2. *Simbolurile derivatei și ale integralei nedefinite în ordinea $\frac{d}{dx} \int$ nu se pot anula unul cu celălalt pentru că*

$$\frac{d}{dx} \int f(x)dx = \frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x)$$

care nu este egal cu $f(x)dx$.

În consecință problema principală a calcului diferențial este cea a "coborârii" unei primitive la diferențiala ei iar problema principală a calculului integral este cea a "ridicării" de la o diferențială dată $f(x)dx$ la primitiva ei $F(x) + C$.

16.2 Integrarea

Operația de determinare a primitivei se numește integrare. Fiind o operație inversă, integrarea este mai dificilă decât diferențierea. Pentru oricare funcție diferențiabilă pe un interval, care se exprimă ca o combinație finită de funcții elementare, inclusiv compunere și exponențiere, poate fi obținută diferențiala. Pentru aceasta avem un set complet de reguli de diferențiere și avem formule de calcul al diferențialei pentru funcțiile elementare.

16.2.1 Proprietăți ale integralei nedefinite

Teorema 16.1. ne spune că orice funcție continuă pe un interval admite o primitivă dar nu ne spune cum putem obține acea primitivă. Setul de reguli de integrare provenite din proprietățile integralei nedefinite este:

Teorema 16.2. *Dacă funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ au primitive atunci și funcțiile λf și $f + g$ admit primitive și*

1. *Integrala nedefinită este aditivă*

$$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

2. *Pentru orice $\lambda \in \mathbb{R}$ avem:*

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

Spunem că integrala nedefinită este un operator liniar.

Propoziția 16.2. *Dacă funcția $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admite primitivă atunci*

$$\int f(\alpha x + \beta)dx = \frac{1}{\alpha} F(\alpha x + \beta) + C, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha x + \beta \in I.$$

Propoziția 16.3. (Formula de integrare prin părți)

Fie funcțiile $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile pe I . Atunci

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \quad (16.5)$$

Demonstrația acestei propoziții este simplă. Se pornește de la diferențierea produsului de funcții și apoi se integrează rezultatul.

$$d(f(x)g(x)) = g(x)d(f(x)) + f(x)d(g(x)) = g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx.$$

Integrăm și avem

$$\int d(f(x)g(x)) = \int g(x)f'(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Ținem cont ca $\int d$ se anulează între ele, deci:

$$f(x)g(x) = \int g(x)f'(x)dx + \int f(x)g'(x)dx.$$

Rearanjând termenii egalității obținem formula 16.5.

Integrarea prin părți se aplică în cazul în care integrala din membrul stâng al egalității nu se poate calcula direct iar integrala din membrul drept se poate calcula, eventual după o secvență repetitivă.

Pornind de la primitivele particulare

$$\int \sin(x)dx = -\cos(x), \quad \int \cos(x)dx = \sin(x)$$

să calculăm prin părți integrala nedefinită

$$\mathcal{I} = \int x \sin(x)dx.$$

O indicație în alegerea părților ar fi să alegem funcția pe care o vom deriva, funcția polinomială pentru că integrala la care se ajunge este mai simplă decât $\mathcal{I}$.

$$\mathcal{I} = \int x \sin(x)dx$$

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \sin(x) \\ f'(x) = 1 & g(x) = -\cos(x) \end{array}$$

Avem după ce aplicăm formula 16.5 de la integrala prin părți

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int x \sin(x)dx = -x \cos(x) - \int (-\cos(x))dx = \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x)dx \\ \mathcal{I} &= -x \cos(x) + \sin(x) + C. \end{aligned}$$

La sfârșitul calculului constanta de integrare trebuie mereu pusă în evidență.

Deci $\int x \sin(x)dx$ se poate calcula prin părți. Există și integrale nedefinite de același tip care nu se pot calcula în niciun fel cu toate că îndeplinesc condițiile de existență. De exemplu, următoarele integrale nedefinite, deși există, nu se pot calcula:

$$\int x \operatorname{tg}(x)dx; \quad \int \sqrt{x} \sin(x)dx; \quad \int \frac{\sin(x)}{x}dx.$$

Observația 16.3. Nu avem în cazul integralei nedefinite reguli de calcul pentru produsul $f(x)g(x)$, raportul $\frac{f(x)}{g(x)}$, compunerea $f(g(x))$ și exponențierea $(f(x))^{g(x)}$.

Observația 16.4. Dacă la integrarea prin părți avem nevoie de un proces iterativ atunci părțile trebuie să le alegem mereu în același fel.

Exemplu: Să se calculeze $\mathcal{I} = \int e^x \cdot \sin(x) dx$.

Alegem pentru primul pas părțile astfel:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x \\ g'(x) &= \sin(x), & g(x) &= -\cos(x). \end{aligned}$$

Atunci:

$$\mathcal{I} = -e^x \cos(x) + \int e^x \cos(x) dx.$$

Integrala din membrul drept, $\mathcal{J} = \int e^x \cos(x) dx$, o vom calcula tot prin părți și aici trebuie să avem grijă să alegem părțile la fel ca la prima aplicare a integralei prin părți și anume:

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f'(x) &= e^x \\ g'(x) &= \cos(x), & g(x) &= \sin(x). \end{aligned}$$

Vom avea

$$\mathcal{J} = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx.$$

Obținem pentru $\mathcal{I}$ următoarea relație:

$$\mathcal{I} = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x) dx = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \mathcal{I}.$$

De aici ne rezultă că:

$$2\mathcal{I} = -e^x \cos(x) + e^x \sin(x),$$

deci

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2}(-e^x \cos(x) + e^x \sin(x)) + C.$$

Dacă la calculul lui $\mathcal{J}$ alegem părțile pe dos avem

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x), & f'(x) &= -\sin(x) \\ g'(x) &= e^x, & g(x) &= e^x \end{aligned}$$

și $\mathcal{J}$ ne dă:

$$\mathcal{J} = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x) dx.$$

Înlocuind acum pe $\mathcal{J}$ în $\mathcal{I}$ toți termenii se reduc și obținem $0 = 0$, adevărat, dar nefolositor pentru că nu am putut determina pe $\mathcal{I}$.

16.2.2 Formule de calcul al integralei nedefinite pentru funcții elementare

Notăția pentru variabila internă din integrala nedefinită nu este importantă.

$$\int f(x)dx = \int f(y)dy = \int f(u)du...$$

Determinarea unei primitive printr-o metodă directă se bazează pe următorul tabel al integralelor nedefinite pentru funcțiile elementare. Metoda în sine constă în compararea funcției date cu una dintre funcțiile din tabel. În caz că există similitudine, integrala se obține cu ușurință. Altfel, se încearcă diferite artificii care să conducă la posibilitatea de a afla integrala.

1.

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad I \subset D_f$$

D_f domeniul maxim de definiție a lui f .

2.

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C, \quad I \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

3.

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad I \subset \mathbb{R}$$

4.

$$\int e^x dx = e^x + C, \quad I \subset \mathbb{R} \quad .$$

5.

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \quad I \subset \mathbb{R}$$

6.

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C, \quad I \subset \mathbb{R}$$

7.

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C, \quad I \subset D_f$$

8.

$$\int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C, \quad I \subset D_f$$

9.

$$\int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C, \quad I \subset D_f$$

10.

$$\int \operatorname{ctg}(x) dx = \ln |\sin(x)| + C, \quad I \subset D_f$$

11.

$$\int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C, \quad I \subset D_f$$

12.

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, \quad I \subset D_f$$

13.

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad a \neq 0, \quad I \subset \mathbb{R}$$

14.

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C, \quad a \neq 0, \quad I \subset D_f$$

15.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad a > 0, \quad I \subset (-a, a)$$

16.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a \neq 0, \quad I \subset \mathbb{R}$$

17.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a \neq 0, \quad I \subset D_f$$

18.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad a \neq 0, \\ I \subset D_f$$

19.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C, \\ a \neq 0, \quad I \subset D_f$$

20.

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C,$$

$$a \neq 0, \quad I \subset D_f$$

16.2.3 Aplicații ale formulelor 1, 2

Reamintim formulele fără a mai preciza domeniile

$$1) \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, \quad 2) \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C.$$

Să se calculeze următoarele integrale nedefinite

$$\begin{aligned} a) \int x^5 dx, \quad b) \int \sqrt[3]{x} dx, \quad c) \int \frac{3}{x^2} dx, \quad d) \int \left(3^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right)^2 dx \\ e) \int \frac{1}{x+1} dx, \quad f) \int \frac{2x}{x^2+2} dx, \quad g) \int \frac{5x dx}{4+9x^2} \quad h) \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

(a) Se aplică direct formula 1 și avem

$$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} = \frac{x^6}{6} + C$$

Constanta de integrare se pune o singură dată la sfârșit.

(b)

$$\int \sqrt[3]{x} dx = \int x^{\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$$

(c)

$$\int \frac{3}{x^2} dx = 3 \int x^{-2} dx = 3 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -3x^{-1} = -\frac{3}{x} + C$$

(d) Pentru a calcula această integrală efectuăm întâi ridicarea la putere

$$\left(3^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{3}{2}} \right)^2 = 3 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + x^3$$

În continuare, utilizăm liniaritatea operatorului integral și avem

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \int (3 + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} + x^3) dx = 3 \int dx + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \int x^{\frac{3}{2}} dx + \int x^3 dx \\ \mathcal{I} &= 3x + 2 \cdot 3^{\frac{1}{2}} \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{x^{3+1}}{3+1} = 3x + \frac{4}{5} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{2}} + \frac{x^4}{4} + C\end{aligned}$$

Integralele e), f), g) le vom calcula aplicând formula 2.

- (e) Observăm că funcția pe care dorim să o integrăm are la numărător 1 și la numitor $x + 1$ care este o funcție polinomială de grad 1, ceea ce ne îndreptățește să folosim formula de integrare 2 punând expresia de sub integrală sub forma $\frac{du}{u}$. Avem

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \frac{d(x+1)}{x+1} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |x+1| + C$$

- (f) Procedăm la fel ca și în cazul anterior aducând expresia de sub integrală la forma $\frac{du}{u}$. La numitor avem funcția $u(x) = x^2 + 2$ și $du = 2x dx$. Atunci integrala noastră devine

$$\int \frac{2x}{x^2+2} dx = \int \frac{2x dx}{x^2+2} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln(x^2+2) + C$$

- (g) Urmăm aceeași cale ca și la integrala anterioară. Avem $d(4 + 9x^2) = 18x dx$. Atunci

$$\begin{aligned}\int \frac{5x dx}{4 + 9x^2} &= 5 \int \frac{x}{4 + 9x^2} dx = \frac{5}{18} \int \frac{18x dx}{4 + 9x^2} = \frac{5}{18} \int \frac{du}{u} = \\ &= \frac{5}{18} \ln |u| = \frac{5}{18} \ln(4 + 9x^2) + C.\end{aligned}$$

- (h) Pentru a putea calcula primitiva trebuie mai întâi să aducem radicalii la același indice.

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x^3} - \sqrt[6]{x^2}}.$$

Notăm $\sqrt[6]{x} = u$. Pentru a avea niște calcule mai ușoare îl exprimăm de aici pe x . Avem:

$$\sqrt[6]{x} = u \rightarrow x = u^6, \sqrt[6]{x^3} = u^3, \sqrt[6]{x^2} = u^2, dx = 6u^5 du.$$

și integrala devine

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5 du}{u^3 - u^2} = 6 \int \frac{u^3 du}{u - 1}.$$

Adunăm și scădem du la numărător, dăm factor comun, despărțim integrala în două integrale și obținem

$$\begin{aligned} I &= 6 \int \frac{u^3 du - du + du}{u - 1} = 6 \left[\int \frac{u^3 - 1}{u - 1} du + \int \frac{du}{u - 1} \right] = \\ &= 6 \left[\int (u^2 + u + 1) du + \int \frac{du}{u - 1} \right] = 2u^3 + 3u^2 + 6u + \ln(u - 1) + C. \end{aligned}$$

16.2.4 Aplicații ale formulelor 3, 4

Reamintim formulele fără a mai preciza domeniile

$$3) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C, \quad 4) \quad \int e^x dx = e^x + C.$$

Să se calculeze următoarele integrale nedefinite:

$$a) \quad \int e^{x+1} dx; \quad b) \quad \int 6e^{3t} dt; \quad c) \quad \int \frac{dx}{e^x}; \quad d) \quad \int 10^{3y} dy; \quad e) \quad \int (3e)^x dx;$$

$$f) \quad \int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx; \quad g) \quad \int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx; \quad h) \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx;$$

$$i) \quad \int \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx; \quad j) \quad \int \frac{e^x}{e^x + 1} dx.$$

- (a) Pentru tipul acesta de integrale sugestia de rezolvare este aducerea diferențialei de integrat la forma $e^u du$. Atunci, dacă notăm $x + 1$ cu u avem $du = dx$ deci

$$\int e^{x+1} dx = \int e^u du = e^u = e^{x+1} + C,$$

sau putem rescrie integrala sub forma

$$\int e^{x+1} dx = \int e \cdot e^x dx = e \int e^x dx = e \cdot e^x = e^{x+1} + C.$$

- (b) Avem în integrală e^{3t} , notăm $3t = u$, diferențiem $3dt = du$ deci $dt = \frac{1}{3}du$ și integrala devine

$$\int 6e^{3t} dt = 6 \int e^u \cdot \frac{1}{3} \cdot du = 2 \int e^u du = 2e^u = 2e^{3x} + C.$$

- (c) Avem

$$\int \frac{dx}{e^x} = \int e^{-x} dx = - \int e^{-x} (-dx) = -e^{-x} + C.$$

- (d) Integrala aceasta o vom reduce la una de tipul $\int a^u du$.

$$\int 10^{3y} dy = \frac{1}{3} \int 10^{3y} \cdot 3 \cdot dy = \frac{1}{3} \int 10^u du = \frac{1}{3} \cdot \frac{10^u}{\ln(10)} = \frac{10^{3y}}{3 \ln(10)}.$$

- (e) Trebuie observată diferența dintre integrala de la b) și această integrală. Aceasta este dată direct de forma $\int a^x dx$ deci

$$\int (3e)^x dx = \frac{(3e)^x}{\ln(3e)} = \frac{3^x e^x}{\ln(3) + 1} + C.$$

- (f) Funcțiile de la aplicațiile 6) și 7) sunt funcțiile hiperbolice sinus hiperbolic, notat $\sinh$ sau sh și cosinus hiperbolic, notat $\cosh$ sau ch .

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Printre proprietățile acestor funcții reamintim

$$\sinh(x) + \cosh(x) = e^x; \quad (\sinh(x))^2 + (\cosh(x))^2 = \cosh(2x),$$

$$(\sinh(x))^2 - (\cosh(x))^2 = -1$$

Calculul integralei ne dă

$$\int \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x + e^{-x}}{2} + C.$$

- (g) Calculul acestei integrale ne conduce la

$$\int \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} + C.$$

Folosind definiția lui $\sinh(x)$ și $\cosh(x)$ cele două integrale ne dau

$$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C; \quad \int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C.$$

- (h) Integrala se aduce la forma $\int e^u du$ astfel: notăm $u(x) = \sqrt{x} + 1$ și rezultă $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{e^{\sqrt{x}+1}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \int e^u du = 2e^u = 2e^{\sqrt{x}+1} + C.$$

- (i) Această integrală pare că seamănă cu integrala anterioară dar diferă esențial de ea. Desfacem funcția de integrat în două fracții și astfel vom obține două integrale

$$\mathcal{I} = \int \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}} + 1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} dx + \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Le vom calcula separat. Pentru prima notăm $u(x) = \sqrt[3]{x^2}$ iar diferențiala ei va fi $du = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} dx$. Atunci

$$\int \frac{e^{\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2e^{\sqrt[3]{x^2}}}{3\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \int e^u du = \frac{3}{2} e^u = \frac{3}{2} e^{\sqrt[3]{x^2}} + C$$

A doua integrală o facem cu formula 1 deci

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$$

Scriind o singură dată constanta de integrare, rezultă

$$\mathcal{I} = \frac{3}{2} e^{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$$

- (j) Observăm că ultima integrală o putem pune sub forma $\int e^u du$ dacă notăm expresia de la numitor $e^x + 1 = u(x)$; avem $du = e^x dx$ și integrala devine

$$\int \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \int \frac{du}{u} = \ln(u) = \ln(e^x + 1) + C.$$

16.2.5 Aplicații ale formulelor 5-12

Reamintim formulele fără a mai specifica domeniile

$$5) \quad \int \sin(x) dx = -\cos(x) + C, \quad 6) \quad \int \cos(x) dx = \sin(x) + C,$$

$$\begin{aligned}
7) \quad & \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx = \operatorname{tg}(x) + C, \quad 8) \quad \int \frac{1}{\sin^2(x)} dx = -\operatorname{ctg}(x) + C, \\
9) \quad & \int \operatorname{tg}(x) dx = -\ln |\cos(x)| + C, \quad 10) \quad \int \operatorname{ctg}(x) dx = \ln |\sin(x)| + C, \\
11) \quad & \int \frac{1}{\sin(x)} dx = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C, \quad 12) \quad \int \frac{1}{\cos(x)} dx = \\
& = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C.
\end{aligned}$$

Să se calculeze următoarele integrale:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \int \cos(4x) dx; \quad b) \quad \int \operatorname{tg}(nt) dt; \quad c) \quad \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx; \quad d) \quad \int \frac{dx}{1 + \sin(x)} \\
e) \quad & \int (\operatorname{tg}(x))^3 dx; \quad f) \quad \int (x - \cos(3x)) dx; \quad g) \quad \int e^x \cos(e^x) dx; \\
h) \quad & \int \frac{dx}{(\cos(x))^2 + \sin(x) \cos(x)}.
\end{aligned}$$

