

Alexandru OANA

**APLICAȚII ALE ALGEBREI LINIARE ÎN
ECONOMIE**



**Editura
Universității
Transilvania
din Brașov**

2025

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa: Str. Iuliu Maniu nr. 41A
500091 Brașov
Tel.: 0268 476 050
Fax: 0268 476 051
E-mail: editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81.

ISBN 978-606-19-1814-0 (ebook)

Copyright © Autorul, 2025

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Matematică și Informatică,
Facultatea de Matematică și Informatică a Universității Transilvania din Brașov.

CUPRINS

Introducere	iii
Unitatea de învățare I. Funcții liniare	1
1.1 Funcția și ecuația de gradul 1.....	2
1.2 Sisteme liniare.....	5
1.3 Inecuații liniare.....	8
1.4 Metoda regresiei liniare.....	10
Aplicații propuse.....	12
Unitatea de învățare II. Modele matriceale	13
2.1 Definiții. Proprietăți.....	14
2.2 Determinanți.....	16
2.3 Inversa unei matrici.....	21
2.4 Rangul unei matrici.....	22
2.5 Transformări elementare.....	24
2.6 Reducerea în treaptă pe coloană a unei matrice (RTC).....	26
2.7 Sisteme de ecuații liniare.....	30
2.8 Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare.....	32
2.9 Explicitarea sistemelor de ecuații liniare.....	36
Aplicații propuse	38
Unitatea de învățare III. Spații vectoriale euclidiene	39
3.1 Spații vectoriale. Definiție. Exemple.....	40
3.2. Liniar independență și liniar dependență.....	41
3.3. Bază. Dimensiune	43
3.4 Schimbarea bazei	46
3.5 Lema substituției.....	50
3.6 Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale.....	59
3.7 Spații vectoriale euclidiene și unitare	62
3.8 Dreaptă de regresie	62
Aplicații propuse.....	63
Unitatea de învățare IV. Transformări liniare	64
4.1 Noțiunea de transformare liniară	65
4.2 Transformări liniare pe spații vectoriale finit dimensionale.....	67
Aplicații propuse.....	71

Unitatea de învățare V. Valori proprii. Vectori proprii	72
5.1 Valori și vectori proprii	73
5.2 Reducerea unei matrice la forma diagonală.....	80
Aplicații propuse.....	84
Unitatea de învățare VI. Forme biliniare și forme pătratice	85
6.1 Forme biliniare. Definiție. Exemple. Matrice atașată.....	86
6.2 Forme pătratice. Reducerea la forma canonică.....	89
6.3 Clasificarea formelor pătratice. Signatură	96
Aplicații propuse.....	97
Unitatea de învățare VII. Modele de programare liniară	100
7.1 Concepte de optimizare matematică	101
7.2 Probleme de programare liniară.....	102
7.3 Mulțimi convexe.....	103
7.4 Soluțiile unei probleme de programare liniară (PPL).....	104
7.5 Probleme de programare liniară duale.....	105
Unitatea de învățare VIII. Metode grafice de programare liniară	106
8.1 Regiunea admisibilă.....	107
8.2 Algoritm pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemelor de programare liniară.....	108
Aplicații propuse.....	114
Unitatea de învățare IX. Metoda simplex de programare liniară	116
9.1 Concepte generale privind metoda simplex.....	117
9.2 Algoritm simplex primal.....	119
9.3 Metoda celor două faze.....	126
Aplicații propuse.....	131
Unitatea de învățare X. Problema transporturilor	133
10.1 Soluții admisibile de bază pentru o problemă de transport.....	135
10.2 Soluții optime pentru o problemă de transport	140
Aplicații propuse.....	154
Bibliografie	155

Introducere

Cursul de față se adresează în principal studenților de anul I de la Facultatea de Științe economice și administrarea afacerilor, programele de studii: Finanțe și bănci și Contabilitate și informatică de gestiune. Acest curs reprezintă un ghid practic, care include noțiunile, rezultatele teoretice de bază, precum și tipurile de probleme de algebră liniară care apar în cadrul disciplinei: Matematici aplicate în economie.

Domeniul matematicii aplicate, în general, respectiv al matematicii aplicate în economie, în particular, prezintă o literatură de specialitate foarte diversă cu numeroase aplicații din domeniul economic. Multe din aceste lucrări prezintă rezolvarea aplicațiilor cu ajutorul unor programe pe calculator. Pe plan național, în ultimii ani, s-a îmbogățit numărul lucrărilor din domeniul matematicii aplicate în economie sau al matematicii pentru economiști.

În planul de învățământ pentru ciclul I de studii universitare–licență, în cadrul domeniului fundamental științe economice, matematica aplicată în economie face parte din categoria disciplinelor fundamentale, care trebuie să se regăsească în pregătirea oricărui economist.

Cursul de față prezintă o abordare preponderent aplicativă a modelelor matematice necesare pentru rezolvarea unor probleme practice. Principalele concepte economice utilizate sunt studiate concomitent la disciplinele economice fundamentale sau de specialitate și mai ales la disciplina de microeconomie. Suportul teoretic se referă la elementele necesare pentru înțelegerea conceptelor matematice și rezolvarea aplicațiilor economice corespunzătoare. Exemplele sunt rezolvate cât mai detaliat, iar organizarea tabelară a unor aplicații permite utilizarea mai eficientă a calculatorului, respectiv a programului de calcul tabelar Excel.

Conținutul cursului se adresează atât studenților cu o temeinică cunoaștere a noțiunilor de algebră din liceu, dar și celor care au nevoie să înțeleagă unele noțiuni. Astfel, prezenta lucrare încearcă să răspundă unor necesități de adâncire a pregătirii în domeniul matematicii a tuturor celor interesați.

Paragrafele teoretice sunt susținute de numeroase exemple și de probleme rezolvate, care dau posibilitatea aprofundării noțiunilor cuprinse în unitatea respectivă de învățare. De asemenea, cititorului îi sunt lăsate spre exersare diverse aplicații.

Materialul cursului este structurat în zece unități de învățare: primele două sunt dedicate unor noțiuni fundamentale din cadrul larg al algebrei superioare, urmând ca următoarele patru unități să trateze o tematică mai amplă a algebrei liniare. Astfel, prima unitate de învățare este dedicată funcției de gradul 1. Alături de diferite proprietăți geometrice de bază, sunt prezentate metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare, respectiv a sistemelor de inecuații liniare cu două necunoscute, dar și noțiuni noi precum dreapta de regresie. A doua unitate de învățare este dedicată studiului matricelor și determinanților. Alături de noțiuni cunoscute din liceu precum rangul, respectiv inversa unei matrici sau metode de rezolvare a sistemelor de ecuații liniare cu mai multe variabile, sunt prezentate noțiuni noi precum transformările elementare precum și aplicații acestora. A treia unitate de învățare este dedicată spațiilor vectoriale, cuprinzând noțiunile clasice precum subspațiu vectorial, liniar independență, bază într-un spațiu vectorial,

spațiu euclidian, dar și unele mai puțin întâlnite precum lema substituției. A patra unitate de învățare este dedicată studiului noțiunii de transformare liniară, noțiune care o continuă pe cea de morfism de grupuri întâlnită în clasa a XII-a. Alături de definiție și noțiuni precum nucleu, imagine, matrice asociată în raport cu o bază, este tratată și tematica vectorilor și valorilor proprii, tematică ce-și are aplicabilitate în diagonalizarea unei matrici precum și în rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale. A cincea unitate de învățare este dedicată formelor biliniare, acestea fiind utile spre exemplu în studierea punctelor de extrem ale unei funcții de mai multe variabile. Următoarele unități de învățare sunt orientate către modelele de optimizare reprezentate prin probleme de programare liniară, precum și modele economice care conduc la acestea. Sunt prezentate metodele de rezolvare a unei probleme de programare liniară: metoda grafică (unitatea opt) și algoritmul simplex (unitatea nouă). Ultima unitate de învățare este dedicată problemelor de transport.

Prezenta lucrare va fi completată de caietul de aplicații, care va conține pentru fiecare temă de studiu, aplicații rezolvate dar și aplicații propuse specifice temei respective.

Unitatea de învățare I

Funcții liniare

Cuprins

1.1. Funcția și ecuația de gradul 1	2
1.2. Sisteme liniare	5
1.3. Inecuații liniare	8
1.4. Metoda regresiei liniare	10
Aplicații propuse	12

1.1. Funcția și ecuația de gradul 1

Funcția de gradul 1 (numită și **funcția liniară**) este funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin:

$$f(x) = ax + b, \quad (1.1)$$

unde $a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.

Graficul funcției de gradul 1 este mulțimea:

$$G_f = \{(x, y): x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}, \quad (1.2)$$

care se reprezintă în planul axelor de coordonate printr-o dreaptă.

Dacă $a > 0$ funcția de gradul 1 este **crescătoare**, iar dacă $a < 0$ funcția este **descrescătoare**.

Ecuația de gradul 1 este $ax + b = 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$,
cu **soluția** pentru $a \neq 0$:

$$x = -\frac{b}{a} \in \mathbb{R}. \quad (1.4)$$

Reprezentarea grafică a funcției de gradul 1 (a dreptei): se determină două puncte, de obicei utilizându-se punctele de intersecție cu axele de coordonate:

$$G_f \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ x = -\frac{b}{a} \end{cases}, \quad G_f \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = b \end{cases}. \quad (1.5)$$

□ **Observația 1.1** Relația $x = a$ este ecuația unei drepte verticale, paralele cu axa Oy , iar $y = b$ este ecuația unei drepte orizontale, paralele cu Ox .

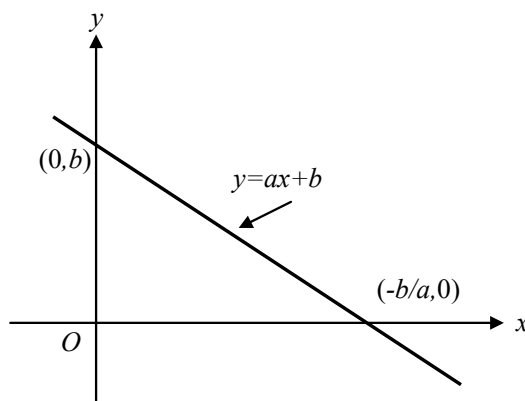


Figura 1.1 Graficul funcției de gradul 1

□ **Exemplul 1.1** Într-o unitate economică este achiziționat un utilaj cu valoarea de 120.000 unități monetare (u.m.) și care este amortizat într-o perioadă de 10 ani. Valoarea utilajului, y , în funcție de numărul de luni de funcționare, x , este dată de expresia:

$$y = f(x) = -1000x + 120\,000,$$

ceea ce înseamnă că în fiecare lună de funcționare se amortizează 1.000 u.m. din valoarea utilajului. Să se determine punctele de intersecție cu axele de coordonate și să se reprezinte grafic funcția liniară care modelează valoarea de amortizare a utilajului respectiv.

Rezolvare: Determinăm mai întâi punctele de intersecție cu axele de coordonate. Obținem:

$$G_f \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ x = 120 \end{cases}, \quad G_f \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = 120\,000 \end{cases}.$$

Observăm că, în mod natural, funcția de amortizare este descrescătoare, graficul funcției liniare corespunzătoare fiind reprezentat în Figura 1.2. □

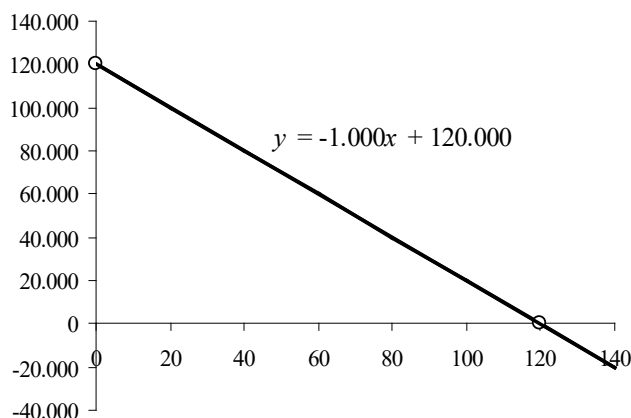


Figura 1.2 Graficul funcției de amortizare

□ **Exemplul 1.2:** Se consideră P ca fiind prețul de vânzare al unui produs, care poate fi definit ca o funcție de costul C al produsului, pe două intervale, după cum urmează:

$$P = f(C) = \begin{cases} 3C, & \text{dacă } 0 \leq C \leq 20 \\ \frac{3C}{2} + 30, & \text{dacă } C > 20 \end{cases}$$

Să se construiască tabloul de variație și să se reprezinte grafic funcția de preț.

Rezolvare: Construim mai întâi tabloul de variație al funcției de preț și obținem datele din Tabelul 1.1. Se observă avem pentru $C = 20$, avem $f(20) = 3 \cdot 20 = 60$.

Tabelul 1.1. Tabloul de variație al funcției de preț	
C	$P = f(C)$
0	0
10	30
20	60
30	75
40	90

Cu ajutorul tabloului de variație reprezentăm cele două ramuri ale funcției de preț, fiecare ramură fiind determinată de câte 3 puncte. Graficul funcției de preț este reprezentat în Figura 1.3. □

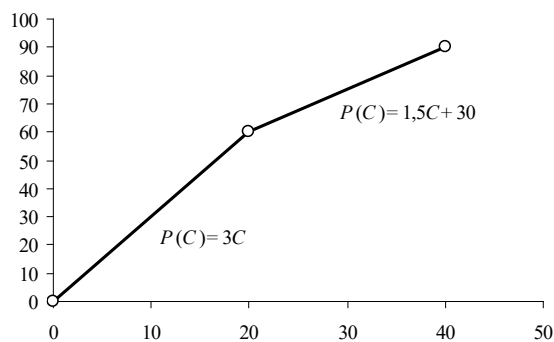


Figura 1.3. Graficul funcției de preț

Considerații geometrice

Considerăm în planul axelor de coordonate punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ reprezentate în Figura 1.4. Atunci *panta* sau *coeficientul unghiular* al dreptei cu ecuația generală $y = mx + n$ care trece prin punctele M_1 și M_2 este:

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \quad (1.6)$$

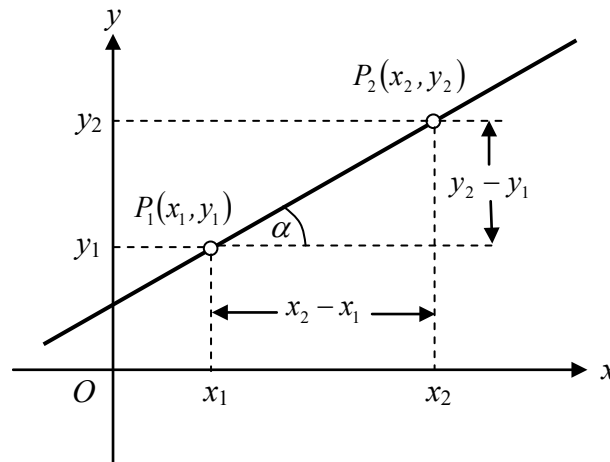


Figura 1.4. Coordonatele a două puncte în plan

□ Ecuația dreptei care trece printr-un punct $M_0(x_0, y_0)$ și are panta m , este:

$$(d) \quad y - y_0 = m \cdot (x - x_0), \quad (1.7)$$

iar ecuația dreptei care trece prin punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$ este dată de:

$$(d) \quad y - y_0 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_0), \quad (1.8)$$

ecuație echivalentă cu

$$(d) \quad \frac{x - x_0}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_0}{y_2 - y_1}, \quad (1.8')$$

Referitor la **pozițiile relative a două drepte în plan**, $(d_1) y = m_1x + n_1$ și $(d_2) y = m_2x + n_2$, dacă dreptele sunt paralele avem proprietatea:

$$d_1 \parallel d_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2, \quad (1.9)$$

iar dacă dreptele sunt perpendiculare, avem proprietatea:

$$d_1 \perp d_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1. \quad (1.10)$$

□ **Definiție 1.2 Distanța dintre punctele $M_1(x_1, y_1)$ și $M_2(x_2, y_2)$** este:

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (1.11)$$

□ **Exemplul 1.3** Să se determine ecuația dreptei (d_1) care trece prin punctele de coordonate $A(1, -1)$ și $B(4, 2)$ și ecuația dreptei (d_2) care trece prin punctele de coordonate $C(3, 1)$ și, respectiv, $D(6, -2)$ și să se reprezinte dreptele în același sistem de axe de coordonate.

Rezolvare: Aplicăm relația (1.9) și obținem pentru prima dreaptă:

$$(d_1) y + 1 = \frac{2+1}{4-1} \cdot (x - 1) \text{ sau}$$

$$(d_1) y = x - 2.$$

Analog, pentru a doua dreaptă:

$$(d_2) y - 1 = \frac{-2-1}{6-3} \cdot (x - 3) \text{ sau}$$

$$(d_2) y = -x + 4.$$

Reprezentarea grafică a celor două drepte este redată în Figura 1.5.

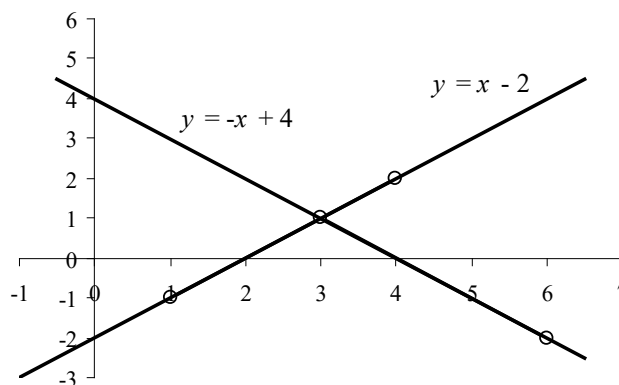


Figura 1.5

Să remarcăm faptul că dacă am fi aplicat relația (1.6) am fi obținut coeficientul unghiular pentru prima dreaptă

$$m_1 = \frac{2+1}{4-1} = 1,$$

și atunci scriind relația (1.7) pentru punctul A sau punctul B rezultă similar ecuația dreptei (d_1). □

1.1 Sisteme liniare

□ **Definiția 1.3** *Sistemele liniare* sunt sistemele de ecuații de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (1.12)$$

în care **necunoscutele** x_1, x_2, \dots, x_n apar la puterea întâi, iar valorile a_{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$, sunt **coeficienții** sistemului, în timp ce valorile b_j , $1 \leq j \leq m$, sunt **termenii liberi**. Sistemul (1.12) este un sistem liniar de forma $m \times n$, adică un sistem cu m ecuații și n necunoscute.

Forma generală a unui **sistem liniar de două ecuații** cu două necunoscute este:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}, \quad (1.13)$$

care se poate rezolva prin metoda substituției, prin metoda reducerii sau prin metoda grafică.

Prin **metoda substituției**, explicităm o necunoscută din una din ecuațiile sistemului, pe care o înlocuim (substituim) în cealaltă ecuație, rezolvând o ecuație cu o singură necunoscută. De exemplu, dacă explicităm pe x_1 din prima ecuație a sistemului (1.13), obținem:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2}{a_{11}}.$$

Înlocuind pe x_1 în a doua ecuație a sistemului rezultă x_2 de forma:

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Pentru determinarea lui x_1 , putem înlocui valoarea găsită pentru x_2 într-una din ecuațiile sistemului sau chiar în expresia lui x_1 calculată mai sus.

Metoda reducerii, constă din eliminarea (reducerea) unei necunoscute aplicând proprietățile de echivalență ale ecuațiilor și apoi rezolvând ecuația cu o singură necunoscută obținută. De exemplu, dacă reducem pe x_2 între ecuațiile sistemului (1.13), rezultă, succesiv:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \cdot a_{22} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \cdot (-a_{12}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}a_{22}x_1 + a_{12}a_{22}x_2 = a_{22}b_1 \\ -a_{21}a_{12}x_1 - a_{22}a_{12}x_2 = -a_{12}b_2 \end{cases}$$

Adunând cele două relații, se obține:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Pentru cealaltă necunoscută putem aplica încă o dată metoda reducerii sau putem aplica metoda substituției.