(a) Aducem integrala la forma $\int \cos(u) du$. Avem $u(x) = 4x$, $du = 4dx$ deci

$$\begin{aligned}
\int \cos(4x) dx &= \frac{1}{4} \int \cos(4x) \cdot 4 \cdot dx = \frac{1}{4} \int \cos(u) du = \frac{1}{4} \sin(u) = \\
&= \frac{1}{4} \sin(4x) + C.
\end{aligned}$$

(b) Aceeași indicație ca la problema 1). Avem $u(t) = nt$, $du = ndt$. Integrala devine

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{tg}(nt) dt &= \frac{1}{n} \int \operatorname{tg}(nt) \cdot n \cdot dt = \frac{1}{n} \int \operatorname{tg}(u) du = \frac{1}{n} \ln |\cos(u)| = \\
&= \frac{1}{n} \ln |\cos(nt)| + C.
\end{aligned}$$

(c) Aceeași indicație ca mai sus. Avem $u(x) = \sqrt{x}$, $du = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$ deci:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx &= 2 \int \frac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}} dx = \int \cos(u) du = \sin(u) = \\
&= \sin(\sqrt{x}) + C.
\end{aligned}$$

- (d) Această integrală cere mai multă dexteritate în abordarea ei. Avem

$$\frac{1}{1 + \sin(x)} = \frac{1 - \sin(x)}{(1 + \sin(x))(1 - \sin(x))} = \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)}.$$

Atunci

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \int \frac{dx}{1 + \sin(x)} = \int \left(\frac{1}{\cos^2(x)} - \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} \right) dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx - \int \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} dx \end{aligned}$$

Calculăm integralele pe rând

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\cos^2(x)} dx &= \operatorname{tg}(x); \\ - \int \sin(x) \cos^{-2}(x) dx &= \int \cos^{-2}(x) (-\sin(x) dx) = \\ \int u^{-2} du &= -\frac{1}{u}. \text{ De aici} \end{aligned}$$

$$\mathcal{I} = \operatorname{tg}(x) - \frac{1}{\cos(x)} + C.$$

- (e) Pornim de la egalitatea $\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \operatorname{tg}^2(x)$. Atunci pentru funcția $u(x) = \operatorname{tg}(x)$ putem scrie $du = (1 + \operatorname{tg}^2(x))dx$. Rescriem integrala sub forma

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^3(x) dx &= \int \operatorname{tg}(x)[1 + \operatorname{tg}^2(x) - 1] dx = \\ &= \int \operatorname{tg}(x)[1 + \operatorname{tg}^2(x)] dx - \int \operatorname{tg}(x) dx = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2(x) + \ln |\cos(x)| + C. \end{aligned}$$

- (f) Se aplică direct proprietățile integralei nedefinite și rezultatul de la aplicația (a).

$$\int (x - \cos(3x)) dx = \int x dx - \int \cos(3x) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{3} \sin(3x) + C.$$

- (g) Scriem integrala sub forma $\int \cos(u) du$. Pentru asta considerăm $u(x) = e^x$, $du = e^x dx$ și integrala devine

$$\int e^x \cos(e^x) dx = \int \cos(u) du = \sin(u) = \sin(e^x) + C.$$

- (h) Pentru a calcula această integrală este nevoie de mai multa dexteritate ca să aducem integrala la forma $\int df$. Pornim de la forma numitorului și dăm factor comun forțat pe $\cos^2(x)$ în ideea de a obține derivata lui $\operatorname{tg}(x)$ și o expresie care conține $\operatorname{tg}(x)$.

$$\begin{aligned}\cos^2(x) + \sin(x) \cos(x) &= \cos^2 x \left[1 + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right] = \\ &= \cos^2(x)[1 + \operatorname{tg}(x)]. \text{ Integrala devine}\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2(x) + \sin(x) \cos(x)} = \int \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)}.$$

și dacă vom considera $u(x) = 1 + \operatorname{tg}(x)$, $du = \frac{dx}{\cos^2(x)}$ atunci

$$\int \frac{1}{1 + \operatorname{tg}(x)} \cdot \frac{dx}{\cos^2(x)} = \int \frac{du}{u} = \ln |u| = \ln |1 + \operatorname{tg}(x)| + C.$$

16.2.6 Aplicații ale formulelor 13-15

Reamintim formulele fără a mai preciza domeniile

$$13) \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{a} \right) + C, \quad 14) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C.$$

$$15) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \left(\frac{x}{a} \right) + C.$$

Să se calculeze următoarele integrale

$$a) \int \frac{dx}{9 + x^2}, \quad b) \int \frac{2dx}{1 + 4x^2}, \quad c) \int \frac{dx}{16 + 25x^2} \quad d) \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 17},$$

$$e) \int \frac{dx}{x^2 - 9} \quad f) \int \frac{dx}{4 - x^2}, \quad g) \int \frac{2dx}{4x^2 - 9}, \quad h) \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 5},$$

$$i) \int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x^2}}, \quad j) \int \frac{2dx}{\sqrt{9 - x^2}}, \quad k) \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 9x^2}},$$

$$l) \int \frac{dx}{\sqrt{8 + 2x - x^2}}.$$

- (a) Integrala este de forma dată de formula 13 cu $a = 3$.

$$\int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{3} \right) + C.$$

- (b) Aducem integrala la formula anterioară dând factor comun forțat pe 4

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\frac{1}{2}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + C$$

Sau putem să considerăm $u(x) = 2x$, $du = 2dx$ și integrala devine

$$\int \frac{dx}{1+4x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{1+(2x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(u) = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(2x) + C$$

- (c) Notăm $u(x) = 5x$, avem $du = 5dx$ și integrala devine

$$\int \frac{dx}{16+25x^2} = \frac{1}{5} \int \frac{5dx}{16+(5x)^2} = \frac{1}{5} \int \frac{du}{16+u^2}$$

Aplicăm formula 13 și obținem

$$\frac{1}{5} \int \frac{du}{16+u^2} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{4} \right) = \frac{1}{20} \operatorname{arctg} \frac{5x}{4} + C$$

- (d) Ecuația $4x^2 + 4x + 17 = 0$ are rădăcini complexe și putem scrie numitorul chiar sub formă de sumă a două pătrate perfecte

$$4x^2 + 4x + 17 = 4x^2 + 4x + 1 + 16 = (4x^2 + 4x + 1) + 16 = (2x+1)^2 + 4^2$$

Integrala devine

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 17} = \int \frac{dx}{4^2 + (2x+1)^2}$$

Notăm $u = 2x + 1$, avem $du = 2dx$ de unde

$$\int \frac{dx}{4^2 + (2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{4^2 + (2x+1)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{4^2 + u^2} =$$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \left(\frac{u}{2} \right)$ Revenim la variabila x și obținem

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \left(\frac{2x+1}{2} \right) + C$$

- (e) Integrala este de forma dată de formula 14 cu $a = 3$ deci

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{x-3}{x+3} \right| + C$$

- (f) Integrala este de forma integralei anterioare dar cu semn schimbat deci

$$\mathcal{I} = \int \frac{dx}{4 - x^2} = - \int \frac{dx}{x^2 - 2^2} = - \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right|$$

Efectuând înmulțirea și aplicând o proprietate a logaritmilor obținem

$$\mathcal{I} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$$

- (g) Notăm $u(x) = 2x$ și deci $du = 2dx$. Integrala devine

$$\int \frac{2dx}{(2x)^2 - 9} = \int \frac{du}{u^2 - 3^2} = \frac{1}{2 \cdot 3} \ln \left| \frac{u-3}{u+3} \right| = \frac{1}{6} \ln \left| \frac{2x-3}{2x+3} \right| + C$$

- (h) Să punem în evidență întâi o observație.

Observația 16.5. Considerăm ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ care admite soluțiile reale x_1 și x_2 . Atunci este adevărată relația:

$$ax^2 + bx + c = a \left[\left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{x_1 - x_2}{2} \right)^2 \right].$$

Rezolvăm ecuația $x^2 - 6x + 4 = 0$ și observăm că are soluții reale $x_1 = 5$ și $x_2 = 1$ deci putem scrie numitorul sub forma de diferență de pătrate exacte

$$x^2 - 6x + 5 = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 2^2$$

Notăm $u(x) = x - 3$ și avem $du = dx$ deci integrala devine

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-3)^2 - 2^2} &= \int \frac{du}{u^2 - 2^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{u-2}{u+2} \right| = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-3-2}{x-3+2} \right| = \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-5}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

Observația 16.6. Dacă ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are soluțiile reale x_1, x_2 și $x_1 > x_2$ atunci atunci

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{x_1 - x_2} \ln \left| \frac{x - x_1}{x - x_2} \right|.$$

- (i) Notăm $u(x) = 2x$ de unde $du = 2dx$ Integrala devine

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} =$$

$$\frac{1}{2} \arcsin(u) = \frac{1}{2} \arcsin(2x) + C$$

- (j) Pentru calculul integralei, după ce se scoate 2 în fața integralei, se aplică direct formula 15 luând în considerare că $a = 3$. Avem

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{9-x^2}} = 2 \int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = 2 \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C.$$

- (k) Aducem integrala la forma

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$$

considerând $u(x) = 3x$, $du = 3dx$ și $a = 4$

$$\int \frac{2dx}{\sqrt{16-9x^2}} = 2 \cdot \frac{1}{3} \int \frac{(3dx)}{\sqrt{4^2-(3x)^2}} = \frac{2}{3} \arcsin\left(\frac{3x}{2}\right) + C.$$

- (l) Expresia de sub radical egalată cu 0 ne dă o ecuație cu soluții reale, semnul lui x^2 este minus, deci poate fi pusă sub forma $a^2-u^2(x)$. Avem $8+2x-x^2 = 9-(1-2x+x^2) = 3^2 - (x-1)^2$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(x-1)^2}} = \arcsin\left(\frac{x-1}{3}\right) + C.$$

16.3 Calculul primitivelor unor funcții raționale

1. **Cazul I.** Se consideră integrale de forma

$$\int \frac{(px+q)dx}{ax^2+bx+c}, \quad a, b, c, p, q \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac > 0.$$

- (a) $p = 0$, $q \neq 0$, $\Delta > 0$, cu $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemplu:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

Pentru început determinăm rădăcinile numitorului. $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$. Descompunem acum expresia de integrat în fracții simple.

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

Determinăm pe A și B . Aducem la același numitor și egalăm numărătorii:

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2) + B(x-1)}{(x-1)(x-2)}.$$

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}.$$

Numitorii sunt egali deci și numărătorii trebuie să fie egali. Avem egalitatea a două polinoame deci coeficienții termenilor de același grad trebuie să fie identici, de unde

$$1 = (A+B)x - 2A - B \quad \forall x.$$

Membrul din stânga al egalității nu conține pe x și atunci coeficientul lui x în membrul din dreapta trebuie să fie 0, iar termenii liberi sunt, în stânga 1, iar în dreapta $-2A - B$. Rămâne de rezolvat sistemul

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$$

Adunăm cele două ecuații și obținem $-A = 1$ de unde $A = -1$, iar din prima ecuație rezultă că $B = -A$, deci $B = 1$. Atunci

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} &= \int \left[\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} \right] dx = \int \frac{dx}{x-2} - \int \frac{dx}{x-1} = \\ &= \ln|x-2| - \ln|x-1| = \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C. \end{aligned}$$

Pentru a determina pe A și B putem proceda și astfel: Plecăm de la egalitatea

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}. \quad (16.6)$$

Înmulțim ambii membri cu $x - 1$, simplificăm și îl facem pe $x = 1$.

$$\frac{x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-1)}{x-1} + \frac{B(x-1)}{x-2},$$

de unde

$$\frac{1}{x-2} = A + \frac{B(x-1)}{x-2}$$

și făcându-l pe $x = 1$ obținem

$$\frac{1}{1-2} = A + \frac{B(1-1)}{1-2},$$

adică $A = -1$.

Procedăm similar pentru aflarea lui B . Pornim de la egalitatea 16.6 pe care o înmulțim în ambii membri cu $x - 2$ simplificăm și îl facem pe $x = 2$.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)}{x-1} + \frac{B(x-2)}{x-2},$$

$$\frac{1}{x-1} = \frac{A(x-2)}{x-1} + B \Big|_{x=2}$$

de unde $B = 1$.

- (b) $p \cdot q \neq 0$, $\Delta > 0$, cu $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exemplu:

$$I = \int \frac{(3x-1)}{x^2-1} dx.$$

Rădăcinile numitorului sunt $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ deci

$$\frac{3x-1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}.$$

Procedăm ca în exemplul precedent:

- Înmulțim relația cu $x + 1$ în ambii membri, simplificăm și îl facem pe $x = -1$.

$$\frac{(3x-1)(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x+1)}{x+1} + \frac{B(x+1)}{x-1},$$

$$\frac{3x-1}{x-1} = A + \frac{B(x+1)}{x-1} \Big|_{x=-1}, \quad \text{deci } A = 2.$$

- Înmulțim relația cu $x - 1$ în ambii membri, simplificăm și îl facem pe $x = 1$.

$$\frac{(3x-1)(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{A(x-1)}{x+1} + \frac{B(x-1)}{x-1},$$

$$\frac{3x-1}{x+1} = \frac{A(x-1)}{x+1} + B \Big|_{x=1}, \quad \text{deci } B = 1.$$

Atunci

$$I = \int \frac{2dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x-1} = \ln(x+1)^2 + \ln|x-1| + C.$$

■

Cazul general se tratează în același fel. Ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are două rădăcini reale $x_1 \neq x_2$ și $ax^2 + bx + c$ poate fi scris ca $a(x-x_1)(x-x_2)$. Atunci

$$\frac{px+q}{ax^2+bx+c} = \frac{px+q}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

și putem descompune fracția în două fracții simple

$$\frac{px+q}{a(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{A}{a(x-x_1)} + \frac{B}{a(x-x_2)}. \quad (16.7)$$

Determinăm constantele A și B ca în exemplul al doilea. Pornim de la egalitatea 16.7, înmulțim ambii membri cu $x - x_1$, simplificăm cu a și acolo unde se poate cu $x - x_1$ și obținem:

$$\frac{px+q}{x-x_2} = A + \frac{B(x-x_1)}{x-x_2},$$

îl facem pe $x = x_1$ și rezultă $A = \frac{px_1+q}{x_1-x_2}$. Similar îl

obținem pe $B = \frac{px_2+q}{x_2-x_1}$. (Verificați!). Integrala devine:

$$I = \int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx = \frac{px_1+q}{x_1-x_2} \int \frac{dx}{x-x_1} + \frac{px_2+q}{x_2-x_1} \int \frac{dx}{x-x_2}.$$

În concluzie

$$I = \frac{px_1+q}{x_1-x_2} \ln|x-x_1| + \frac{px_2+q}{x_2-x_1} \ln|x-x_2| + C.$$

■

2. **Cazul al doilea.** Considerăm integrale de forma]

$$I = \int \frac{(px + q)dx}{ax^2 + bx + c}, \quad a, b, c, p, q \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac = 0.$$

(a) **Exemplul 1:**

$$\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}.$$

Avem $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$. Facem substituția $x + 2 = t$.
Atunci $dx = dt$ și

$$\int \frac{dx}{(x + 2)^2} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{x + 2} + C.$$

(b) **Exemplul al doilea:** Să se calculeze

$$I = \int \frac{3x + 2}{(x - 3)^2} dx.$$

Rescriem integrala sub forma

$$I = \int \frac{3(x - 3) + 9 + 2}{(x - 3)^2} dx = \int \frac{3(x - 3)}{(x - 3)^2} dx + \int \frac{11 dx}{(x - 3)^2}.$$

De aici avem

$$I = 3 \int \frac{dx}{x - 3} + 11 \int \frac{dx}{(x - 3)^2} = 3 \ln |x - 3| - 11 \frac{1}{x - 3} + C.$$

■

Pentru cazul studiat, ecuația $ax^2 + bx + c = 0$, cu $\Delta = 0$, admite o rădăcină dublă x_0 și $ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$.
Atunci

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{px + q}{a(x - x_0)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{px - px_0 + px_0 + q}{(x - x_0)^2} dx. \\ I &= \frac{p}{a} \int \frac{dx}{x - x_0} + \frac{px_0 + q}{a} \int \frac{dx}{(x - x_0)^2}. \end{aligned}$$

În concluzie, procedând ca în exemplul anterior obținem

$$I = \frac{p}{a} \ln |x - x_0| - \frac{px_0 + q}{a} \frac{1}{x - x_0} + C.$$

3. Cazul al treilea. Să se calculeze

$$I = \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx, \quad a, b, c, p, q \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0, \quad b^2 - 4ac < 0.$$

În acest caz ecuația $ax^2 + bx + c = 0$ are rădăcinile complex conjugate $x_1 = \alpha + i\beta$ și $x_2 = \alpha - i\beta$. Atunci $ax^2 + bx + c = a[(x - \alpha)^2 + \beta^2]$ și integrala devine

$$I = \int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c} dx = \int \frac{px + q}{a[(x - \alpha)^2 + \beta^2]} dx.$$

Nu putem descompune fracția de integrat în fracții simple și atunci va trebui să punem în evidență la numărător derivata numitorului și să descompunem apoi integrala în două integrale ce pot fi calculate direct. Avem $[(x - \alpha)^2 + \beta^2]' = 2(x - \alpha)$ și atunci