Am obținut astfel soluțiile sistemului liniar (1.13) de forma:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \end{cases}. \quad (1.14)$$

□ **Exemplul 1.4** Să se rezolve sistemul liniar:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}.$$

Rezolvare: Metoda substituției Din prima ecuație a sistemului, vom explicita necunoscuta x obținând:

$$x = y + 2$$

apoi vom substitui (înlocui) în cea de-a doua ecuație:

$$y + 2 + y = 4$$

$$2y = 2$$

$$y = 1.$$

Pentru determinarea lui x , putem înlocui valoarea găsită pentru y într-una din ecuațiile sistemului sau chiar în expresia lui x calculată mai sus. În cazul celei de-a doua variante, avem

$$x = 1 + 2 = 3.$$

Metoda reducerii Observăm că în cazul necunoscutei y coeficienții sunt opuși (respectiv, egali, în valoare absolută) ceea ce ar fi echivalent cu faptul că suma lor este 0. Această sugerează adunarea celor două relații ale sistemului

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow x = 3.$$

$$\frac{2x}{2} = 6$$

Ceea ce urmează este înlocuirea valorii găsite pentru x într-una din ecuațiile sistemului. Astfel, în cazul primei ecuații se obține:

$$3 - y = 2$$

$$-y = -1$$

$$y = 1.$$

□ **Observația 1.2** Dacă pentru nici o necunoscută nu avem coeficienți opuși, atunci se înmulțesc convenabil cele două ecuații astfel încât pentru una din necunoscute să se obțină coeficienți opuși. Spre exemplu, sistemul inițial nu are coeficienții lui x sunt egali, însă prin înmulțirea primei ecuații cu -1 ei vor deveni opuși:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases} \xrightarrow{(-1)} \begin{cases} -x + y = -2 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = -2 \\ x + y = 4 \\ \hline 2y = 2 \end{cases} \rightarrow y = 1 \rightarrow x = 3. \quad \square$$

O alternativă practică pentru rezolvarea sistemelor liniare de tip 2×2 este **metoda grafică** de rezolvare, care constă din reprezentarea grafică a dreptelor reprezentate prin ecuațiile sistemului. Coordonatele punctului de intersecție reprezintă de fapt soluția sistemului.

□ **Exemplul 1.5** Să se rezolve prin metoda grafică sistemul liniar:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Rezolvare: Aducem ecuațiile sistemului la forma generală a ecuației liniare și obținem sistemul echivalent:

$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

Observăm că acestea sunt dreptele (d_1) și (d_2) din Exemplul 1.3. Reprezentând grafic aceste drepte, punctul lor de intersecție reprezintă soluția sistemului. Pentru determinarea coordonatelor punctului de intersecție, egalăm ecuațiile sistemului și obținem:

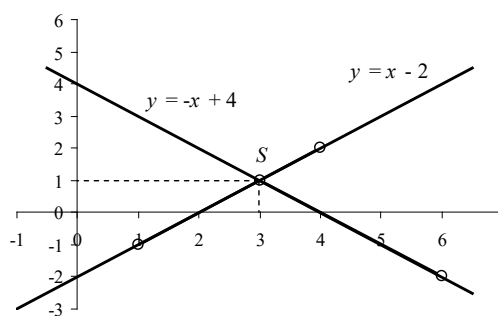


Figura 1.6. Soluția grafică a sistemului din Exemplul 1.5

$$x - 2 = -x + 4 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3 \text{ și } y = 1.$$

După cum se observă și din Figura 1.6, soluția sistemului este dată de punctul de coordonate $S(3, 1)$. \square

În exemplul 1.5, sistemul are o soluție unică. Spunem că sistemul este *compatibil determinat*. În cazul în care sistemul are o infinitate de soluții, spunem că sistemul este *compatibil nedeterminat*, iar în cazul în care sistemul nu are nici o soluție, sistemul este *incompatibil*.

Metodele de substituție și de reducere sunt aplicabile și pentru sistemele 3×3 și de dimensiuni mai mari, dar pentru rezolvarea acestora sunt mai eficace metodele matriceale, pe care le vom aborda ulterior.

1.2 Inecuații liniare

Forma generală a unei **inecuații liniare cu o singură necunoscută** este:

$$ax + b \geq 0, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0, \quad (1.15)$$

în care inegalitatea poate fi una din relațiile $\geq, \leq, >, <$.

Soluția inecuației liniare cu o necunoscută, dacă există, este un interval.

În general, dacă D este domeniul de existență al inecuației, iar S este mulțimea soluțiilor inecuației obținută după rezolvarea acesteia, atunci soluția finală a inecuației va fi dată de mulțimea $S \cap D$.

\square **Exemplul 1.6** Să se rezolve inecuația $3x - 2 \leq 7$, știind că x este un număr natural.

Rezolvare: Aplicând relațiile de echivalență obținem succesiv:

$$3x - 2 \leq 7 \Leftrightarrow 3x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Avem așadar:

$$\begin{cases} D: x \in \mathbb{N} \\ S: x \in (-\infty, 3] \end{cases} \Leftrightarrow x \in S \cap D = \{0, 1, 2, 3\}. \quad \square$$

Să considerăm acum forma generală a unei **inecuații liniare cu două necunoscute**:

$$ax + by + c \geq 0, a, b, c \in \mathbb{R}, a, b \neq 0, \quad (1.16)$$

în care inegalitatea poate fi una din relațiile $\leq, \geq, <, >$.

Soluția unei asemenea ecuații este mulțimea punctelor din plan care satisfac inegalitatea dată. Una din metodele practice de rezolvare a inecuațiilor liniare cu două necunoscute este **metoda grafică**. Pentru aceasta, inecuația se aduce la forma $y \geq mx + n$ (în care inegalitatea poate fi una din relațiile $\leq, \geq, <, >$), se reprezintă grafic dreapta de ecuație $y = mx + n$, iar soluția este dată de semiplanul situat deasupra (sau dedesubtul) drepte respective.

Să mai remarcăm faptul că dacă inegalitatea este strictă ($>, <$), atunci punctele nu se află pe dreapta respectivă (aspect subliniat grafic printr-o linie punctată), iar dacă inegalitatea nu este strictă, atunci punctele aparțin drepte (având astfel o linie continuă).

□ **Exemplul 1.7** Să se rezolve prin metoda grafică inecuația cu două necunoscute:

$$4x - 2y - 6 \leq 0.$$

Rezolvare: Aplicând metoda menționată și explicitându-l pe y , obținem:

$$\begin{aligned} 4x - 2y - 6 \leq 0 &\Leftrightarrow 2y \geq 4x - 6 \\ &\Leftrightarrow y \geq 2x - 3. \end{aligned}$$

Soluția inecuației va fi unul din cele două semiplane: cel de deasupra dreptei și cel de sub aceasta. Alegerea semiplanului soluție se face astfel: se alege un punct oarecare din plan (de obicei originea axelor) și se studiază inecuația pentru acel punct. Va fi soluție semiplanul care conține acest punct.

În cazul de față, soluția este reprezentată de mulțimea punctelor din plan situate deasupra dreptei de ecuație $y = 2x - 3$, respectiv aria hașurată din Figura 1.7, inclusiv punctele situate pe dreaptă. □

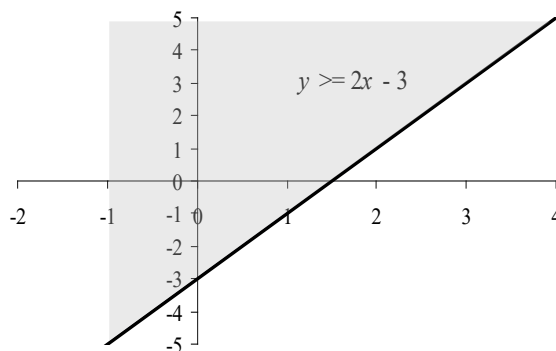


Figura 1.7. Soluția grafică

Atunci când avem două sau mai multe inecuații cu două necunoscute, avem de fapt un **sistem de inecuații**. Soluția sistemului se obține deci din intersecția soluțiilor fiecărei inecuații.