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{px + q}{a[(x - \alpha)^2 + \beta^2]} dx = \frac{1}{2a} \int \frac{2px - 2p\alpha + 2p\alpha + 2q}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx \\ I &= \frac{p}{2a} \int \frac{2(x - \alpha)}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} dx + \frac{2p\alpha + 2q}{2a} \int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

În prima integrală avem la numărător derivata numitorului deci rezultatul va fi un logaritm, iar a doua integrală este una de tip arctangentă. Atunci:

$$I = \frac{p}{2a} \ln[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + \frac{p\alpha + q}{a} \cdot \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - \alpha}{\beta} \right) + C.$$

Exemple:

(a) Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}.$$

Determinăm soluțiile ecuației $x^2 - 2x + 5 = 0$ și obținem $x_{1,2} = 1 \pm 2i$. De aici avem că $\alpha = 1$ și $\beta = 2$. Rescriem integrala

$$I = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2^2}.$$

Facem substituția $x - 1 = t$, $dx = dt$ deci

$$I = \int \frac{dx}{(x - 1)^2 + 2^2} = \int \frac{dt}{t^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{t}{2} \right)$$

Revenind la variabila x obținem

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x - 1}{2} \right) + C.$$

(b) Să se calculeze

$$I = \int \frac{3x+1}{x^2+2x+2} dx.$$

Rădăcinile numitorului sunt $x_{1,2} = -1 \pm i$ deci $\alpha = -1$, $\beta = 1$. Avem nevoie și de derivata numitorului. $[(x+1)^2+1]' = 2x+2$. Rescriem integrala

$$I = \int \frac{(3x+1)}{(x+1)^2+1} dx.$$

Trebuie să punem la numărător în evidență derivata numitorului și apoi să spargem integrala în două integrale pe care putem să le calculăm. Procedăm astfel:

$$3x+1 = \frac{1}{2} \cdot 2(3x+1) = \frac{1}{2} \cdot (6x+2) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 2x+2).$$

Adunăm și scădem în paranteză un 6

$$\frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 2x+2) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot 2x+6-6+2) = \frac{1}{2} \cdot [3(2x+2)-4].$$

Integrala devine

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{3(2x+2)-4}{(x+1)^2+1} dx.$$

Putem despărți acum integrala după modelul teoretic descris mai sus și obținem

$$I = \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{(x+1)^2+1} dx - \frac{4}{2} \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}.$$

Prima integrală este de forma $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx$ cu primitiva $\ln|f(x)|$, iar a doua integrală este de forma arctangentă. Deci

$$I = \frac{2}{3} \ln|(x+1)^2+1| - 2 \arctg(x+1) + C.$$

4. **Aplicații:** Să se calculeze

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6} dx, \quad \int \frac{x}{x^2+6x+9} dx, \quad \int \frac{3x-1}{x^2+x+1} dx.$$

5. Calculul primitivelor de forma

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}.$$

Pentru calculul unei astfel de integrale trebuie să determinăm o formulă de recurență. Tehnica de lucru este, în general, ca pornind de la I_{n+1} prin integrare prin părți să se ajungă la o relație de recurență. Pentru că în integrala pentru care trebuie găsită recurența exponentul n este la numitor trebuie să se lucreze tot prin părți dar se pleacă de la I_n și prin integrare prin părți să se ajungă la relația de recurență. Să începem prin a calcula

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}.$$

Plecăm de la

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

și integrăm prin părți ignorând pe moment că știm să calculăm această integrală. Astfel:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2} \quad f'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + a^2)^2}.$$

$$g'(x) = 1 \quad g(x) = x \quad .$$

$$I_1 = \int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

De aici avem

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{x}{x^2 + a^2} + \int \frac{2x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx.$$

Prelucrăm ultima integrală ca să obținem din ea I_1 și I_2 .

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{x}{x^2 + a^2} + \int \frac{2x^2 + 2a^2 - 2a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\ &= \frac{x}{x^2 + a^2} + \int \frac{2(x^2 + a^2)dx}{(x^2 + a^2)^2} - 2a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}. \end{aligned}$$

De aici rezultă

$$I_1 = \frac{x}{x^2 + a^2} + 2I_1 - 2a^2 I_2.$$

Rearanjând termenii obținem relația

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + I_1 \right).$$

Cum $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$ avem

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{x}{a}.$$

Pentru cazul general, procedând similar, pornind de la I_n și integrând prin părți obținem:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2na^2} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{1}{a^3} \cdot \frac{2n-1}{2n} I_n.$$

6. Aplicații: Să se calculeze

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^3} dx, \quad \int \frac{1}{(x^2 + 4)^3} dx, \quad \int \frac{5}{(x^2 + 3^2)^4} dx.$$

7. Primitive de tipul $\int R(x^{r_1}, x^{r_2}, \dots) dx$, $r_i \in \mathbb{Q}$, R funcție rațională

Exemple:

(a) Să se calculeze

$$I = \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx.$$

Efectuăm substituția $x = t^6$. Avem $dx = 6t^5 dt$ și primitiva devine

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{t \cdot 6t^5}{t^3 - t^2} dt = 6 \int \frac{t^6}{t^2(t-1)} dt = \\ &= 6 \int \frac{t^4}{t-1} dt. \end{aligned}$$

Scădem și adunăm un 1 la numărător, apoi împărțim la numitor

$$I = 6 \int \frac{(t^4 - 1) + 1}{t-1} dt = 6 \int \frac{(t-1)(t^3 + t^2 + t + 1) - 1}{t-1} dt$$

de unde

$$I = \int \left(t^3 + t^2 + t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + t + \ln |t-1| + C.$$

Revenind la variabila x obținem

$$I = \frac{1}{4}\sqrt[6]{x^4} + \frac{1}{3}\sqrt[6]{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt[6]{x^2} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$$

pe care o putem rescrie

$$I = \frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3}\sqrt[2]{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \ln|\sqrt[6]{x} - 1| + C$$

(b) Să se calculeze

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1} + \sqrt[3]{2x+1}} dx.$$

Substituția este $2x+1 = t^6$, $2dx = 6t^5 dt$, $dx = 3t^5 dt$.

Primitiva devine

$$I = \int \frac{3t^5 dt}{t^3 + t^2} = 3 \int \frac{t^3}{t+1} dt = 3 \int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt.$$

De aici

$$I = 3 \int \frac{(t+1)(t^2-t+1)-1}{t+1} dt = 3 \int \left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1} \right) dt.$$

Integrând obținem

$$I = 3\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln(t+1) + C.$$

Revenim la variabila x și avem

$$I = 3 \left(\frac{1}{3}\sqrt{2x+1} - \frac{1}{2}\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[6]{2x+1} - \ln(\sqrt[6]{2x+1} + 1) \right) + C.$$

8. **Aplicații:** Să se calculeze

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}, \quad \int \frac{dx}{x(\sqrt{x} + \sqrt[6]{x})}.$$

9. **Primitive de forma** $\int R(\sin x, \cos x) dx$, **R funcție rațională**

În general, pentru tipul acesta de primitive substituția folosită este $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Exemple:

(a) Să se calculeze

$$I = \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx$$

Facem substituția recomandată

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(t), \quad x = 2\operatorname{arctg}(t), \quad dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Exprimăm pe $\cos x$ în funcție de t și avem

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Atunci

$$I = \int \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Aducem la același numitor, efectuăm calculele și obținem

$$I = \int \frac{1+t^2 - 1+t^2}{1+t^2 + 1-t^2} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = 2 \int \frac{t^2}{1+t^2} dt.$$

$$I = 2 \int \frac{t^2 + 1 - 1}{1+t^2} dt = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt = 2t - 2\operatorname{arctg}(t).$$

Ținem cont că $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ și rezultă că

$$I = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) = 2\operatorname{tg} \frac{x}{2} - x + C.$$

Observație: Știm că

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}, \quad \text{și} \quad 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

deci

$$I = \int \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} dx = \int \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx,$$

iar calculul ei se reduce la calculele anterioare.

(b) Să se calculeze

$$I = \int \frac{dx}{1 - \sin x}.$$

Facem substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}(t), \quad x = 2\operatorname{arctg}(t), \quad dx = 2 \frac{1}{1+t^2} dt.$$

Obținem

$$I = \int \frac{dx}{1 - \frac{2\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = 2 \int \frac{dt}{t^2 - 2t + 1} = 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2}.$$

$$I = 2 \int \frac{dt}{(t-1)^2} = -\frac{2}{t-1} = \frac{2}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}} + C.$$

16.3.1 Determinarea constantei C pentru condiții inițiale date

Exemplu: Un mobil se mișcă cu accelerația constantă a . Să se determine funcția care descrie viteza mobilului și viteza sa inițială dacă la momentul $t = t_1$ viteza era $v = v_1$. Să se determine funcția care descrie traiectoria mobilului dacă la momentul $t = t_2$ el se găsea în punctul $P(t_2, s(t_2))$.

Fie $s = s(t)$ funcția care descrie traiectoria și $v = v(t)$ funcția care descrie viteza mobilului. Știm că

$$v(t) = \frac{ds}{dt}, \quad a(t) = \frac{dv}{dt}.$$

Cunoaștem că accelerația este dată de constanta a . Atunci viteza mobilului este

$$v(t) = \int a dt = at + C.$$

Trebuie să determinăm constanta C astfel încât $v(t_1) = at_1 + C$. Constanta C pe care o vom determina din această relație este chiar viteza inițială a mobilului. Deci $v(t) = at + v_{init}$.

Cunoaștem funcția care ne descrie viteza și atunci

$$s(t) = \int v(t) dt = \int (at + v_{init}) dx = \frac{at^2}{2} + v_{init}t + C.$$

Constanta C în acest caz va reprezenta poziția inițială a mobilului și ea se determină folosind $s(t_2)$ dat de problemă. Dăm un exemplu numeric.

Să se determine viteza și traiectoria unui mobil care are accelerația constantă $a = 2m/s^2$, $v(2) = 10m/s$ și $s(3) = 31m$

$$v(t) = \int 2dt = 2t + C, \quad v(2) = 2 \cdot 2 + C = 10, \quad C = v_{init} = 6m/s$$

$$s(t) = \int v(t)dt = \int (2t + 6)dt = t^2 + 6t + C$$

$$s(3) = 31, \quad 9 + 18 + C = 31, \quad C = s_{init} = 4m.$$

În concluzie:

$$v(t) = 2t + 6, \quad s(t) = t^2 + 6t + 4.$$

Un alt exemplu: Să se determine viteza și traiectoria unui mobil care are accelerația $a(t) = \sin(t)$, $v(0) = 4$ și $s(0) = 6$.

Avem pe rând

$$v(t) = \int a(t)dt = -\cos(t) + C, \quad v(0) = 4, \quad C = v_{init} = 5m/s.$$

$$s(t) = \int (-\cos(t) + 5)dt = -\sin(t) + 5t + C, \quad s(0) = C = 6m$$

$$v(t) = -\cos(t) + 5, \quad s(t) = -\sin(t) + 5t + 6.$$

16.4 Integrala definită

Considerăm o funcție $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continuă pe $[a, b]$. Știm despre f că ea admite primitive pe acest interval. Poate nu putem să calculăm aceste primitive dar existența lor este garantată.

Teorema 16.3. *Pentru orice primitivă $F(x)$ a lui $f(x)$ diferența $F(b) - F(a)$ este aceeași.*

De aceea diferența $F(b) - F(a)$ notată

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{16.8}$$

o vom numi integrala definită a lui $f(x)$ pe intervalul $[a, b]$. Capetele intervalului, a și b , le vom numi limite de integrare iar semnul de integrală este același de la calculul integralei nedefinite.

Observația 16.7. *Integrala definită este un număr care depinde doar de funcția $f(x)$ și de capetele intervalului a și b , spre deosebire de integrala nedefinită care este formată dintr-o mulțime de funcții. Numerele a și b nu sunt obținute din calculul unor limite ci sunt capetele intervalului pe care se face integrarea.*

Dependența integralei definite de $f(x)$, a și b nu este explicită de aceea trebuie indicată operația care se aplică intervalului $[a, b]$ și funcției $f(x)$, continuă pe $[a, b]$, pentru a obține integrala definită $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Observăm că $F(x)$ respectă condițiile din teorema lui Lagrange deci există un punct $c \in (a, b)$ astfel încât

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = f(c) \quad \text{sau}$$

$$F(b) - F(a) = (b - a)f(c). \quad (16.9)$$

Problema pare astfel rezolvată numai că teorema lui Lagrange ne spune doar că punctul c există dar nu ne și precizează cum îl aflăm. Atunci, împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale cu punctele

$$x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Aplicăm teorema lui Lagrange pe fiecare interval

$$[a = x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b = x_n]$$

$$F(x_1) - F(a) = (x_1 - a)f(c_1)$$

$$F(x_2) - F(x_1) = (x_2 - x_1)f(c_2)$$

...

$$F(b) - F(x_{n-1}) = (b - x_{n-1})f(c_n)$$

Adunăm aceste relații, notăm cu Δx_i lungimea fiecărui interval de forma $[x_{i-1}, x_i]$, unde $i = 1, \dots, n$ și obținem

$$F(b) - F(a) = f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n.$$

Această relație este una exactă dar tot nu rezolvă problema determinării punctelor c_i date de teorema lui Lagrange.

Teorema 16.4. (Teorema fundamentală a calculului integral)

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă pe $[a, b]$ și $F(x)$ o primitivă a sa. Atunci:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \forall i=1,2,\dots,n}} (f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n). \quad (16.10)$$

Astfel avem integrala definită dată ca

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \forall i=1,2,\dots,n}} (f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + \dots + f(c_n)\Delta x_n). \quad (16.11)$$

Funcțiile $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care limita din relația 16.11 există și este finită se numesc funcții integrabile.

Observația 16.8. INTEGRALA DEFINITĂ NU ESTE O SUMĂ CI LIMITA UNEI SUME: Ea este un număr care nu depinde de variabila x numită variabilă de integrare, care variabilă poate fi notată cu orice simbol. Intervalul $[a, b]$ se numește domeniul integrării.

16.4.1 Proprietăți ale integralei definite

1. Dacă $a < b$ atunci $\int_b^a f(x)dx$ se definește astfel:

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx,$$

ceea ce implică $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. Dacă $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.
3. Dacă f și g sunt integrabile pe $[a, b]$ atunci și funcția $f + g$ este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

4. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ și $\lambda \in \mathbb{R}$ atunci funcția λf este integrabilă pe $[a, b]$ și

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx.$$

5. Dacă f, g sunt integrabile pe $[a, b]$ și $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$ atunci:

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

6. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci pentru orice punct $c \in [a, b]$ avem:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

7. Dacă f este integrabilă pe $[a, c]$ și pe $[c, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.
8. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe orice interval $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$.
9. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ atunci și $|f|$ este integrabilă pe $[a, b]$ și avem:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

10. Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă pe $[a, b]$.

Observația 16.9. Dacă f este monotonă pe $[a, b]$ nu rezultă neapărat că f este continuă pe $[a, b]$.

11. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ atunci există cel puțin un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încât

$$\int_a^b f(x) dx = \xi \cdot (b-a); \quad \text{formula de medie pentru integrala definită.}$$

16.4.2 Calculul integralei definite

Avem trei posibilități de calcul al integralei definite:

1. Să determinăm o funcție primitivă $F(x)$ pornind de la diferențiala $f(x)dx$. Această metodă este aplicabilă numai dacă putem reduce diferențiala de integrat la una dintre diferențialele pentru care avem formule de integrare 1-20.
2. Aflarea directă a limitei dată de formula 16.11. În afară de câteva cazuri foarte rare în care putem determina valoarea integralei definite prin aflarea limitei, această metodă nu poate fi aplicată.
3. Dacă variantele 1 și 2 nu dau rezultat integrala definită poate fi aproximată cu o anumită precizie prin metode numerice iterative.

Exemple de integrale definite calculate pornind de la o primitivă

Să se calculeze:

$$a) \int_1^2 x^2 dx, \quad b) \int_{-1}^1 x^3 dx; \quad c) \int_1^e \frac{x}{x^2 + 1} dx.$$

(a) Știm că o primitivă pentru $x^2 dx$ este $\frac{x^3}{3}$. Atunci

$$\int_1^2 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

(b) Pornim de la faptul că știm că o primitivă pentru $x^3 dx$ este $\frac{x^4}{4}$. Avem

$$\int_{-1}^1 x^3 dx = \left. \frac{x^4}{4} \right|_{-1}^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0.$$

Observația 16.10. Dacă funcția $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție impară, $f(x) = -f(-x)$ oricare ar fi x în domeniul

de definiție, atunci

$$\int_{-b}^b f(x)dx = 0 \quad \forall b \in [0, a].$$

Dacă funcția $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ este o funcție pară, ($f(x) = f(-x)$) oricare ar fi $x \in [-a, a]$, atunci:

$$\int_{-b}^b f(x)dx = 2 \cdot \int_0^b f(x)dx, \quad \forall b \in [0, a].$$

■

- (c) Aducem expresia de sub semnul integral la forma $\frac{du}{u}$ observând că $d(x^2 + 1) = 2xdx$. Astfel

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{xdx}{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \int_1^e \frac{2xdx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int_1^e \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_1^e = \\ &= \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right) = \ln \sqrt{\frac{e^2 + 1}{2}}. \end{aligned}$$

16.4.3 Formula de integrare prin părți și schimbarea de variabilă pentru integrala definită

Integrarea prin părți Principiul este același ca în cazul integralei nedefinite apărând în plus limitele de integrare. Formula este:

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx \quad (16.12)$$

Exemplu:

Să se calculeze

$$\int_1^e x \ln(x)dx.$$

Funcția care ne crează "probleme" în calculul acestei integrale este logaritmul deci vom alege părțile de așa manieră ca în integrala rămasă

logaritmul să dispară.

$$f'(x) = x \quad f(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$g(x) = \ln(x) \quad g'(x) = \frac{1}{x}$$

Atunci:

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln(x) dx &= \frac{x^2}{2} \ln(x) \Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln(x) \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \\ &= \frac{x^2}{2} \ln(x) \Big|_1^e - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}. \end{aligned}$$

Schimbarea de variabilă în integrala definită

Putem acționa în două moduri. Determinăm întâi integrala nedefinită exprimând rezultatul în variabila de integrare inițială fără a folosi constanta de integrare și aplicând în final formula Leibniz-Newton dată de 16.8.

Exemplu: Să se calculeze

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Calculăm întâi

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx.$$

Facem schimbarea de variabilă următoare

$$e^x - 1 = z^2$$

în ideea de a elimina din calcul radicalul. Diferențiem relația anterioară și obținem

$$e^x dx = 2z dz$$

Exprimăm pe e^x în funcție de z .

$$e^x = z^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{2z dz}{z^2 + 1}$$

Integrala inițială devine

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx = \int z \frac{2z dz}{z^2 + 1} = 2 \int \frac{z^2 dz}{z^2 + 1}$$

Adunăm și scădem dz la numărător și dăm factor comun

$$2 \int \frac{z^2 dz + dz - dz}{z^2 + 1} = 2 \int \frac{(z^2 + 1 - 1)dz}{z^2 + 1} = 2 \int \frac{(z^2 + 1) - 1}{z^2 + 1} dz$$

Despărțim în două integrale

$$\begin{aligned} \int \frac{(z^2 + 1) - 1}{z^2 + 1} dz &= \int dz - \int \frac{dz}{z^2 + 1} = z - \arctg(z) = \\ &= \sqrt{e^x - 1} - \arctg \sqrt{e^x - 1} \end{aligned}$$

Aplicăm acestui rezultat formula Leibniz-Newton

$$\begin{aligned} \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx &= \left. \sqrt{e^x - 1} - \arctg \sqrt{e^x - 1} \right|_0^{\ln(2)} = \\ &= \sqrt{2 - 1} - \arctg \sqrt{2 - 1} - 0 + 0 \\ \Rightarrow \int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x - 1} dx &= 1 - \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

A doua variantă de calcul al unei integrale definite, folosind o schimbare de variabilă, impune calculul integralei cu noua variabilă dar și cu noi limite de integrare, formula Leibniz-Newton fiind aplicată în final pentru noua variabilă.

Teorema 16.5. (Schimbarea de variabilă) Fie I și J intervale, $\varphi : I \rightarrow J$ o funcție derivabilă și cu derivata continuă, $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și F o primitivă a sa. Dacă $a, b \in I$, atunci

$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{t_1=\varphi(a)}^{t_2=\varphi(b)} f(t) dt = F(t_2) - F(t_1) \quad (16.13)$$

Exemple:

1. Să se calculeze

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1 - x^2} dx.$$

Pentru această integrală indicația de schimbare de variabilă este

$$x = \sin(t), \quad dx = \cos(t) dt, \quad x = 0 \rightarrow t = 0, \quad x = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}.$$

Avem în continuare

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos(t) \cos(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^2(t) dt.$$

Pentru a putea calcula integrala aceasta folosim formulele

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}; \quad \cos^2(\alpha) = \frac{1 + \cos(2\alpha)}{2}.$$

Obținem:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^2(t) dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(2t)}{2} \cdot \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - \cos^2(2t)] dt = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \frac{1 + \cos(4t)}{2} dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(4t)) dt = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(4t) dt = \\ &= \frac{1}{8} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} \sin(4t) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{16} - 0 - 0 + 0 = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

2. Să se calculeze

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + e^{-x}}.$$

Facem schimbarea de variabilă

$$e^x = y; \quad e^x dx = dy; \quad dx = \frac{dy}{e^x}; \quad dx = \frac{dy}{y}; \quad x = 0 \rightarrow y = 1; \quad x = 1 \rightarrow y = e$$

Integrala devine

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x - e^{-x}} = \int_1^e \frac{1}{y + y^{-1}} \frac{dy}{y} = \int_1^e \frac{dy}{1 + y^2} = \arctg(y) \Big|_1^e = \arctg(e) - \frac{\pi}{4}.$$

16.5 Aplicații ale integralei definite

Numeroase probleme de geometrie, mecanică sau probleme generate de fenomene din științele naturii își găsesc rezolvarea prin determinarea unei mărimi S dată de însumarea unor mărimi descrescătoare

nemărginit, mărimi puse sub forma $f(\xi_i)\Delta x_i$, unde funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ este cunoscută, punctele diviziunii intervalului $[a, b]$ sunt $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, lungimea $x_i - x_{i-1}$ o notăm cu Δx_i pentru $i = 1, \dots, n$, iar valoarea argumentului ξ_i conținută în intervalul $[x_{i-1}, x_i]$ este necunoscută. Scriem suma:

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$$

și efectuăm trecerea la limită când n tinde la ∞ și lungimea intervalului de diviziune tinde la 0. Dacă limita există și e finită atunci

$$S = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0, \forall i=1,2,\dots,n}} [(f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n)] = \int_a^b f(x)dx$$

Dacă putem calcula acea integrală atunci formula Leibniz-Newton ne dă valoare lui S .

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Exemplu: Să presupunem că avem un fenomen generat pe intervalul $[a, b]$ de funcția continuă $f(x)$, fenomen pe care putem să îl determinăm astfel:

împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale de lungime egală $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ iar S este dat de

$$S = f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \dots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n}.$$

Nu cunoaștem valorile ξ_i dar pe S îl putem afla ca

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(\xi_i).$$

În acest caz, mărimea $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$ nu depinde de indicele de sumare i și o vom nota Δx . Atunci dacă limita există și e finită

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx. \quad (16.14)$$

Considerăm cazul în care trebuie să determinăm și funcția f . Fie

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

Încercăm să scriem limita sub forma dată de 16.14. În fiecare fracție dăm factor comun forțat la numitor pe n . Obținem

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n \left(1 + \frac{2}{n}\right)} + \dots + \frac{1}{n \left(1 + \frac{n}{n}\right)} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \left(\frac{i}{n}\right)}$$

Observăm că în acest caz avem $b - a = 1$ deci putem alege $a = 0$, $b = 1$. ξ_i putem să îl considerăm în cazul calculării limitei drept capătul din dreapta al intervalului $[x_{i-1}, x_i] = \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$. Funcția va fi $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Obținem astfel

$$S = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln(x+1) \Big|_0^1 = \ln 2.$$

16.5.1 Aria unei suprafețe mărginită de dreptele $x = a$, $x = b$, axa Ox și graficul funcției continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$.

Aria pe care dorim să o calculăm o vom numi aria subgraficului funcției continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ și o vom nota cu $\mathcal{A}$.

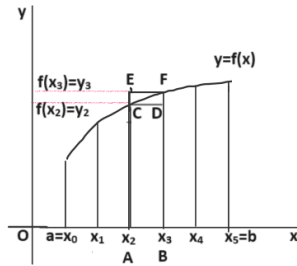


Fig. 16.1: Calculul ariei subgraficului $y = f(x)$, $x \in [a, b]$.

Împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale de mărimi egale, deci de lungime $\Delta x_i = \frac{b-a}{n}$. Presupunem pentru ușurința expunerii că f

este crescătoare. Aria căutată este suma ariilor subgraficelor de bază Δx_i . Aria subgraficului mărginit inferior de Δx_i notată cu $\mathcal{A}_i$ este cuprinsă între

$$y_{i-1} \cdot \Delta x_i \leq \mathcal{A}_i \leq y_i \cdot \Delta x_i. \quad (16.15)$$

În figura 16.1, de exemplu, aria subgraficului mărginit de Δx_3 este cuprinsă între ariile dreptunghiurilor $ACDB$ și $AEFB$.

Dacă funcția f este continuă pe $[a, b]$, ea este continuă pe orice interval $[x_{i-1}, x_i]$. Știm că o funcție continuă definită pe un interval închis și mărginit este mărginită și își atinge marginile. Fie m_i și M_i valorile de minim și de maxim ale funcției f pe $[x_{i-1}, x_i]$. Inegalitățile date de 16.15 devin

$$m_i \Delta x_i \leq \mathcal{A}_i \leq M_i \Delta x_i \quad (16.16)$$

Sumăm inegalitățile 16.16 și trecem la limită după n

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} m_i \Delta x_i = \mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\infty} M_i \Delta x_i$$

Alegând aleator puncte $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ inegalitatea 16.16 devine

$$m_i \Delta x_i \leq f(\xi_i) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i. \quad (16.17)$$

Sumăm după i , trecem la limită după n și ținem cont că

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx.$$

Rezultă că

$$\mathcal{A} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx. \quad (16.18)$$

În concluzie aria subgraficului funcției f pe intervalul $[a, b]$ este

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x) dx.$$

Interpretarea semnului negativ la arii astfel calculate

Observația 16.11. Dacă funcția f este definită pe $\mathbb{R}$ și pe intervalul $[a, b]$ are numai valori negative atunci

$$\int_a^b f(x)dx < 0.$$

În general, dacă f are semne diferite pe $[a, b]$, atunci integrala este diferența dintre aria aflată între axa Ox și graficul lui f , pe porțiunile în care f este pozitivă și aria aflată între axa Ox și graficul lui f , pe porțiunile în care f este negativă.

Aria cuprinsă între graficele a două funcții

Teorema 16.6. Fie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ două funcții continue astfel încât

$$f(x) \leq g(x), \quad \forall x \in [a, b].$$

Atunci mulțimea de puncte din plan cuprinsă între graficele celor două funcții și dreptele de ecuații $x = a$, $x = b$ are arie și această arie este dată de

$$\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x))dx. \quad (16.19)$$

Observația 16.12. Dacă se renunță la condiția $f(x) \leq g(x)$ atunci aria intergraficului este

$$\mathcal{A} = \int_a^b |g(x) - f(x)|dx. \quad (16.20)$$

16.5.2 Aplicații la calculul de arii

1. Să se determine aria elipsei

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Elipsa considerată admite atât axa Ox cât și axa Oy ca axe de simetrie așa că pentru a determina aria elipsei este suficient să calculăm porțiunea din aria elipsei situată în primul cadran. Elipsa taie axa Ox în primul cadran în punctul $A(a, 0)$ așa că

integrarea o vom face pe intervalul $[0, a]$. Pentru a găsi aria elipsei înmulțim aria calculată cu 4. Din ecuația elipsei explicităm pe y și avem

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Alegem doar ramura cu semnul $+$. Aria în primul cadran va fi

$$\mathcal{A}_I = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx.$$

Pentru a calcula integrala facem schimbarea de variabilă

$$x = a \sin(u); \quad dx = a \cos(u) du; \quad x = 0 \rightarrow u = 0;$$

$$x = a \rightarrow u = \frac{\pi}{2}.$$

Atunci:

$$\mathcal{A}_I = \frac{b}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos(u) \cdot a \cos(u) du = \frac{ba^2}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u) du$$

Pe $\cos^2(u)$ îl exprimăm în funcție de unghiul dublu

$$\cos^2(u) = \frac{1 + \cos(2u)}{2}.$$

Integrala devine

$$\mathcal{A}_I = \frac{ab}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos(2u)) du = \frac{ab}{2} u \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{ab}{4} \sin(2u) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Aria elipsei va fi

$$\mathcal{A} = 4 \cdot \mathcal{A}_I = \pi ab.$$

2. Să se calculeze aria finită cuprinsă între graficele funcțiilor

$$f(x) = 4x^2, \quad g(x) = \frac{8}{x^2 + 4}.$$

Trebuie determinate limitele de integrare. Rezolvăm ecuația

$$f(x) = g(x); \quad \frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2 + 4}; \quad x^4 + 4x^2 - 32 = 0.$$

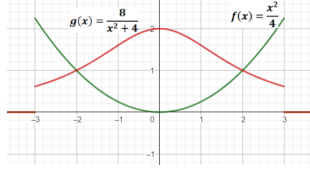


Fig. 16.2: Calculul ariei intergraficului $f(x) = \frac{x^2}{4}$, $g(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$.

Avem o ecuație bipătrată. Notăm $x^2 = z$ și ecuația devine

$$z^2 + 4z - 32 = 0 \quad \text{cu soluțiile} \quad z_1 = 4, \quad z_2 = -8.$$

Pentru că z este pătratul unui număr real considerăm doar soluția $z = 4$. Rezultă că $x = \pm 2$. Avem astfel calculate limitele de integrare și domeniul de integrare $[-2, 2]$. Deasupra este funcția $g(x)$ deci aria intergraficului este

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{-2}^2 (g(x) - f(x)) dx = \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = \\ &= 8 \int_{-2}^2 \frac{dx}{x^2 + 4} - \int_{-2}^2 \frac{x^2}{4} = \frac{8}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{2} \right) \Big|_{-2}^2 - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \\ &= 4 \left(\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3} \right) \right) = 2\pi - \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Aria intergraficului va fi

$$\mathcal{A} = 2\pi - \frac{4}{3}. \quad (16.21)$$

16.5.3 Volumul unui corp de rotație

Considerăm curba plană $y = f(x)$, axa Ox și dreptele $x = a$, $x = b$. Rotim această figură în jurul axei Ox . Volumul corpului astfel obținut este

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (16.22)$$

Pentru a memora mai ușor această formulă trebuie să vă imaginați că volumul obținut este limita sumării volumelor unor cilindri cu raza

$f(x)$ și înălțimea dx . Cum volumul unui cilindru de rază R și înălțime h este $\pi R^2 h$ atunci evident volumul $\mathcal{V}$ va fi dat de formula 16.22.

Aplicație: Să se afle prin integrare volumul trunchiului de con obținut prin rotirea în jurul axei Ox a segmentului de dreaptă $x + y = 4$, $x \in [0, 3]$.

Din ecuația dreptei explicităm pe y . Rezultă $y = f(x) = 4 - x$. Atunci volumul căutat este

$$\mathcal{V} = \pi \int_0^3 (4 - x)^2 dx = \pi \int_0^3 (16 - 8x + x^2) dx = \pi \left(16x - 8\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^3$$

Rezultă că volumul trunchiului de con este

$$\mathcal{V} = \pi(48 - 36 + 9) = 21\pi.$$

Calculăm și direct volumul acestui trunchi de con. Avem baza mare cerc de rază 4 deci aria ei este $A_1 = 16\pi$, baza mică cerc de rază 1 deci aria ei va fi $A_2 = \pi$ și înălțimea egală cu 3. Volumul este:

$$\mathcal{V}_{trcon} = \frac{(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}) \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (16 + 1 + 4) \cdot 3}{3} = 21\pi.$$

16.5.4 Calculul ariei suprafețelor de rotație

Fie $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ o funcție derivabilă și cu derivata continuă. Atunci integrala

$$\mathcal{A}_l = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (16.23)$$

reprezintă aria suprafeței obținută prin rotirea graficului lui f în jurul axei Ox .

Aplicații: 1. Să se calculeze aria unei sfere de rază r .

Considerăm $x^2 + y^2 = r^2$ ecuația cercului centrat în origine și de rază r . Semicercul situat deasupra axei Ox are ecuația $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$. Rotirea graficului funcției $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ în jurul axei Ox ne dă suprafața sferei a cărei arie dorim să o calculăm. Avem:

$$f'(x) = -\frac{2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad (f'(x))^2 = \frac{x^2}{r^2 - x^2}.$$

Aria sferei va fi

$$\mathcal{A}_l = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{\frac{r^2 - x^2 + x^2}{r^2 - x^2}} dx.$$

Efectuând toate calculele obținem

$$\mathcal{A}_l = 2\pi \int_{-r}^r r dx = 2\pi r \cdot x|_{-r}^r = 2\pi r(r+r) = 4\pi r^2.$$

2. Să se calculeze aria suprafeței obținută prin rotația unei bucle de sinusoidă în jurul axei Ox .

Ind.: Considerăm $f : [0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = \sin(x)$. Atunci

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^\pi \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx = 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} \sin(x) \sqrt{1 + \cos^2(x)} dx.$$

Facem schimbarea de variabilă $\cos(x) = t$, $x = 0 \dots t = 1$, $x = \pi/2 \dots t = 0$

$$\mathcal{A} = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1 + t^2} dt = 2\pi(\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})).$$

16.5.5 Determinarea cu calcul integral a lucrului mecanic

În cazul unei forțe constante care acționează în direcția mișcării, lucrul mecanic efectuat de acea forță în deplasarea unui mobil pe distanța $s = s_f - s_i$, unde s_f este poziția finală și s_i este poziția inițială, este dat de

$$L = F \cdot s; \quad \text{sau în formă vectorială} \quad L = \vec{F} \cdot \vec{s}.$$

În cazul în care deplasarea se face de-a lungul unei drepte și forța este dată de o funcție continuă $f : [x_i, x_f] \rightarrow \mathbb{R}$ calculul lucrului mecanic este dat de

$$L = \int_{x_i}^{x_f} f(x) dx. \quad (16.24)$$

Exemplu de calcul al lucrului mecanic

Un mobil se mișcă rectiliniu având legea de mișcare

$$s(t) = ct^3.$$

Rezistența aerului la înaintare este proporțională cu pătratul vitezei. Să se determine lucrul mecanic efectuat de rezistența aerului când

corpul se mișcă de la $s=0$ la $s=a$.