□ **Exemplul 1.8** Să se rezolve, prin metoda grafică, sistemul de inecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 \geq 0 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases}.$$

Rezolvare: Scriem sistemul de inecuații sub forma:

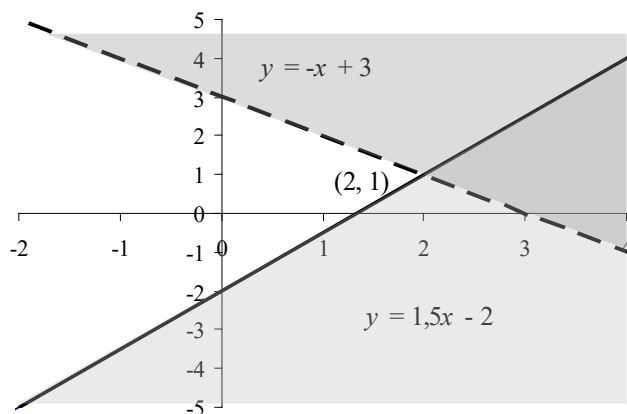


Figura 1.8

$$\begin{aligned} \begin{cases} 3x - 2y - 4 \geq 0 \\ x + y - 3 > 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y \leq 3x - 4 \\ y > -x + 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2}x - 4 \\ y > -x + 3 \end{cases}. \end{aligned}$$

Reprezentăm grafic dreptele $y = \frac{3}{2}x - 4$ (cu linie continuă) și $y = -x + 3$ (cu linie punctată), aplicând metoda de mai sus pentru a determina soluția fiecărei inecuații. Soluția sistemului (Figura 1.8) este dată de intersecția celor două arii hașurate. De asemenea, coordonatele

punctului de intersecție care delimitează domeniul soluției sistemului de inecuații sunt $x = 2$ și $y = 1$. □

1.3 Metoda regresiei liniare

În multe aplicații practice, atunci când analizăm două variabile, ne interesează ecuația dreptei care modelează cel mai bine relația de dependență dintre cele două variabile. Metoda care ne furnizează forma analitică a acestei drepte (numită *dreaptă de regresie*) este *metoda regresiei liniare*.

Fie în plan punctele de coordonate $(x_i, y_i), 1 \leq i \leq n$, și fie $\hat{y} = \alpha x + \beta$ ecuația dreptei care se situează (trece) în apropierea a cât mai multe puncte. Pentru fiecare valoare x_i avem $\hat{y} = \alpha x + \beta$, care reprezintă valoarea estimată a lui y_i . Coeficienții α și β se determină, conform *metodei celor mai mici pătrate*, astfel încât suma pătratelor abaterilor valorilor estimate de la valorile date să fie minimă:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2. \quad (1.17)$$

Metoda celor mai mici pătrate conduce la *ecuația dreptei de regresie*:

$$\hat{y} = \alpha x + \beta, \quad (1.18)$$

unde coeficienții α și β sunt dați de relațiile:

$$\alpha = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i - n \cdot \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i}{(\sum_{i=1}^n x_i)^2 - n \cdot \sum_{i=1}^n (x_i)^2} \quad (1.19)$$

$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^n y_i - \alpha \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1.20)$$

□ **Exemplul 1.9:** Să se determine și să se reprezinte grafic ecuația dreptei de regresie pentru valorile din tabelul de mai jos:

x_i	50	25	10	5
y_i	2	4	10	20

Rezolvare: Determinăm mai întâi sumele necesare, pentru $n = 4$:

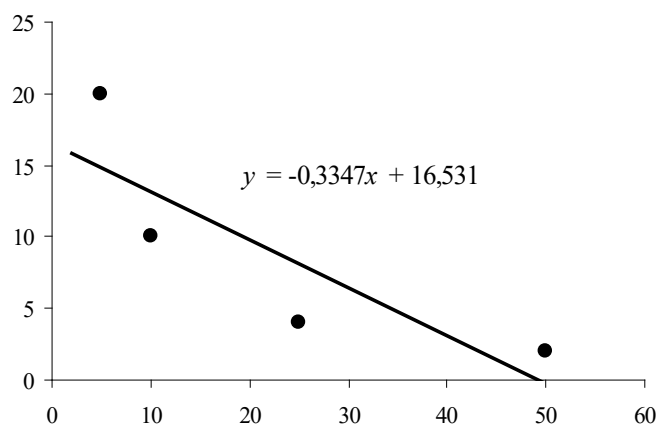


Figura 1.9. Dreapta de regresie din Exemplul 1.9

$$\sum_{i=1}^4 x_i = 50 + 25 + 10 + 5 = 90$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = 2 + 4 + 10 + 20 = 36$$

$$\sum_{i=1}^4 (x_i)^2 = 50^2 + 25^2 + 10^2 + 5^2 = 3250$$

$$\sum_{i=1}^4 x_i \cdot y_i = 50 \cdot 2 + 25 \cdot 4 + 10 \cdot 10 + 5 \cdot 20 = 400 .$$

Înlocuind în relațiile (1.19) și (1.20), rezultă coeficienții:

$$\alpha = \frac{90 \cdot 36 - 4 \cdot 400}{90^2 - 4 \cdot 3250} = -0,3347, \beta = \frac{36 - (0,33) \cdot 90}{4} = 16,531,$$

adică ecuația de regresie $\hat{y} = -0,3347x + 16,531$, reprezentată în Figura 1.9. □

Aplicații propuse

□ **A1.1:** Într-o unitate economică este achiziționat un utilaj cu valoarea de 240.000 unități monetare (u.m.) și care este amortizat într-o perioadă de 10 ani. Valoarea utilajului, y , în funcție de numărul de luni de funcționare, x , este dată de expresia:

$$y = f(x) = -1000x + 240\,000,$$

ceea ce înseamnă că în fiecare lună de funcționare se amortizează 1.000 u.m. din valoarea utilajului. Să se determine punctele de intersecție cu axele de coordonate și să se reprezinte grafic funcția liniară care modelează valoarea de amortizare a utilajului respectiv.

□ **A1.2:** Se consideră P ca fiind prețul de vânzare al unui produs, care poate fi definit ca o funcție de costul C al produsului, pe două intervale, după cum urmează:

$$P = f(C) = \begin{cases} 2C + 30, & \text{dacă } 0 \leq C \leq 30 \\ \frac{C}{2} + 40, & \text{dacă } 30 < C \leq 60 \end{cases}.$$

Să se construiască tabloul de variație și să se reprezinte grafic funcția de preț.

□ **A1.3** Să se determine ecuația dreptei (d_1) care trece prin punctele de coordonate $A(-1, 1)$ și $B(-4, -2)$ și ecuația dreptei (d_2) care trece prin punctele de coordonate $C(-1, 3)$ și, respectiv, $D(2, 6)$ și să se reprezinte dreptele în același sistem de axe de coordonate.

□ **A1.4** Să se rezolve sistemul liniar:

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 3y = 6 \end{cases}$$

folosind cele trei metode cunoscute.