Determinăm în primul rând forța care generează lucrul mecanic

$$f(s(t)) = k \left(\frac{ds}{dt} \right)^2; \quad f(t) = k \cdot (3ct^2)^2 = 9kc^2t^4,$$

unde k este factorul constant de proporționalitate. Calculăm pe ds

$$ds = 3ct^2 dt.$$

Determinăm limitele de integrare care sunt date de timpul la care mobilul era în poziția inițială și de timpul din poziția finală.

$$s(t) = ct^3, \quad 0 = ct^3 \rightarrow t_0 = 0; \quad a = ct^3 \Rightarrow t^3 = \frac{a}{c}, \quad t_f = \sqrt[3]{\frac{a}{c}}$$

Forța de rezistență acționează în sens invers deplasării deci lucrul mecanic va fi dat de

$$L = - \int_{s_i}^{s_f} f(s) ds = - \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}} 9kc^2t^4 \cdot 3ct^2 dt = -27kc^3 \int_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}} t^6 dt$$

Deci

$$L = -27kc^3 \frac{t^7}{7} \Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{a}{c}}} = -\frac{27}{7}kc^3 \sqrt[3]{\frac{a^7}{c^7}} = -\frac{27}{7}k\sqrt[3]{a^7c^2}.$$

16.5.6 Lungimea unui arc de curbă

Considerăm un arc de curbă plană (C) dată sub formă parametrică, cu capetele în punctele P și Q . Lungimea acestui arc de curbă este $s = s(t)$.

$$(C)_{|PQ} : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [t_P, t_Q]$$

Lungimea segmentului PQ o obținem din teorema lui Pitagora în triunghiul PMQ și este

$$|PQ| = \sqrt{|PM|^2 + |MQ|^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \quad (16.25)$$

Dacă f și g sunt diferențiabile atunci făcându-l pe Q să tindă către P avem

$$Q \rightarrow P \Rightarrow s \rightarrow ds, \quad |PQ| \rightarrow ds, \quad \Delta x \rightarrow dx, \quad \Delta y \rightarrow dy$$

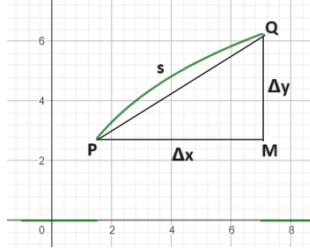


Fig. 16.3: Element de arc de curbă.

și relația 16.25 devine

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (16.26)$$

Atunci lungimea arcului s va fi

$$s = \int_{t_P}^{t_Q} ds = \int_{t_P}^{t_Q} \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt \quad (16.27)$$

Exemple de determinare a lungimii unui arc de curbă

1. Să se afle lungimea unui arc de cerc de rază $r = 3$ determinat de unghiurile $t_1 = \frac{\pi}{7}$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$.

Ecuatiile parametrice ale unui cerc de rază r sunt

$$(C) : \begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

iar ale arcului considerat sunt

$$\begin{cases} x = 3 \cos(t) \\ y = 3 \sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{4} \right]$$

Elementul de arc va fi

$$ds = \sqrt{9(-\sin(t))^2 + 9(\cos(t))^2} dt = 3dt.$$

Atunci lungimea arcului considerat va fi

$$s = \int_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{4}} 3dt = 3t \Big|_{\frac{\pi}{7}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{3\pi}{4} - \frac{3\pi}{7} = \frac{9\pi}{28}.$$

2. Să se determine lungimea arcului de curbă

$$e^x = \frac{e^y + 1}{e^y - 1}, \quad y \in [1, 2].$$

Pentru $y \in [1, 2]$ funcția $g(y) = \frac{e^y + 1}{e^y - 1}$ este pozitivă deci putem loga-ritma ecuația care ne dă curba și obținem

$$x = \ln(e^y + 1) - \ln(e^y - 1).$$

Pentru că în noua ecuație a curbei îl avem pe x exprimat ca o funcție de y putem alege reprezentarea parametrică trivială a curbei

$$(C) : \begin{cases} x = \ln \frac{e^t + 1}{e^t - 1} \\ y = t \end{cases} \quad t \in [1, 2].$$

Atunci

$$dy = dt; \quad dx = \left(\frac{e^t}{e^t + 1} - \frac{e^t}{e^t - 1} \right) dt = -\frac{2e^t}{e^{2t} - 1} dt$$

și ds este

$$ds = \sqrt{1 + \frac{4e^{2t}}{(e^{2t} - 1)^2}} dt = \sqrt{\frac{(e^{2t} - 1)^2 + 4e^{2t}}{(e^{2t} - 1)^2}} dt = \sqrt{\frac{(e^{2t} + 1)^2}{(e^{2t} - 1)^2}} dt$$

deci

$$ds = \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} dt.$$

Lungimea arcului de curbă va fi

$$s = \int_1^2 ds = \int_1^2 \frac{e^{2t} + 1}{e^{2t} - 1} dt$$

Tehnica de lucru pentru a calcula integrala este să se scadă și să se adune la numărător $2e^{2t}$. Integrala devine

$$s = \int_1^2 \frac{e^{2t} + 1 - 2e^{2t} + 2e^{2t}}{e^{2t} - 1} dt = \int_1^2 \frac{1 - e^{2t}}{e^{2t} - 1} dt + \int_1^2 \frac{2e^{2t}}{e^{2t} - 1} dt.$$

$$s = -t \Big|_1^2 + \ln(e^{2t} - 1) \Big|_1^2 = -1 + \ln(e^4 - 1) - \ln(e^2 - 1) = \ln(e^2 + 1) - 1.$$

3. În cazul în care avem curba dată în coordonate polare $\rho = \rho(\theta)$ atunci reprezentarea sa parametrică este

$$(C) : \begin{cases} x = \rho(\theta) \cos(\theta) \\ y = \rho(\theta) \sin(\theta) \end{cases} \quad \theta \in [\theta_1, \theta_2]$$

Elementul de arc ds va fi

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta.$$

În acest caz obținem pentru calculul lui s formula

$$s = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2(\theta) + (\rho'(\theta))^2} d\theta \quad (16.28)$$

Să se determine lungimea cardioidei $\rho = a(1 + \cos(\theta))$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

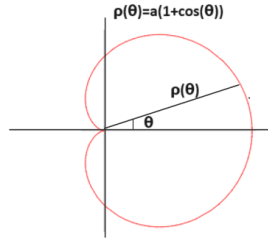


Fig. 16.4: Cardioida $\rho = a(1 + \cos(\theta))$.

Vom calcula jumătate din lungimea cardioidei respectiv pentru unghiul $\theta \in [0, \pi]$. Elementul de arc este

$$ds = \sqrt{a^2(1 + \cos(\theta))^2 + a^2 \sin^2(\theta)} d\theta$$

Efectuăm calculele sub radical și obținem

$$ds = a\sqrt{1 + 2\cos(\theta) + \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} d\theta = a\sqrt{2 + 2\cos(\theta)} d\theta$$

Trecem la unghiul pe jumătate și obținem

$$ds = 2a\sqrt{\frac{1 + \cos(\theta)}{2}} d\theta = 2a \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

Atunci jumătate din lungimea cardioidei este

$$\frac{s}{2} = \int_0^{\pi} ds = 2a \int_0^{\pi} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 4a \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \Big|_0^{\pi} = 4a.$$

Rezultă că lungimea cardioidei $\rho = 1(1 + \cos(\theta))$ este $8a$.

16.5.7 Determinarea centrului de greutate al unui fir

Fir omogen

Considerăm un fir omogen pe care îl echivalăm cu un arc de curbă regulat.

$$(C) : \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [t_1, t_2]$$

cu f și g derivabile. Pentru firul omogen avem coordonatele centrului de greutate date de

$$x_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x ds}{\int_{t_1}^{t_2} ds}; \quad y_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y ds}{\int_{t_1}^{t_2} ds}. \quad (16.29)$$

Exemplu: Să se determine centrul de greutate al arcului de cerc

$$\begin{cases} x = r \cos(t) \\ y = r \sin(t) \end{cases} \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$$

. Avem

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} dt = r dt.$$

Atunci

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} x ds = \int_0^{\frac{\pi}{6}} r \cos(t) \cdot r dt = r^2 \sin(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{r^2}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} y ds = \int_0^{\frac{\pi}{6}} r \sin(t) \cdot r dt = -r^2 \cos(t) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) r^2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} r dt = r t \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi r}{6}.$$

Atunci

$$x_G = \frac{\frac{r^2}{2}}{\frac{\pi r}{6}} = \frac{3r}{\pi}, \quad y_G = \frac{(2 - \sqrt{3})r}{\pi}$$

Fir neomogen cu densitatea $\rho = \rho(t)$

În acest caz formulele care ne dau coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \rho x ds}{\int_{t_1}^{t_2} \rho ds}; \quad y_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \rho y ds}{\int_{t_1}^{t_2} \rho ds}. \quad (16.30)$$

Exemplu: Să se determine coordonatele centrului de greutate al arcului de cicloidă

$$\begin{cases} x = t - \sin(t) \\ y = 1 - \cos(t) \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right]$$

știind că densitatea firului este dată de

$$\rho(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$$

Avem pe rând

$$dx = (1 - \cos(t))dt, \quad dy = \sin(t)dt, \quad ds = 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt.$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cdot x \cdot ds &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot (t - \sin(t)) \cdot 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (t - \sin(t)) dt = \\ &= (t^2 + 2 \cos(t)) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{9} \pi^2 - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cdot y \cdot ds &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot (1 - \cos(t)) \cdot 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \\ &= 2(t - \sin(t)) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3} - 1. \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \rho \cdot ds = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \cdot 2 \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = 2 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt = 2t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2\pi}{3}.$$

De aici obținem

$$x_G = \frac{2\pi^2 - 9\sqrt{3}}{6\pi}, \quad y_G = \frac{2\pi - 3}{2\pi}$$

16.6 Metode de integrare numerică

În cazul în care integrala definită nu poate fi calculată, se pot folosi diverse metode numerice dar și softuri dedicate. Vom beneficia de faptul că integrala definită are și semnificația de arie și vom transforma problema de calcul integral în una de geometrie simplă. Metodele prezentate în continuare au dezavantajul că pentru a fi mai performante, ca eroarea de calcul să fie cât mai mică, trebuie să folosească algoritmi iterativi care în calculele directe sunt dificil de aplicat.

16.6.1 Metoda trapezelor

Fie funcția continuă $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Pentru calculul integralei $\int_a^b f(x) dx$

folosim următoarea aproximare:

Împărțim intervalul $[a, b]$ în n intervale egale prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

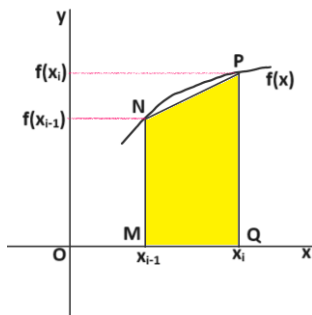


Fig. 16.5: Aproximarea integralei definite cu aria unui trapez

Pe fiecare interval $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ și aproximăm $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx$ cu aria trapezului care are vârfurile în punctele $M(x_{i-1}, 0)$, $N(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, $P(x_i, f(x_i))$, $Q(x_i, 0)$. Aria trapezului considerat este

$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)h}{2} = \frac{(f(x_i) + f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1})}{2}$$

dar $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ deci

$$\mathcal{A}_i = \frac{b-a}{2n} \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i))$$

Sumăm după i de la 1 la n și obținem

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2n} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

16.6.2 Metoda Simpson

Considerăm funcția $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuă.

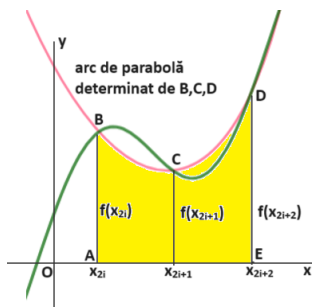


Fig. 16.6: Aproximarea integralei definite cu metoda Simpson

Împărțim intervalul $[a, b]$ în $2n$ intervale egale prin punctele

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2i} < x_{2i+1} < x_{2i+2} < \dots < x_{2n} = b.$$

făcând notația

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{2n} \stackrel{\text{not}}{=} h.$$

Pe intervalul $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ facem aproximarea

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)dx \approx \text{aria trapezului curbiliniu parabolic } \mathcal{A}_{ABCDE} \quad (16.31)$$

Arcul de curbă BCD este arcul de parabolă determinată de punctele $B(x_{2i}, f(x_{2i}))$, $C(x_{2i+1}, f(x_{2i+1}))$, $D(x_{2i+2}, f(x_{2i+2}))$. Notăm pentru ușurința urmăririi

$$f(x_k) = y_k, \quad k = 0, \dots, 2n.$$

Metoda Simpson dă o aproximare mai bună a integralei decât metoda trapezelor.

Sumăm după fiecare interval $[x_{2i}, x_{2i+2}]$, $i = 0, \dots, n-1$ și obținem aproximarea dată de metoda Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2})] \quad (16.32)$$

16.7 Aplicații ale calculului integral în MATLAB

Pentru calculul aproximativ al integralelor definite MATLAB pune la dispoziție, în principiu două instrucțiuni, TRAPZ și INTEGRAL. Aproximarea prin INTEGRAL este mult mai bună decât cea dată de TRAPZ care este dependentă de numărul de intervale utilizat în calcul. Dacă integrala definită poate fi calculată direct se poate folosi instrucțiunea INT care conduce la valoarea exactă a integralei.

1. Să se determine

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx.$$

Calculul direct ne dă

$$\int_0^{\pi} \sin(x)dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2.$$

Să determinăm o aproximare a acestei integrale definite folosind metoda trapezelor, respectiv folosind instrucțiunea TRAPZ.

```
>> x=linspace(0,pi,10);
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)

ans =

    1.9797
```

Prima instrucțiune ne spune că variabila $x \in [0, \pi]$ și că acest interval este împărțit în 10 intervale egale. A doua instrucțiune este cea care definește funcția de integrat iar a treia instrucțiune este cea care definește metoda de calcul și anume TRAPZ.

```
>> x=linspace(0,pi,50);
>> y=sin(x);
>> trapz(x,y)

ans =

    1.9993
```

O secvență similară în care intervalul $[0, \pi]$ este împărțit în 50 de subintervale egale ne duce la o aproximare mai bună a integralei definite.

Observație: instrucțiunile terminate cu simbolul ";" nu generează afișarea rezultatului acțiunii lor iar cele care nu sunt terminate cu acest simbol generează afișarea rezultatului acțiunii.

Să calculăm aceeași integrală cu instrucțiunea INTEGRAL.

Prima instrucțiune ne definește funcția de integrat dependentă de variabila x iar a doua instrucțiune este cea care efectuează integrala în intervalul $[0, \pi]$. Observăm că rezultatul coincide cu rezultatul integrării directe.

```
>> fun=@(x) sin(x);
>> integral(fun,0,pi)

ans =

    2.0000
```


Integrala pe care o avem de calculat poate fi calculată și direct având formulă de integrare așa că în MATLAB putem folosi instrucțiunea INT. Prima instrucțiune definește variabila

```
>> syms x
>> f=sin(x);
>> int(f,x,0,pi)

ans =

2
```

x ca variabilă simbolică. În a doua instrucțiune introducem funcția sinus iar a treia instrucțiune calculează integrala definită $\int_0^{\pi} \sin(x) dx$.

2. Să se calculeze integrala

$$\int_0^1 x \operatorname{tg}(x) dx.$$

Ca să calculăm această integrală direct ar trebui să folosim integrarea prin părți dar oricum am alege părțile nu vom putea să o calculăm. Această integrală nu se poate calcula direct. Să o determinăm întâi folosind metoda trapezelor.

```
>> x=linspace(0,1,100);
>> y=x.*tan(x);
>> format long
>> trapz(x,y)

ans =

0.428130667583858
```

Prima instrucțiune definește variabila x ca pe un vector cu 100 de componente de lungime $1/100$. În a doua instrucțiune avem de înmulțit un vector cu o funcție de acel vector deci e ceva de tipul înmulțire de matrici așa că simbolul de înmulțire este ".*" nu doar "*". Instrucțiunea a treia impune afișarea numerelor reale cu 15 zecimale.

Aceeași integrală calculată cu INTEGRAL ne dă

```
>> fun=@(x) x.*tan(x);
>> integral(fun,0,1)

ans =

0.428088301365176
```

3. Să se calculeze aria cuprinsă între funcțiile $f(x) = \frac{8}{x^2 + 4}$ și $g(x) = \frac{x^2}{4}$ în intervalul $[-2, 2]$.

```
>> fun=@(x) 8./(x.^2.+4)-x.^2./4;
>> integral(fun,-2,2)

ans =

4.949851973846253
```

Iată comparativ rezultatele calculate direct și cu INTEGRAL.

$$\mathcal{A} = \int_{-2}^2 \left(\frac{8}{x^2 + 4} - \frac{x^2}{4} \right) dx = 2\pi - \frac{4}{3} \approx 4,949851974$$

4. Considerăm un fir omogen ale cărui ecuații parametrice sunt:

$$\begin{cases} x = 2 \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (16.33)$$

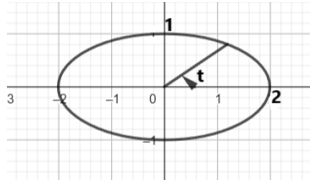
Să se determine lungimea firului, coordonatele centrului de greutate și volumul corpului obținut prin rotirea firului în jurul axei Ox .

Dacă eliminăm parametrul t între ecuațiile 16.33 obținem ecuația carteziană implicită

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

ceea ce înseamnă că avem de a face cu o elipsă întreagă.

Lungimea ei o putem calcula, folosind simetriile ei, ca de patru ori lungimea sfertului aflat în primul cadran. Vom face calculul atât pornind de la ecuațiile parametrice cât și pornind de la ecuația carteziană.



- Pornind de la ecuațiile parametrice formula de calcul este

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt.$$

Limitele de integrare vor fi $t_1 = 0$ și $t_2 = \frac{\pi}{2}$,

Derivatele lui x și y sunt $\dot{x}(t) = -2\sin(t)$, $\dot{y}(t) = \cos(t)$.
Atunci $\dot{x}^2(t) = 4\sin^2(t)$, $\dot{y}^2(t) = \cos^2(t)$ iar integrala devine

$$\frac{1}{4}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4\sin^2(t) + \cos^2(t)} dt \text{ iar lungimea firului va fi } I.$$

Calculule până la integrală au fost elementare dar calculul integralei nu mai este elementar și îl vom face în MATLAB folosind instrucțiunea de integrare numerică INTEGRAL.

```
>> syms x
>> fun=@(x) (4.*sin(x).^2+cos(x).^2).^(1/2);
>> I=4.*integral(fun,0,pi/2)

I =

    9.688448220547674
```

- Facem același calcul pornind însă de la ecuația carteziană a elipsei. Îl exprimăm pe y și avem $y = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$.

Sfertul de elipsă care ne interesează este dat de $y = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ cu x variind între 0 și 2. Formula de determinare a lungimii I în acest caz este

$$I = 4 \cdot \int_0^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Avem:

$$y'(x) = -\frac{x}{2\sqrt{4-x^2}}, \quad 1+(y'(x))^2 = 1 + \frac{x^2}{4(4-x^2)} = \frac{16-3x^2}{4(4-x^2)}.$$

Integrala care trebuie calculată este

$$J = \int_0^2 \sqrt{\frac{16-3x^2}{4(4-x^2)}} dx, \quad \text{iar} \quad I = 4J.$$

Pentru calculul numeric am folosit notațiile:

```
>> syms x
>> y=sqrt(1/4*(4-x^2));
>> y1=simplify(diff(y,x));
>> simplify(1+y1^2)

ans =

(3*x^2 - 16)/(4*(x^2 - 4))

>> fun=@(x)((16.-3.*x.^2)./(4.*(4.-x.^2))).^(1/2);
>> I=4*integral(fun,0,2)

I =

9.688448220547984
```

funcția considerată e notată cu y , derivata ei, y' , e notată cu $y1$, iar funcția de integrat e notată cu $\sqrt{1+y1^2}$.

Pentru că firul este omogen, iar elipsa are originea ca centru de simetrie, rezultă că centrul de greutate este chiar originea sistemului de coordonate. Să verificăm prin calcul acest lucru. În cazul firului omogen pentru care avem date ecuațiile parametrice, formulele pentru coordonatele centrului de greutate sunt:

$$x_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x ds}{\int_{t_1}^{t_2} ds}; \quad y_G = \frac{\int_{t_1}^{t_2} y ds}{\int_{t_1}^{t_2} ds}.$$

Avem:

$$t \in [0, 2\pi]; \quad x(t) = 2 \cos(t); \quad ds = \sqrt{4 \sin^2(t) + \cos^2(t)} dt =$$

$$= \sqrt{3 \sin^2(t) + 1} dt.$$

Am calculat înainte lungimea firului $I = 9,6884..$ și rămâne de calculat $\int_0^{2\pi} x ds$.

Pentru calculul integralei de la numărător în MATLAB vom folosi instrucțiunea `INT` care nu este o integrare numerică ci este una exactă. Motivarea acestui fapt este dată de faptul că

$$\int_0^{2\pi} x ds = \int_0^{2\pi} 2 \cos(t) \sqrt{3 \sin^2(t) + 1} dt$$

care poate fi pusă de forma

$$\alpha \int_a^b \sqrt{\beta^2 u^2 + 1} du.$$

Programul MATLAB este:

```
>> syms t
>> f=2*cos(t)*sqrt(3*sin(t)^2+1);
>> I=int(f,t,0,2*pi)

I =

0
```

Atunci, pentru x_G avem numărătorul egal cu zero iar numitorul este diferit de zero, deci $x_G = 0$.

Pentru y_G avem:

$$\begin{aligned} t \in [0, 2\pi]; \quad y(t) = \sin(t); \quad ds &= \sqrt{4 \sin^2(t) + \cos^2(t)} dt = \\ &= \sqrt{4 - 3 \cos^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Observația 16.13. Pentru integrarea formală cu funcția *int*, nu poate fi folosită pentru ds expresia $ds = \sqrt{4 \sin^2(t) + \cos^2(t)} dt$ pentru că softul nu poate face integrarea. În cazul în care vrem să folosim acea expresie pentru ds putem utiliza integrarea numerică cu comanda *integral* dar răspunsul nu va fi 0 ci $4 \cdot 10^{-16}$ care este o foarte bună aproximare a lui 0. Pentru $ds = \sqrt{4 - 3 \cos^2(t)} dt$ poate fi folosită instrucțiunea *int*.

```
>> syms t
>> f=sin(t)*sqrt(4-3*cos(t)^2);
>> J=int(f,t,0,2*pi)

J =

0
```

Programul MATLAB pentru calculul numărătorului este:

deci și y_G este 0.

Să determinăm volumul corpului de rotație cerut.

Considerăm arcul de curbă $y = f(x) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}}$ cu $x \in [-2, 2]$. Avem formula pentru volum:

$$V = \pi \int_{-2}^2 f^2(x) dx = \pi \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx.$$

Integrala este deosebit de simplă și poate fi calculată direct obținând

$$\pi \int_{-2}^2 \left(1 - \frac{x^2}{4}\right) dx = \pi \left(x - \frac{x^3}{12}\right) \Big|_{-2}^2 = \frac{8\pi}{3}.$$

Programul MATLAB este:

```
>> syms x
>> f2=1-(x^2)/4;
>> V=pi*int(f2,x,-2,2)

V =

(8*pi)/3
```

5. Să se afle aria laterală a unui paraboloid generat prin rotirea parabolei $y^2 = 18x$, $x \in [0, 7/2]$ în jurul axei Ox .

Să calculăm pentru început aria prin integrare directă. Avem:

$y^2 = 18x$, $y = \pm 3\sqrt{2x}$, considerăm arcul pozitiv, $f(x) = 3\sqrt{2x}$.

Aria laterală va fi

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^{7/2} f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Înlocuim și obținem integrala

$$\mathcal{A} = 2\pi \int_0^{7/2} 3\sqrt{2x} \sqrt{1 + \frac{9}{2x}} dx = 3\pi \int_0^{7/2} \sqrt{2x+9} \cdot 2dx.$$

Integrala este directă deci:

$$\mathcal{A} = 3\pi \frac{(2x+9)^{3/2}}{\frac{3}{2}} \bigg|_0^{7/2} = 2\pi(64-27) = 74\pi.$$

Programul MATLAB este:

```
>> syms x
>> f=3*sqrt(2*x);
>> f1=diff(f);
>> g=f*sqrt(1+(f1)^2);
>> A=2*pi*int(g,0,7/2)
```

```
A =
```

```
74*pi
```


IV

Statistică și probabilități

Capitolul 17

Elemente de statistică

Statistica are două direcții de studiu bine definite. Prima direcție la rândul ei are două componente, statistica descriptivă și statistica matematică. Statistica descriptivă sau formală se ocupă cu culegerea și înregistrarea datelor referitoare la un fenomen studiat. Statistica matematică este cea prin intermediul căreia datele sunt analizate și interpretate. A doua direcție de studiu în statistică, care ține tot de statistica matematică, se ocupă cu elaborarea unor previziuni privind evoluția fenomenului.

17.1 Noțiuni fundamentale utilizate în statistică

Definiția 17.1.

1. *Se numește populație statistică mulțimea pe care se realizează studiul statistic.*
2. *Elementele unei populații statistice se numesc unități statistice sau indivizi.*
3. *Cardinalul unei populații statistice poartă numele de efectiv total al populației.*
4. *O submulțime a populației statistice aleasă pentru a se efectua un studiu statistic asupra ei se numește eșantion.*
5. *Elementele unei populații sunt caracterizate de proprietăți. O proprietate în raport care se face studiul statistic se numeste indicator, caracteristică sau variabilă statistică.*

Exemple

1. Efectuăm un studiu privind mediile la matematică obținute de elevii unei clase la sfârșitul unui an școlar. În acest caz avem:
 - Mulțimea elevilor din clasă reprezintă populația statistică.
 - Indivizii sau unitățile statistice sunt elevii clasei.
 - Variabila statistică sau caracteristica studiată este media la matematică.
 - Efectivul total al populației este numărul de elevi din clasă.
 - Mulțimea elevilor cu media peste 7 va forma un eșantion.
2. O întreprindere are 90 de membri. Se dorește elaborarea unui raport statistic privind salariul lunar al membrilor, starea civilă și numărul de copii aflați în întreținerea lor. În această situație vom avea:
 - Populația statistică este mulțimea membrilor întreprinderii.
 - Unitățile statistice sunt membrii colectivului.
 - Efectivul total al populației va fi 90.
 - Caracteristicile sau variabilele statistice vor fi: salariul lunar, starea civilă, numărul de copii în întreținere.
 - Un eșantion este, de exemplu format din membrii căsătoriți.

O observație imediată este că avem unele caracteristici ce pot fi exprimate numeric și altele ce nu pot fi exprimate numeric.

- Caracteristicile care pot fi exprimate numeric se numesc caracteristici cantitative.
 - O caracteristică cantitativă care ia valori într-o mulțime numerică finită se numește discretă sau discontinuă. De exemplu, media unui elev la o materie, salariul lunar al unui muncitor.
 - O caracteristică cantitativă ce ia orice valori în intervale numerice se numește caracteristică cantitativă continuă.
 - Pentru o caracteristică cantitativă continuă intervalele în care aceasta poate lua valori poartă numele de grupe sau clase de valori. De exemplu, creșterea în înălțime într-un interval de timp este o caracteristică continuă.
- O caracteristică ce nu poate fi exprimată numeric se numește caracteristică calitativă.

17.2 Date statistice, prelucrarea lor primară

Într-o tabără sunt 54 de elevi și se va efectua un studiu după înălțimea lor exprimată în centimetri. Înregistrarea datelor se va face într-un tabel, în ordinea efectuării măsurărilor.

Tabelul 1

162	173	152	183	174	185	155	142	162
183	174	155	166	187	155	164	178	185
175	155	164	153	172	168	178	158	157
183	164	175	152	161	170	169	158	173
186	165	174	175	172	181	160	169	178
157	166	155	174	183	162	171	182	185

Datele înregistrate în Tabelul 1 sunt dificil de urmărit și în concluzie de interpretat. Este util, mai ales în cazul efectivelor mari să se sorteze datele după o anumită caracteristică și apoi să se grupeze cum este prezentat în Tabelul 2.

Tabelul 2.

h în cm.	Nr. elevi	h în cm.	Nr. elevi	h în cm.	Nr. elevi	h în cm.	Nr. elevi
142	1	160	1	168	1	174	4
152	2	161	1	169	2	175	3
153	1	162	3	170	1	178	5
155	5	164	3	171	1	181	3
157	2	165	1	172	2	183	3
158	2	166	2	173	2	185	3

Numărul de unități corespunzătoare unei valori a caracteristicii poartă numele de **frecvența** acelei caracteristici. De exemplu, în Tabelul 2, caracteristica 178 are frecvența 5. Suma frecvențelor ne dă efectivul total al populației. În Tabelul 2, caracteristica h (înălțimea) este una cantitativă discretă. Din această tabel putem determina rapid că cea mai mică valoare a caracteristicii este 142cm, avem de două ori cea cea mai mare valoare a caracteristicii, la 155cm și la 178cm.

Putem să efectuăm și o grupare a datelor în clase de valori transformând astfel caracteristica cantitativă discretă, înălțimea, într-o caracteristică continuă. Clasele de valori se aleg sub forma unor intervale de tipul $[a, b)$ cu excepția ultimei clase de valori a cărei formă poate să fie $[a, b]$. Pentru o clasă de valori, diferența $b - a$ se numește

amplitudinea clasei. Stabilirea amplitudinii unei clase este la latitudinea celui care face studiul statistic.

Tabelul 3.

Clase de valori (grupe) în cm.	Nr. elevi
[140-150)	1
[150-160)	12
[160-170)	14
[170-180)	18
[180-190]	9

17.3 Frecvențe și serii statistice

Considerăm o populație statistică cu efectivul total N , variabila statistică X cu valorile $x_1, x_2, \dots, x_p$ și $n_1, n_2, \dots, n_p$ numărul de unități statistice corespunzătoare. Mulțimea

$$S = \{(x_i, n_i) \mid i = 1, 2, \dots, p\}$$

se numește **serie statistică cu o variabilă**. De menționat că x_i pot să fie și clase de valori. Numerele n_i se numesc **frecvențe absolute** ale caracteristicilor x_i sau ale claselor de valori x_i .

Avem evident relația $n_1 + n_2 + \dots + n_p = N$.

O serie statistică cu o variabilă statistică este dată, în general, sub formă de tabel organizat pe linii sau pe coloane.

Valori caracteristice	x_1	x_2	..	x_p
Frecvența absolută	n_1	n_2	..	n_p

sau

Clase de valori	$[x_1, x_2)$	...	$[x_{p-1}, x_p)$
Frecvența absolută	n_1		n_p

Tabelele 2 și 3 ne dau, de exemplu distribuția sau repartiția statistică a înălțimii grupului de elevi din tabără.

17.3.1 Frecvențe cumulate

- Se numește **frecvență absolută cumulată crescătoare** a valorii x_i suma frecvențelor valorilor caracteristicii până la x_i in-

clusiv.

$$N_{\leq i} = \sum_{k=1}^i n_k \quad 1 \leq i \leq p$$

- Se numește **frecvență absolută cumulată descrescătoare** a valorii x_i a variabilei statistice suma tuturor frecvențelor absolute de la n_i până la n_p inclusiv.

$$N_{\geq i} = \sum_{k=i}^p n_k \quad 1 \leq i \leq p$$

Similar se definesc frecvențele absolute cumulate și pentru clasele de valori.

- Se numește **frecvență relativă** a unei valori caracteristice sau a unei clase de valori raportul

$$f_i = \frac{n_i}{N}, \quad 1 \leq i \leq p.$$

Remarcăm că frecvențele relative sunt subunitare, iar suma lor este 1. Frecvențele relative pot fi exprimate la nevoie și procentual, iar în acest caz suma lor este 100%.

Ca și în cazul frecvențelor absolute definim:

- **Frecvența relativă cumulată crescătoare** a valorii x_i sau a clasei de valori corespunzătoare

$$F_{\leq i} = \sum_{k=1}^i f_k \quad 1 \leq i \leq p$$

- **Frecvența relativă cumulată descrescătoare** a valorii x_i sau a clasei de valori corespunzătoare

$$F_{\geq i} = \sum_{k=i}^p f_k \quad 1 \leq i \leq p$$

Sunt adevărate relațiile

$$F_{\leq i} = \frac{N_{\leq i}}{N}, \quad F_{\geq i} = \frac{N_{\geq i}}{N}$$

Exemplu: Să reluăm Tabelul 3 și să îl completăm cu frecvențele absolute și relative definite anterior și apoi să interpretăm datele.

Tabelul 4

Clase de înălțimi în cm.	Frecvența absolută n_i	$N_{\leq i}$	$N_{\geq i}$	Frecvență relativă f_i	$F_{\leq i}$	$F_{\geq i}$
[140-150)	1	1	54	0,02=2%	0,02=2%	1=100%
[150-160)	12	13	53	0,22=22%	0,24=24%	0,98=98%
[160-170)	14	27	41	0,26=26%	0,5=50%	0,76=76%
[170-180)	18	45	27	0,33=33%	0,83=83%	0,5=50%
[180-190]	9	54	9	0,17=17%	1=100%	0,17=17%

Să interpretăm, de exemplu, datele pentru clasa de înălțimi [160-170):

- 14 copii au înălțimea cuprinsă în acest interval;
- 27 de copii au înălțimea mai mică strict decât 170cm;
- 41 de copii au înălțimea mai mare sau egală cu 160cm;
- 26% dintre copii au înălțimea cuprinsă în acest interval;
- 50% dintre copii au înălțimea mai mică strict decât 170cm;
- 76% dintre copii au înălțimea mai mare sau egală cu 160cm.

17.3.2 Reprezentarea grafică a datelor statistice

Analiza și interpretarea datelor statistice găsește un suport efectiv în reprezentarea grafică a acestora prin formarea de imagini reprezentative și intuitive. Graficul atașat unei serii statistice poartă numele de **diagramă structurată**.

17.3.3 Tipuri de diagrame structurate

Menționăm faptul că pentru reprezentările grafice ale seriilor statistice softurile de calcul tabelar pun la dispoziție toate tipurile de grafice.

1. Diagrama circulară.

Populația statistică dependentă de o variabilă, în totalitatea ei, este reprezentată sub forma unui disc. Valorile variabilei exprimate prin intermediul frecvențelor relative sunt sectoare de cerc. Ariile acestor sectoare sunt proporționale cu frecvențele relative.