□ **A1.5** Să se rezolve, prin metoda grafică, sistemul de inecuații cu două necunoscute:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 12 \geq 0 \\ 3x + y - 6 > 0 \end{cases}.$$

□ **A1.6** Să se determine și să se reprezinte grafic ecuația dreptei de regresie pentru valorile din tabelul de mai jos:

x_i	20	35	10	50
y_i	30	40	20	30

Cuprins

2.1 Definiții. Proprietăți	14
2.2 Determinanți	16
2.3 Inversa unei matrici	21
2.4 Rangul unei matrici	22
2.5 Transformări elementare	24
2.6 Reducerea în treaptă pe coloană a unei matrice (RTC)	26
2.7 Sisteme de ecuații liniare	30
2.8 Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare	32
2.9 Explicitarea sistemelor de ecuații liniare	36
Aplicații propuse	38

2.1. Definiții. Proprietăți

□ **Definiția 2.1** O **matrice** este un tablou pătratic de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Notăm $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, unde a_{ij} sunt **elementele matricei** A de tip $m \times n$ (cu m linii și n coloane). De exemplu, elementul a_{23} este elementul situat pe linia 2 și coloana 3. O matrice de tip $m \times n$ are $m \cdot n$ elemente. Dacă $m = n$ că avem o **matrice pătratică**, în care n este **ordinul** matricei.

□ **Definiția 2.2** O matrice de tipul $1 \times n$ este o **matrice linie**, iar o matrice de tipul $m \times 1$ este o **matrice coloană**. Matricele linie sau coloană se mai numesc și **vectori**.

□ **Definiția 2.3** Elementele $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ ale unei matrice pătratice alcătuiesc **diagonala principală a matricei**, iar elementele $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ alcătuiesc **diagonala secundară a matricei**.

□ **Definiția 2.4** O matrice în care toate elementele sunt 0 se numește **matrice nulă**, cu notația $O = (0)$, iar o matrice pătratică de ordinul n în care elementele de pe diagonala principală sunt egale cu 1, iar celelalte elemente sunt 0 se numește **matrice unitate de ordinul n** și are forma:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

□ **Definiția 2.5** O matrice pătratică în care toate elementele situate sub diagonala principală (sau deasupra diagonalei principale) sunt egale cu 0 se numește **matrice triunghiulară**. O matrice pătratică care are elementele de pe diagonala principală diferite de 0, iar celelalte elemente egale cu 0, se numește **matrice diagonală**.

Fie două matrice de același tip $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ și $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$.

□ **Definiția 2.6:** Se spune că matricele A și B sunt **egale** și se scrie $A = B$, dacă $a_{ij} = b_{ij}$ pentru fiecare i, j , unde $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

□ **Definiția 2.7:** Se numește **suma matricelor** A și B , matricea $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ și se notează

$C = A + B$, care are elementele $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pentru fiecare i, j , unde $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

□ **Definiția 2.8:** Matricea $-A = (-a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ se numește **opusa matricei** A . Atunci matricea

$A - B = A + (-B)$ se numește **diferența dintre** A și B .

□ **Exemplul 2.1:** Să se determine suma matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Conform Definiției 2.2, matricea sumă va fi matricea:

$$C = \begin{pmatrix} 1 + (-1) & 2 + 2 & 3 + (-3) \\ 4 + (-2) & -1 + (-1) & -2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

□ **Exemplul 2.2:** Să se determine diferența matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Conform Definiției 2.8 matricea diferență va fi matricea:

$$C = \begin{pmatrix} 1 - (-1) & 2 - (2) & 3 - (-3) \\ 4 - (-2) & -1 - (-1) & -2 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 6 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

□

□ **Definiția 2.9:** Se numește **produs dintre numărul α și matricea $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$,**

matricea $B = (b_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, și se scrie $B = \alpha \cdot A$, matricea care are elementele $b_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}$,

pentru fiecare i, j , unde $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$.

□ **Exemplul 2.3:** Să se determine produsul dintre numărul 5 și matricea A din Exemplul 2.2.

Rezolvare: Rezultă, conform definiției de mai sus:

$$5 \cdot A = 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 & 5 \cdot 2 & 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 4 & 5 \cdot (-1) & 5 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 20 & -5 & -10 \end{pmatrix}.$$

□

Fie acum două matrice $A = (a_{ik})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ k=\overline{1,n}}}$ de tip $m \times n$ și $B = (b_{kj})_{\substack{k=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,p}}}$ de tip $n \times p$.

□ **Definiția 2.5:** Se numește **produsul matricelor A și B** , matricea $C = (c_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$ de tip $m \times n$, având elementele:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj},$$

pentru fiecare i, j , unde $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Notăm $C = A \cdot B$.

□ **Observația 2.1:** Din definiția de mai sus, se poate observa că elementul c_{ij} din matricea produs este suma elementelor ce se obțin ca produs dintre elementele de pe **linia i** a matricei A cu elementele corespunzătoare de pe **coloana j** a matricei B . De asemenea, să notăm că înmulțirea matricelor este posibilă numai dacă numărul de coloane din prima matrice este egal cu numărul de linii din a doua matrice.

□ **Exemplul 2.4:** Să se determine produsul matricelor:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \text{ și } B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Deoarece matricea A este de tipul 2×3 , iar matricea B de tipul 3×2 , atunci produsului matricelor este posibil, iar matricea produs C va fi de tipul 2×2 :

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) & 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

□

Pe baza înmulțirii matricelor, putem defini puterile unei matrice pătratice după cum urmează: pentru orice număr natural n convenim că $A^0 = I_n$. Notăm : $A^1 = A$, $A^2 = A \cdot A$, $A^3 = A^2 \cdot A, \dots, A^n = A^{n-1} \cdot A$.

□ **Definiția 2.11:** Se numește **transpusa** unei matrice $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, matricea obținută din

matricea inițială prin înlocuirea (transpunerea) liniilor cu coloanele.

Notăm $A^T = (a_{ji})_{\substack{j=\overline{1,n} \\ i=\overline{1,m}}}$. Matricea transpusă a unei matrice de tip $m \times n$ este o matrice de tipul $n \times m$.

□ **Exemplul 2.5:** Să se determine transpusa matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Prin schimbarea liniilor cu coloanele în matricea inițială obținem matricea transpusă de tip 3×2 :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 \\ \boxed{2} & -1 \\ \boxed{3} & -2 \end{pmatrix}.$$

□

2.2 Determinanți

Fie $A = (a_{ij})_{\substack{i=\overline{1,n} \\ j=\overline{1,n}}}$, o matrice pătratică de ordinul n .

□ **Definiția 2.12:** Se numește **determinant al matricei** A , numărul asociat matricei A notat $\det(A) = |A|$.

Dacă $A = (a_{11})$ este o matrice pătratică de ordinul 1, atunci determinantul matricei A este prin definiție:

$$\det(A) = |a_{11}| = a_{11}. \quad (2.3)$$

Dacă A este o matrice pătratică de ordinul 2, de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

atunci determinantul matricei A este prin definiție:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (2.4)$$

Termenii care apar în partea dreaptă a expresiei de mai sus, se numesc **termenii dezvoltării determinantului**.

□ **Exemplul 2.6:** Să se calculeze determinantul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$$

Rezolvare: Aplicăm regula de mai sus și obținem:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-5).$$

□

Dacă A este o matrice pătratică de ordinul 3, de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

atunci determinantul matricei A este prin definiție:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - \\ &\quad - a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Pentru determinarea relației (2.3) există două metode de calcul direct al determinantilor de ordinul 3, respectiv **regula lui Sarrus** și **regula triunghiului**.