Pentru seria statistică atașată Tabelului 4 diagrama circulară este prezentată în figura 17.1

2. Diagrama coloană cumulativă.

La fel ca diagrama circulară, coloana cumulativă este folosită

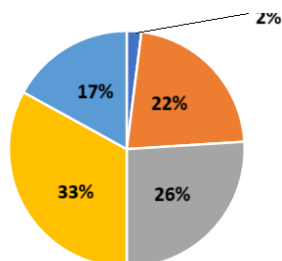


Fig. 17.1: Diagramă circulară (pie) atașată datelor din Tabelul 4.

pentru reprezentarea frecvențelor relative ale seriei statistice. Într-un reper cartezian este plasat pe verticală un dreptunghi divizat cu linii orizontale în arii proporționale cu frecvențele relative. În principiu, reprezentării grafice i se atașează și o legendă. În figura 17.2 sunt prezentate într-un reper cartezian

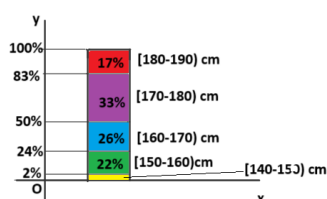


Fig. 17.2: Diagramă coloană cumulativă atașată datelor din Tabelul 4

sub forma unei coloane plasate pe axa Ox , cu baza în lungime de două unități. Valorile variabilei sunt date în interiorul coloanei ca frecvențe relative, având în legendă intervalele de variație. Pe axa Oy sunt marcate frecvențele relative cumulate superior.

3. Linii verticale, coloane, bare.

Aceste tipuri de reprezentări au ca scop o prezentare a distribuției frecvențelor absolute sau relative sau ale valorilor variabilei statistice la un moment de timp dat sau a evoluției în timp a frecvențelor ori a valorilor. Reprezentările de tip coloană sunt utile, de exemplu și pentru comparații ale frecvențelor, relative sau absolute, sau a valorilor a două sau mai multe variabile statistice la momente determinate de timp. Să ilustrăm aceste reprezentări grafice.

O fabrică de confecții produce sacouri și pantaloni. Pe trimestre producția este evidențiată în următorul tabel:

Tabelul 5

	Trim I	Trim. II	Trim. III	Trim. IV	Total
F.Abs. Sacouri	200	185	280	135	800
F.Rel. Sacouri	25%	23%	35%	17%	100%
	Trim I	Trim. II	Trim. III	Trim. IV	Total
F.Abs. Pantaloni	250	300	200	150	900
F. Rel. Pantaloni	28%	33%	22%	17%	100%

Graficele comparative de tip coloană sunt prezentate în figura următoare:

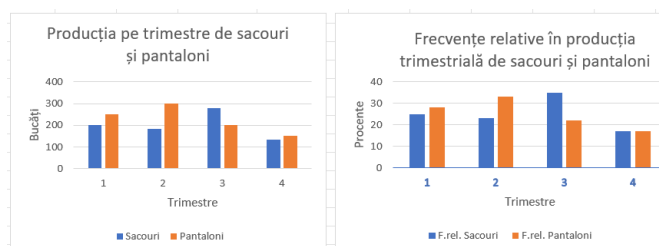


Fig. 17.3: Grafice comparative de tip coloană pentru frecvențe absolute și frecvențe relative

4. Poligonul frecvențelor.

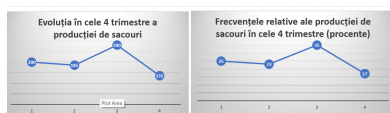


Fig. 17.4: Grafice de tip poligon pentru frecvențe absolute și frecvențe relative ale unei variabile cantitative discrete

Este o reprezentare sub forma unui poligon ce se obține prin unirea cu segmente de dreaptă a seriei statistice $S = (x_i, n_i)_{i=1, \dots, p}$ pentru frecvențe absolute sau a seriei $S' = (x_i, f_i)_{i=1, \dots, p}$ pentru frecvențe relative.

Graficele de tip poligon ale seriilor de valori absolute și relative

din Tabelul 5, referitor la producția de sacouri, este prezentat în figura 17.4.

5. Histograma.

Considerăm o serie statistică cu variabilă cantitativă continuă și cu clase de valori de amplitudini egale. Trasăm un grafic într-un reper ortogonal cu următoarele restricții:

- Alegem pe axa orizontală segmente reprezentând amplitudinea claselor de valori.
- Pe fiecare segment construim un dreptunghi cu aria proporțională cu frecvența absolută sau cu cea relativă a clasei de valori.

Graficul astfel obținut se numește histogramă.

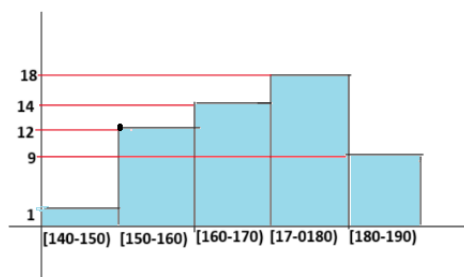


Fig. 17.5: Histograma frecvențelor absolute atașată Tabelului 4

17.3.4 Evaluări pe subclase folosind histograme

Considerăm o serie statistică cu variabila cantitativă continuă, cu amplitudinile claselor de valori distincte date de frecvențele relative. Se dorește determinarea unei valori a frecvenței relative a unei subclase. Determinarea acestei frecvențe o vom face prin interpolare pe arii. Histograma are pe fiecare grupă o arie proporțională cu frecvența relativă a grupeii. Vom folosi în acest caz un polinom de interpolare de gradul al doilea. Ariile le vom determina folosind integrale.

Exemplu: Repartiția populației unei comune pe clase de vârstă în frecvențe relative este dată în tabelul următor:

Clase de vârstă	[0,20)	[20-40)	[40-55)	[55-65)	[65-90)
Frecvențe relative	25%	17%	25%	18%	15%

Se dorește determinarea frecvenței relative pentru subgrupa [40-45) de ani.

Programul MATLAB pentru determinarea acestei frecvențe prin interpolare pătratică este următorul:

```
>> syms a b c x;
>> f=a*x^2+b*x+c;
>> eq1=int(f,x,-2,0)==17;
>> eq2=int(f,x,0,1.5)==25;
>> eq3=int(f,x,1.5,2.5)==18;
>> eqs=[eq1,eq2,eq3];
>> solve(eqs,a,b,c)

ans =

struct with fields:

    a: -6/5
    b: 64/15
    c: 431/30

>> aa=-6/5;
>> bb=64/15;
>> cc=431/30;
>> ff=aa*x^2+bb*x+cc;
>> int(ff,x,0,0.5)

ans =

23/3

23/3=7,67%
```

Fig. 17.6: Interpolare pe arii

Să detaliem procedeul. Desenăm histograma corespunzătoare astfel: alegem trei clase consecutive astfel încât la mijloc să avem clasa de vârstă careia îi aparține subclasa pentru care dorim interpolarea. Pe axa Ox considerăm unitatea egală cu o perioadă de 10 ani. Originea sistemului de coordonate o luăm pentru vârsta de 40 de ani. Pe axa Oy desemnăm, proporțional, frecvențele relative. Considerăm polinomul de interpolare $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determinarea coeficienților a , b , c se face astfel:

$$ec.1 \quad \int_{-2}^0 f(x)dx = 17$$

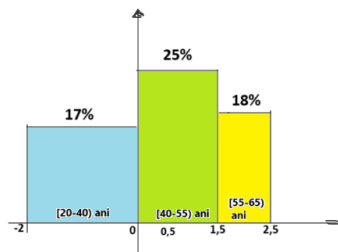


Fig. 17.7: Histograma pentru interpolarea pe arii

$$ec.2 \quad \int_0^{1,5} f(x)dx = 25$$

$$ec.3 \quad \int_{1,5}^{2,5} f(x)dx = 18.$$

Obținem astfel un sistem cu trei ecuații și trei necunoscute, a, b, c , care rezolvat ne conduce la valorile:

$$a = -\frac{6}{5}, \quad b = \frac{64}{15}, \quad c = \frac{431}{30}.$$

Observație: în programul MATLAB a, b, c sunt componentele unei structuri vectoriale și trebuie să le mutăm în variabilele scalare aa, bb, cc . Construim polinomul de interpolare de gradul al doilea cu coeficienții determinați anterior, $f_1(x)$ și determinăm valoarea de interpolare calculând integrala definită între limitele 0 și 0,5. Limita de integrare superioară o determinăm astfel: perioada de 15 ani [40-55) are reprezentarea pe axa Ox cu o lungime egală cu 1,5 unități, deci perioada [40-45) va avea lungimea 0,5 unități.

$$\int_0^{0,5} f_1(x)dx = \frac{23}{3} = 7,67\%.$$

17.4 Medie, mediană, modul

În analiza și interpretarea datelor este utilă folosirea unor mărimi deduse din seriile statistice reprezentative pentru toată seria. Aceste mărimi indică gradul de concentrare a valorilor seriei în jurul lor și se numesc indicatori sau parametri de poziție.

17.4.1 Medie

Considerăm o variabilă statistică X , cantitativă, discretă, pentru care se dau frecvențele relative $(f_i)_{i=1,\dots,p}$ exprimate sub formă zecimală, adică $\sum_{i=1}^p f_i = 1$. Atunci valoarea medie sau media, notată $\bar{x}$, va fi dată de

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^p f_i x_i \quad (17.1)$$

Dacă variabila statistică cantitativă, discretă, este dată cu valorile ei $(x_i)_{i=1,\dots,p}$ împreună cu frecvențele absolute $(n_i)_{i=1,\dots,p}$ atunci media se calculează ca o medie aritmetică ponderată:

$$\bar{x} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + \dots + x_p n_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{\sum_{i=1}^p x_i n_i}{N} \quad (17.2)$$

În formula 17.2 N este efectivul total al populației.

Diferența $x_i - \bar{x}$ se numește **abaterea de la medie** a valorii x_i . Atunci:

$$\sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x}) n_i = 0, \quad (17.3)$$

formulă care se verifică imediat.

17.4.2 Mediană

1. Considerăm o variabilă statistică cantitativă, discretă, ordonată crescător, $(x_i, n_i)_{i=1,\dots,p}$, $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_p$ și N efectivul total al populației. Mediana Me este valoarea care împarte șirul valorilor variabilei în două părți care au același cardinal.

Exemple:

Considerăm caracteristicile ordonate crescător ale variabilei X ca fiind

$$2, 2, 3, 4, 4, 4, \boxed{5}, 6, 6, 6, 7, 8, 8.$$

Avem 13 valori așezate crescător atunci valoarea care are 6 elemente în stânga și 6 elemente în dreapta este 5. Deci $Me=5$.

2. Dacă caracteristica are un număr par de valori atunci mediana se alege ca semisumă a valorilor situate la mijlocul secvenței.

$$1, 3, 3, \boxed{4, 6}, 7, 8, 8.$$

$$Me = \frac{4 + 6}{2} = 5$$

Pentru a determina mediana unei serii statistice cu variabila cantitativă continuă, avem nevoie de un tabel cu clasele de valori, frecvențele absolute și frecvențele absolute cumulate crescător ca în exemplul următor: Considerăm un grup de elevi participanți într-o tabără de vară, grupați după înălțime.

Tabel 5

Clase de înălțimi în cm.	Frecvența absolută n_i	$N_{\leq i}$
[140-150)	1	1
[150-160)	13	14
[160-170)	16	30
[170-180)	19	49
[180-190]	9	58

Determinăm cât este jumătate din efectivul taberei

$$\frac{N}{2} = 29.$$

Determinăm prima clasă a cărei frecvență absolută cumulată crescător conține jumătate din efectivul populației. Aceasta este clasa [160 – 170)cm. Clasa astfel determinată se va numi clasă mediană.

Mediana o vom calcula cu formula:

$$Me = L + \frac{C_M - N_{\leq i-1}}{n_i}k \quad (17.4)$$

unde

- L =limita inferioară a clasei mediane;
- C_M = cota medianei dată de jumătate din efectivul populației sau dacă populația este dată de un număr impar atunci $C_M = \frac{N+1}{2}$;
- $N_{\leq i-1}$ este frecvența absolută cumulată crescător până la clasa mediană;
- n_i frecvența absolută a clasei mediane;
- k este amplitudinea clasei mediane.

În exemplul nostru avem $L = 160$; $C_M = 29$; $N_{\leq i-1} = 14$; $n_1 = 16$; $k = 10$. Rezultă

$$Me = L + \frac{C_M - N_{\leq i-1}}{n_i}k = 160 + \frac{29 - 14}{16}10 = 160 + 9,375 = 169,375$$

17.4.3 Modulul

Modulul sau dominantă unei serii statistice cantitative, discrete sau continue, reprezintă valoarea variabilei sau media aritmetică a valorilor limită ale clasei de valori care are frecvența absolută maximă. De exemplu, pentru seria statistică dată în tabelul 5, frecvența absolută maximă este 19 deci clasa de valori este $[170 - 180)cm$ de unde

$$M_o = \frac{170 + 180}{2} = 175cm.$$

17.5 Dispersia, abaterea medie pătratică

Fie seria statistică $(x_i, n_i)_{i=1,..p}$ cu media $\bar{x}$. Numim **dispersia** valorilor seriei media aritmetică ponderată a pătratelor abaterilor medii ale valorilor variabilei

$$s^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 \cdot n_1 + (x_2 - \bar{x})^2 \cdot n_2 + .. + (x_p - \bar{x})^2 \cdot n_p}{n_1 + n_2 + .. + n_p} \quad (17.5)$$

Pentru seriile cantitative continue se consideră x_i ca fiind valoarea medie a clasei i și $\bar{x}$ media acestor valori. Se numește abatere medie pătratică a valorilor variabilei numărul $\sigma = \sqrt{s^2}$. Avem deci:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2}{N}} \quad (17.6)$$

Se numește **coeficient de variație** raportul dintre abaterea medie pătratică și valoarea medie a seriei statistice.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \quad (17.7)$$

Coeficientul de variație se exprimă în procente, iar o valoare a sa mai mică de 15% ne sugerează omogenitatea repartiției și faptul că valoarea medie este semnificativă.

Capitolul 18

Elemente de teoria probabilităților

În existența noastră de zi cu zi există o serie de evenimente, fenomene, experiențe a căror desfășurare poate fi prevăzută cu exactitate pentru că ele sunt determinate de factori cu acțiune predictibilă, dar și unele a căror desfășurare nu poate fi anticipată. Factorii care determină aceste ultime evenimente, experiențe, fenomene, sunt, în general, necontrolabili sau întâmplători. Aceste fenomene supuse condițiilor incontrolabile le numim fenomene aleatoare. Teoria probabilităților este știința care se ocupă de studiul și modelarea acestor fenomene.

18.1 Noțiuni fundamentale în teoria probabilităților

- *Un experiment aleator este o activitate ale cărei rezultate nu pot fi prezise cu certitudine.*
- *O repetare a unui experiment aleator se numește probă.*
- *Mulțimea tuturor rezultatelor posibile ale unui experiment aleator se numește domeniu de posibilități sau mulțimea cazurilor posibile. Această noțiune este notată uzual cu E .*
- *Se numește eveniment aleator orice situație determinată de o parte dintre rezultatele posibile ale experimentului. Evenimentele sunt submulțimi ale lui E .*
- *Orice probă a unui experiment coincide cu realizarea sau nerealizarea unui eveniment.*

- *Mulțimea cazurilor în care un eveniment se realizează poartă numele de mulțimea cazurilor favorabile.*
- *Spunem că un eveniment s-a realizat dacă rezultatul său este în mulțimea cazurilor favorabile.*
- *Evenimentul care se realizează sigur în orice probă se numește eveniment sigur.*
- *Evenimentul care nu se realizează în nicio probă se numește eveniment imposibil.*
- *Evenimentul cu un singur caz favorabil se numește eveniment elementar, altfel evenimentul se numește eveniment compus.*

Exemple:

Cele mai multe exemple legate de noțiunile anterioare sunt date de experiențe cu aruncarea unui zar (unor zaruri) sau de extragerea unei bile (unor bile) dintr-o urnă. Să considerăm un experiment legat de aruncarea unui zar obișnuit cu 6 fețe numerotate de la 1 la 6.

1. Experimentul aleator este activitatea de aruncare a zarului.
2. O probă este o aruncare a zarului.
3. Mulțimea E , domeniul de posibilități, este $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
4. Mulțimea tuturor evenimentelor legate de un experiment este mulțimea părților lui E , notată cu $\mathcal{P}(E)$.
5. Perechea $(E, \mathcal{P}(E))$ se numește câmp de evenimente.
6. Evenimente aleatoare sunt date de unul sau mai multe rezultate ale probei ca de exemplu:
 - (a) Apariția unui număr impar (mai multe rezultate favorabile, eveniment compus).
 - (b) Apariția numărului 4 (un singur rezultat favorabil, eveniment elementar).
 - (c) Apariția unei fețe numerotate cu 2 sau 3 sau 5.
 - (d) Apariția unei fețe numerotate cu 12 (eveniment imposibil).
 - (e) Apariția unei fețe cu un număr $1 \leq n \leq 6$ (evenimentul sigur).

Evenimentele se notează cu majuscule, simple sau indexate. Astfel, putem nota evenimentele descrise anterior cu A, B, C, D, E sau cu A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 .

Putem să ne definim, folosind limbajul și notațiile din teoria mulțimilor, operații logice cu evenimente. Astfel, dându-se câmpul de evenimente $(E, \mathcal{P}(E))$ și $A, B \in \mathcal{P}(E)$ definim:

- Reuniunea evenimentelor, A sau B notată cu $A \cup B$. Realizarea acestui eveniment este dată de realizarea a cel puțin unul dintre evenimentele A, B .

- Intersecția evenimentelor, A și B , notată cu $A \cap B$. Acest eveniment se realizează dacă se realizează atât A cât și B .

- Negația, non A , notată $\bar{A}$ se realizează dacă nu se realizează A . Evenimentul $\bar{A}$ este complementara în raport cu mulțimea E a mulțimii A și cum E este considerată o mulțime totală asociată unui experiment, rezultă că $\bar{A} = C_E A$ (complementara lui A). În plus $\overline{\bar{A}} = A$.

- Diferența în sensul teoriei mulțimilor, $A \setminus B$ este formată din cazurile favorabile lui A și nefavorabile lui B . Avem astfel $A \setminus B = A \cap \bar{B}$.

- Sunt adevărate și în calculul probabilităților formulele lui De Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- Implicația, A implică B , este adevărată dacă realizarea evenimentului A implică realizarea evenimentului B , adică dacă mulțimea cazurilor favorabile lui A este inclusă în mulțimea cazurilor favorabile lui B . Astfel:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \subset B.$$

Două evenimente se numesc **echivalente** dacă ele se implică reciproc.

Aplicație:

Avem un generator de numere naturale cu care generăm două numere. Considerăm evenimentele:

A: primul număr generat este un număr par;

B: al doilea număr generat este par.

Să se formalizeze în limbaj de teoria mulțimilor următoarele evenimente:

- A_1 : Cel puțin un număr generat este număr par.
- evenimentul este echivalent cu "primul număr este par" (A) sau "al doilea număr este număr par" (B). Răspunsul este A sau B adică $A \cup B$.
- A_2 : cel puțin un număr este număr impar.
- Raționând similar cu cazul anterior vedem că evenimentul este echivalent cu "primul număr nu este număr par" sau "al doilea număr nu este număr par" adică $\overline{A} \cup \overline{B}$ relație care, la rândul său, o putem scrie cu formula De Morgan $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cap B}$. Astfel, evenimentul poate fi enunțat ca fiind evenimentul contrar lui A și B .
- A_3 : Ambele numere sunt impare.
- Evenimentul este $\overline{A}$ și $\overline{B}$ adică $\overline{A} \cap \overline{B}$. La fel ca în cazul anterior, putem rescrie formalizarea evenimentului cu formula De Morgan și avem $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ adică evenimentul este contrarul lui A sau B .
- A_4 : Primul număr este număr par și al doilea este număr impar.
- $A_4 = A \cap \overline{B}$.
- A_5 : numai un număr este impar.
- A_5 este echivalent cu {primul număr este par și al doilea număr este impar} sau {primul număr este impar și al doilea este par} adică

$$A_5 = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B).$$

- A_6 : Suma numerelor este un număr par.
- Evenimentul este echivalent cu {primul număr este par și al doilea este par} sau {primul număr este impar și al doilea este impar} adică:

$$A_6 = (A \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

18.2 Evenimente incompatibile

Două evenimente, A și B , sunt **incompatibile** dacă ele nu se pot realiza simultan în nicio probă. Tradus în limbaj de teoria mulțimilor acest lucru se exprimă astfel:

- Realizarea evenimentului A implică nerealizarea evenimentului B și realizarea evenimentului B implică nerealizarea lui A adică

$$(A \Rightarrow \overline{B}) \cap (B \Rightarrow \overline{A}).$$

- Altfel exprimat, cele două evenimente sunt incompatibile dacă

$$(A \subset \overline{B}) \cap (B \subset \overline{A})$$

- Două diagrame Venn simple ne permit să reducem definițiile anterioare la: evenimentele A și B sunt incompatibile dacă:

$$A \cap B = \emptyset$$

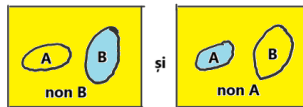


Fig. 18.1: Evenimentele A și B sunt incompatibile dacă cele două diagrame sunt simultan adevărate, deci dacă intersecția lui A cu B este mulțimea vidă.

Exemple:

- La aruncarea unui zar considerăm evenimentele:

A : apariția feței 4;

B : apariția fețelor 3 sau 5.

- La extragerea succesivă a două bile dintr-o urnă conținând bile albe și roșii considerăm evenimentele;

A : ambele bile sunt albe;

B : a doua bilă este roșie.

Evenimentele sunt incompatibile.

- Evenimentul sigur E și evenimentul imposibil $\emptyset$ sunt incompatibile.

Două evenimente, A și B , se numesc compatibile dacă au cel puțin un caz favorabil în comun.

$$A \cap B \neq \emptyset$$

Exemple:

- La extragerea a două bile dintr-o urnă conținând bile albe și roșii

considerăm evenimentele:

A : cel puțin o bilă este albă;

B : a doua bilă este roșie.

Pentru că prima bilă ar putea să fie albă și a doua să fie roșie, cele două evenimente sunt compatibile.

- La generarea a două numere naturale considerăm evenimentele:

A : produsul celor două numere este un număr par;

B : suma celor două numere este un număr par.

Cele două evenimente sunt compatibile pentru că există posibilitatea generării a două numere pare caz în care cele două evenimente sunt realizate.

18.3 Noțiunea de probabilitate a unui eveniment

Consederăm un câmp de evenimente aleatoare $(E, \mathcal{P}(E))$ unde

$$E = \bigcup_{i=1}^n \{e_i\}.$$

Definiția 18.1.

- Evenimentele $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ se numesc *evenimente elementare*.
- Dacă evenimentele elementare au aceeași șansă de realizare într-o probă ele se numesc *evenimente egal probabile (echiprobabile)*.
- Numărul n al evenimentelor elementare care reunite dau evenimentul sigur E se numește *număr de cazuri posibile ale experienței*.
- Considerăm un eveniment A și fie n_A numărul cazurilor favorabile producerii lui A . Numărul n_A este numărul evenimentelor elementare care îl compun pe A .

18.3.1 Definiția probabilității cu ajutorul numărului de cazuri favorabile

Definiția 18.2. Se numește *probabilitate de realizare a evenimentului aleator A* raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării lui A și numărul cazurilor egal posibile ale experimentului. Probabilitatea se va nota cu $P(A)$.

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Observația 18.1. - Numărul cazurilor egal posibile ale experienței trebuie să fie un număr finit.

- Evenimentele elementare care îl compun pe E sunt echiprobabile.

Exemple:

1.

$$0 \leq P(A) \leq 1; \quad P(\emptyset) = 0; \quad P(E) = 1.$$

2. Experimentul este aruncarea unui zar, iar evenimentul A este apariția feței 4.

Avem 6 evenimente egal probabile date de aparițiile fețelor 1, 2, 3, 4, 5, 6 și un singur caz favorabil dat de apariția feței 4.

Atunci $n = 6$, $n_A = 1$ și, deci $P(A) = \frac{1}{6}$.

3. Experimentul este aruncarea unui zar iar evenimentul B este dat de neapariția feței 4.

Cazurile favorabile sunt apariția fețelor 1, 2, 3, 5, 6 deci cinci la număr atunci probabilitatea $P(B) = \frac{5}{6}$. Observăm că $B = \bar{A}$ și de aici rezultă că:

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1; \quad \text{sau} \quad P(A) = 1 - P(\bar{A}).$$

4. Fie un câmp de evenimente $(E, \mathcal{P}(E))$ în care numărul de evenimente egal posibile este finit, n . Dacă A și B sunt două evenimente incompatibile, cu n_A , n_B numărul cazurilor favorabile pentru A și numărul cazurilor favorabile pentru B , atunci:

Pentru evenimente incompatibile

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B)$$

5. Experimentul este aruncarea unui zar o dată. Evenimentul A este apariția feței 3, iar evenimentul B este apariția feței 5.

În acest caz $n = 6$, $n_A = 1$, $n_B = 1$. Cazurile favorabile sunt cel în care apare fața 3 sau cel în care apare fața 5. Cele două cazuri nu pot apărea simultan, deci evenimentele sunt incompatibile, iar consecința este că avem două cazuri favorabile. De aici avem:

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{1 + 1}{6} = \frac{1}{3}.$$

6. Experimentul este aruncarea unui zar o dată. Evenimentul A : apariția uneia dintre fețele 1 sau 2 sau 3 iar evenimentul B : apariția uneia dintre fețele 3 sau 5 sau 6. Care este probabilitatea $P(A \cup B)$?

Observăm că apariția feței 3 satisface atât evenimentul A cât și evenimentul B . Deci A și B sunt compatibile, adică

$$A \cap B = \{ \text{apariția feței 3} \},$$

deci $A \cap B \neq \emptyset$. Când numărăm cazurile favorabile evenimentului $A \cup B$ avem $n_A = 3$ cazuri favorabile și $n_B = 3$ cazuri favorabile însă cazurile favorabile ale lui $A \cap B$ sunt numărate de două ori. Deci pentru evenimente compatibile formula de calcul a lui $P(A \cup B)$ este:

Pentru evenimente compatibile

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

18.3.2 Definiția probabilității ca funcție

Considerăm câmpul de evenimente $(E; \mathcal{P}(E))$ asociat unui experiment.

Definiția 18.3. *Se numește probabilitate o funcție $P : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ cu următoarele proprietăți:*

1. $0 \leq P(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$.
2. $P(E) = 1$.
3. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, *dacă* $A \cap B = \emptyset$.

$P(A)$ se numește probabilitatea ca evenimentul A să se realizeze.

Se numește câmp de probabilitate tripletul $\{E, \mathcal{P}(E), P\}$.

18.3.3 Proprietăți ale funcției probabilitate

Considerăm un câmp finit de probabilitate $\{E, \mathcal{P}(E), P\}$ cu cardinalul lui $E = n$. Următoarele afirmații sunt adevărate:

- $Pp1$. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$, $\forall A \in \mathcal{P}(E)$;
- $Pp2$. $P(\emptyset) = 0$;
- $Pp3$. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$;

- *Pp4.* Dacă $B \subset A$ atunci $P(A \setminus B) = P(A) - P(B)$;
- *Pp5.* $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$;
- *Pp6.* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, $\forall A, B \in \mathcal{P}(E)$.

Probabilități condiționate

Dacă avem o experiență în care o probă se repetă de n ori iar evenimentul A se produce de m ori dintre care împreună cu un eveniment B se repetă de p ori, putem determina probabilitatea de realizare a evenimentului B condiționată de realizarea evenimentului A . Această probabilitate se notează cu $P(B/A)$. Formula de calcul a acestei probabilități, care se numește probabilitatea lui B condiționată de A, este:

- *Pp7.* $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, cu $P(A) \neq 0$.

Evenimente independente

Considerăm două evenimente A și B ale unui experiment. Spunem că ele sunt independente dacă realizarea (sau nerealizarea) unuia nu influențează probabilitatea de realizare a celuilalt. De exemplu, avem două urne, U_1 care conține 3 bile albe și 5 bile roșii și U_2 care conține 4 bile albe și 6 bile roșii. Se extrage o bilă din prima urnă și o bilă din urna a doua. Considerăm evenimentele:

A: bila extrasă din prima urnă este albă;

B: bila extrasă din a doua urnă este roșie.

Evident, realizarea sau nerealizarea evenimentului A nu influențează realizarea sau nerealizarea evenimentului B.

- Realizarea evenimentului A are probabilitatea $P(A) = \frac{3}{8}$ iar realizarea evenimentului B are probabilitatea $P(B) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. Pentru o extragere din prima urnă avem 10 posibilități de extragere din a doua urnă. Deci numărul total de posibilități de extragere este $8 \times 10 = 80$. La o realizare a evenimentului A avem 6 posibilități de realizare a evenimentului B. Atunci numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului $A \cap B$ este $3 \times 6 = 18$ de unde probabilitatea realizării evenimentului $A \cap B$ este

$$P(A \cap B) = \frac{18}{80} = \frac{3 \cdot 6}{8 \cdot 10} = \frac{3}{8} \cdot \frac{6}{10} = P(A) \cdot P(B).$$

Formalizarea matematică a proprietății că evenimentele A și B sunt independente este:

- *Pp8*. Evenimentele A și B sunt independente dacă și numai dacă

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Exemple:

1. Considerăm o urnă în care sunt 10 bile numerotate de la 1 la 10.

Din urnă se extrage o singură bilă. Fie evenimentele:

A : extragerea unei bile numerotate cu 1 sau 3 sau 4 sau 8;

B : extragerea unei bile numerotate cu 3 sau 5 sau 6 sau 7 sau 9.

Sunt cele două evenimente independente?

Avem o singură probă, o singură bilă extrasă și deci nu putem descompune direct această probă în două evenimente independente. Vom calcula însă probabilitățile $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$. Avem:

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

A și B se realizează simultan dacă bila extrasă este 3 deci $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$. Cum $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ evenimentele nu sunt independente.

2. Considerăm același experiment ca la exemplul 1 cu aceeași unică probă extragerea unei singure bile și același eveniment A .

A : extragerea uneia dintre bilele 1 sau 3 sau 4 sau 8.

Evenimentul B îl vom lua puțin diferit față de cel de la exemplul 1.

B : extragerea uneia dintre bilele 3 sau 4 sau 6 sau 7 sau 9.

Sunt aceste două evenimente independente?

Calculăm probabilitățile ca în exemplul 1 și avem:

$$P(A) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}, \quad P(A) \cdot P(B) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Evenimentele A și B se realizează simultan în acest caz dacă bila extrasă are numărul 3 sau 4. Atunci $P(A \cap B) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$. În acest caz

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

deci evenimentele sunt independente.

3. Avem două urne care conțin amândouă bile albe și roșii. Probabilitatea ca extrăgând o bilă din prima urnă aceasta să fie albă este 0,23 iar probabilitatea ca extrăgând o bilă din a doua urnă aceasta

să fie albă este 0,3. Care este probabilitatea ca extrăgând câte o bilă din fiecare urnă cele două bile să fie albe? Care este probabilitatea ca cele două bile să fie ambele roșii?

Considerăm evenimentele:

A : Bila extrasă din prima urnă este albă.

B : Bila extrasă din a doua urnă este albă.

Cele două evenimente sunt evident independente pentru că extragerea unei bile din prima urnă nu influențează rezultatul extragerii unei bile din cea de a doua urnă. Evenimentul a cărei probabilitate ni se cere este ca ambele bile să fie albe adică A și B . Avem de calculat $P(A \cap B)$ pentru A , B independente și putem aplica direct formula

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0,23 \cdot 0,3 = 0,069.$$

Pentru cea de a doua întrebare trebuie să considerăm evenimentele $\bar{A}$ și $\bar{B}$. Aceste două evenimente sunt tot independente. Ele au probabilitățile

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,23 = 0,77 \quad \text{și} \quad P(\bar{B}) = 1 - 0,3 = 0,7.$$

Atunci:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 0,77 \cdot 0,7 = 0,539.$$

Bibliografie

- [1] Abramescu, N., *Lecțiuni de Algebră superioară*, Tipografia Curții regale, București 1921
- [2] Banea, H., *Metodica predării matematicii*, Ed. Paralela 45, Pitești, 1998
- [3] Bourbaki, N., *Elements de mathématique, Algebre, vol I*, Ed. Herman, Paris
- [4] Brahy, M.Ed., *Exercices méthodiques de calcul différentiel*, Lib. Gauthier-Villars, Paris, 1927
- [5] Burtea, M., Burtea, G., *Matematică, trunchi comun, manual clasa aX-a*, Ed. Carminis, Pitești, 2005
- [6] Dinculeanu, N., Radu, E., *Elemente de analiză matematică, manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1968
- [7] Hollinger, A., *Metodica predării algebrei în școala generală*, Ed. Didactică și Pedagogică, 1965
- [8] Horn, R.A., Johnson, C.R., *Analiză matricială*, Ed. Theta, București, 2001
- [9] Iacob, C., *Elemente de analiză matematică. Manual pentru clasa a XII-a reală, licee de specialitate*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1969
- [10] Ionescu, T., Țițeica, G., Ioachimescu, A.G., Cristescu, V., *Culegere de probleme de aritmetică, geometrie, algebră și trigonometrie*, Biblioteca Gazetei matematice, Tipografia Curții regale, București 1901
- [11] Lascu, A.L., *Exerciții de algebră*, Ed. Tehnică 1967

- [12] Luzin, N.N., *Calcul integral*, Ed. Tehnică, București 1959
- [13] Mihăilescu, C., *Geometria elementelor remarcabile*, Ed. Tehnică, București, 1957
- [14] Mihoc, Gh., Micu, N., *Teoria probabilităților și statistică matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1980
- [15] Miron, R., Brânzei, D., *Fundamentele aritmeticii și geometriei*, Ed. Academiei, 1983
- [16] Năstăsescu, C., Niță, C., Brandiburu, M., Joița, D., *Exerciții și probleme de algebră*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1981
- [17] Papy, *Matematică modernă, vol. I*, Ed. Tineretului, București, 1967
- [18] Păun, M., *Matematici superioare*, Ed. Fair Partners, București 2004
- [19] Sacter, O., *Trigonometrie, manual pentru clasa a X-a*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1965
- [20] Sirețchi, Gh., *Calcul diferențial și integral vol. I și II*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1985
- [21] Șafarevici, I.R., *Noțiunile fundamentale ale algebrei* EWd. Academiei, 1989
- [22] Udriște, C., and Co., *Matematică, manual pentru clasa a XII-a*, Ed. Fair Partners, București, 2002
- [23] Udriște, C., and Co., *Matematică, manual pentru clasa a XI-a*, Ed. Fair Partners, București, 2001