Pentru a aplica **regula lui Sarrus**, se completează determinantul în partea inferioară cu primele 2 linii ale acestuia, iar valoarea determinantului se obține adunând produsul elementelor de pe diagonala principală și de pe cele două diagonale paralele cu aceasta și scăzând produsul elementelor de pe diagonala secundară și de pe cele două diagonale paralele cu aceasta.

Schema de aplicare a regulii lui Sarrus este reprezentată în Figura 2.1, valorile cu semnul + fiind marcate cu o linie continuă în timp ce valorile cu semnul – sunt marcate printr-o linie întreruptă.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

Figura 2.1: Regula lui Sarrus

□ **Exemplul 2.7:** Să se calculeze cu regula lui Sarrus determinatul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Aplicăm regula lui Sarrus și obținem:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-2) - \\ &\quad - 3 \cdot (-1) \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot (-2) - 4 \cdot 2 \cdot 0 = 11 \end{aligned}$$

□

Cu **regula triunghiului**, valoarea determinantului se obține adunând produsul elementelor de pe diagonala principală și de pe cele două triunghiuri paralele cu aceasta și scăzând produsul elementelor de pe diagonala secundară și de pe cele două triunghiuri paralele cu aceasta.

Schema de aplicare a regulii triunghiului este reprezentată în Figura 2.2, în care valorile triunghiurilor delimitate de liniile continue sunt produsele cu semnul + și valorile triunghiurilor delimitate de liniile punctate sunt produsele cu semnul –.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Figura 2.2: Regula triunghiului

□ **Exemplul 2.8:** Să se calculeze cu regula triunghiului determinantul matricei din Exemplul 2.7.

Rezolvare: Aplicând regula triunghiului, mai întâi produselor elementelor de pe diagonala principală $(1, -1, 0)$ și a produselor formate din triunghiurile paralele cu aceasta $(4, 1, 3)$ și $(3, 2, -2)$. Continuând procedeul pentru elementele de pe diagonala secundară $(3, -1, 3)$ și a produselor formate din triunghiurile paralele cu aceasta $(1, 1, -2)$ și $(4, 2, 0)$, obținem:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= [1 \cdot (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \cdot (-2)] - \\ &\quad - [3 \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot (-2) + 4 \cdot 2 \cdot 0] = 11 \end{aligned}$$

□

Fie $A = (a_{ij})_{i,j=1,\overline{n}}$, o matrice pătratică de ordinul n .

□ **Definiția 2.13:** Se numește **minor** al elementului a_{ij} determinantul matricei pătratică de ordin $n-1$, rezultate prin eliminarea din matricea A a liniei i și a coloanei j . Minorul se notează prin $\det(A_{ij})$ sau prin D_{ij} .

□ **Definiția 2.14:** Se numește **complement algebric** al elementului a_{ij} numărul $(-1)^{i+j} \det(A_{ij})$.

□ **Exemplul 2.9:** Să se determine minorul și complementul algebric al elementului $i = 1, j = 2$ (marcate cu căsuță) din matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Eliminăm din matricea A linia 1 și coloana 2 și obținem:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 4 & \boxed{-1} & -2 \\ 3 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Atunci minorul elementului a_{12} este:

$$D_{12} = \det(A_{12}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-2) = 6.$$

De asemenea, complementul algebric al elementului $a_{12} = 2$ este:

$$(-1)^{1+2}D_{ij} = (-1)^3 \cdot 6 = -6.$$

□

□ **Definiția 2.15: Determinantul** matricii pătratice de ordinul n , $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, este suma produselor elementelor din linia i cu complementării lor algebrici, respectiv:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij}) \\ &= (-1)^{i+1} \cdot \det(A_{i1}) + (-1)^{i+2} \cdot \det(A_{i2}) + \dots + (-1)^{i+n} \cdot \det(A_{in}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Aceasta este o relație generală pentru calculul unui determinant de ordin n purtând numele de **dezvoltarea pe linie** a unui determinant. În mod similar, are loc **dezvoltarea pe coloană** a unui determinant.

□ **Exemplul 2.10:** Să se calculeze determinantul matricii:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

aplicând Definiția 2.14.

Rezolvare: Utilizând relația (2.4) pentru linia $i = 1$ obținem:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{3} \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^{\overset{1}{\text{linia}} + \overset{1}{\text{coloana}}} \cdot \boxed{1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{\overset{1}{\text{linia}} + \overset{2}{\text{coloana}}} \cdot \boxed{2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ &\quad + (-1)^{\overset{1}{\text{linia}} + \overset{3}{\text{coloana}}} \cdot \boxed{3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot \boxed{1} \cdot 2 + (-1) \cdot \boxed{2} \cdot 6 + 1 \cdot \boxed{3} \cdot 7 = 2 - 12 + 21 = 11. \end{aligned}$$

□

□ **Propoziția 2.1:** Determinantul unei matrici pătratice de ordinul n , $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este egal cu determinantul matricii transpuse a lui A , $\det(A) = \det(A^T)$.

□ **Propoziția 2.2:** Pentru matricile pătratice de ordinul n au loc proprietățile:

- (1) Dacă toate elementele unei linii (sau ale unei coloane) ale matricii sunt nule, atunci determinantul matricii este nul.
- (2) Dacă matricea are două linii (sau două coloane) identice, atunci determinantul matricii este nul.
- (3) Dacă elementele a două linii (sau a două coloane) sunt proporționale, atunci determinantul matricii este nul.
- (4) Dacă o linie (sau o coloană) este o combinație liniară a celorlalte linii (sau coloane), atunci determinantul matricii este nul.

□ **Propoziția 2.3:** Se poate scoate factor comun între elementele unei linii (sau a unei coloane), scriind determinantul inițial ca produs între factorul comun și determinatul în care am scos factorul comun.

□ **Propoziția 2.4:** Dacă la o linie (sau la o coloană) a unei matrice pătratice de ordinul n , adunăm elementele unei alte linii (sau coloane) înmulțite cu același număr, atunci această matrice va avea același determinant ca și matricea inițială.

Să aplicăm acum proprietatea de mai sus pentru calculul determinantului matricei de ordinul 5:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

Aplicând Propoziția 2.4, încercăm să obținem zerouri pe coloana a 3-a (care are deja două zerouri). Utilizăm în acest scop linia a 5-a care are în coloana a 3-a elementul $a_{53} = -1$. Înmulțim linia a 5-a cu 3 și o adunăm la linia a 2-a și apoi înmulțim linia a 5-a cu 4 și o scădem din linia a 4-a. Obținem:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 7 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 6 & -4 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 5 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 0 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 0 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & 0 & -7 & -10 \\ 0 & -3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Dezvoltăm acum determinantul după $a_{53} = -1$ și rezultă un determinant de ordinul 4, în care încercăm să facem zerouri în prima coloană utilizând elementul $a_{21} = 1$ din linia a 2-a, obținând:

$$\det(A) = (-1)^{5+3} \begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 & 3 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 3 & -1 & 5 & -5 \\ 2 & 18 & -7 & -10 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -13 & 25 & 17 \\ 1 & -9 & 13 & 7 \\ 0 & 26 & -34 & -26 \\ 0 & 36 & -33 & -24 \end{vmatrix}$$

Dezvoltând după $a_{21} = 1$, obținem un determinant de ordinul 3 care poate fi calculat direct, printr-una din metodele discutate anterior. Se obține în final:

$$\det(A) = 1032.$$

Interpretare geometrică O aplicație a determinanților în geometria analitică este și **ecuația dreptei determinată de două puncte**. Fie în planul axelor de coordonate punctele $P_1(x_1, y_1)$ și $P_2(x_2, y_2)$. Atunci ecuația dreptei care trece prin cele două puncte date poate fi scrisă sub forma:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.7)$$

Cu relația (2.7) putem să scriem și condiția de coliniaritate a 3 puncte, înlocuind coordonatele celui de al treilea punct în prima linie a determinantului:

$$\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2.8)$$

De asemenea, putem determina **aria unui triunghi** ale cărui vârfuri se află în planul xOy :

$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\Delta|, \quad \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

□ **Exemplul 2.11:**

- a) Să se determine ecuația dreptei ce trece prin punctele de coordonate $A(1, -1)$ și $B(4, 2)$.
 b) Să se verifice dacă punctul $C(2, -3)$ aparține dreptei (AB) iar în caz negativ, să se determine aria triunghiului ABC .

Rezolvare: Scriem ecuația dreptei sub formă de determinant și obținem succesiv, aplicând regula triunghiului:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x + 2 + 4y + 4 - 2x - y = 0 \Rightarrow 3y = 3x - 6 : 3 \Rightarrow y = x - 2.$$

□

2.3. Inversa unei matrici

În numeroase aplicații ale matricelor se utilizează inversa unei matrice, pe care o vom defini în continuare.

□ **Definiția 2.16:** Fie o matrice pătratică de ordinul n , $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Matricea A se numește **inversabilă**, dacă există matricea B de ordinul n , cu proprietatea: $A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Matricea B se numește **inversa** matricii A și se notează: $B = A^{-1}$.

Rezultă imediat: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$ și se poate arăta că inversa unei matrice, dacă există, este unică.

□ **Propoziția 2.5:** Matricea pătratică de ordinul n , $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este inversabilă dacă și numai dacă $\det(A) \neq 0$. În acest caz, A este o matrice nesingulară.

Algoritmul de calcul al inversei unei matrice este prezentat în continuare.

Se consideră matricea pătratică de ordinul n , $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$.

Pasul 1. Se calculează determinantul matricii $\det(A)$. Dacă $\det(A) \neq 0$ atunci matricea este inversabilă și se trece la Pasul 2.

Pasul 2. Se determină **transpusa** matricii A :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Pasul 2. Se determină **matricea adjunctă** A^* formată din complemenții algebrici ai matricii A^T :

$$A^* = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\det(A_{11}) & (-1)^{2+1}\det(A_{21}) & \dots & (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) \\ (-1)^{1+2}\det(A_{12}) & (-1)^{2+2}\det(A_{22}) & \dots & (-1)^{n+2}\det(A_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1}\det(A_{1n}) & (-1)^{2+n}\det(A_{2n}) & \dots & (-1)^{n+n}\det(A_{nn}) \end{pmatrix},$$

unde A_{ij} este minorul de ordin $n-1$ al elementului a_{ij} , rezultat prin eliminarea liniei i și a coloanei j din matricea A^T .

Pasul 4. Se determină **matricea inversă** A^{-1} cu relația:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*. \quad (2.11)$$

□ **Exemplul 2.12:** Să se calculeze inversa matricei de ordinul 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Aplicăm algoritmul descris anterior și avem:

Pasul 1. Determinantul lui A este: $\det(A) = -1 \neq 0$, deci există inversă.

Pasul 2. Matricea transpusă a lui A este:

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & -3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Pasul 2. Determinăm complementenții algebrici matricei A^T :

$$(-1)^{1+1}\det(A_{11}) = \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - 3 \cdot (-3) = 1;$$

$$(-1)^{1+2}\det(A_{12}) = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -[1 \cdot (-2) - 3 \cdot 1] = 5;$$

Continuăm procedeul și obținem matricea adjunctă:

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 5 & -8 & -2 \\ -7 & 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

Pasul 4. Determinăm matricea inversă A^{-1} împărțind termenii matricei adjuncte la valoarea determinantului matricei A . Obținem matricea inversă:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{pmatrix}.$$

Pentru verificare, se poate utiliza relația $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_3$.

□

2.4 Rangul unei matrici

În paragraful 2.1 a fost introdusă noțiunea de minor al unei matrici pătratică. Noțiunea poate fi extinsă la o matrice oarecare. Fie $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$, o matrice de ordin $m \times n$.

□ **Definiția 2.17:** Se numește **minor de ordin r** al elementului a_{ij} determinantul matricei pătratică de ordin r , rezultate prin eliminarea din matricea A a $m - r$ linii și a $n - r$ coloane.

□ **Definiția 2.18:** Se numește **rangul** matricei A un număr natural r cu proprietățile:

- în matrice există cel puțin un minor de ordinul r diferit de zero.
- toți minorii de ordinul $r + 1$ sunt nuli.

□ **Observație 2.2:**

- Rangul unei matrice reprezintă ordinul celui mai mare minor nenul.
- Se demonstrează că dacă toți minorii de ordinul $r + 1$ sunt nuli, atunci sunt nuli și toți minorii de ordin mai mare ca $r + 1$.

□ **Exemplul 2.13:** Să se determine rangul matricei:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Rezolvare: Folosind Exemplul 2.9 avem $\det(A) = 11$ și astfel, există un minor de ordin 3 (maxim) nenul,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

prin urmare rangul matricei este 3. □

□ **Exemplul 2.14:** Să se determine rangul matricei: □

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Rezolvare: Deoarece $\det(A) = 0$, rangul matricei este cel mult egal cu 2. Se observă că minorul de ordin 2 din colțul N-V al matricei, respectiv $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$ este nenul fiind egal cu -5 . Așadar, conform definiției, rangul matricei este 2. □

□ **Exemplul 2.15:** Să se determine rangul matricei: □

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

Rezolvare: Deoarece matricea *nu* este pătratică ($m = 2, n = 3$), nu se poate calcula determinantul său. Mai mult, minorii de ordin 2

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}$$

sunt toți nuli, prin urmare rangul matricei este egal cu 1, deoarece cel puțin un element al matricei A este nenul. □

2.5 Transformări elementare

Alături de principalele operații cu matrici (adunarea, scăderea sau produsul a două matrici, amplificarea cu un număr real a unei matrici), există și alte operații (transformări) ce se pot face asupra elementelor unei matrici, operații ce presupun înmulțirea matricii date cu o matrice având o formă particulară. Mai mult, aceste transformări au proprietatea că nu modifică rangul matricii date. RTC este un procedeu folosit în diferite aplicații ce implică calculul matricial și presupune folosirea operațiilor amintite anterior.

Fie matricea $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ de ordin $m \times n$ și I_m matricea unitate de ordin m .

□ **Definiția 2.19:** Se numește **transformare elementară** aplicată unei matrici una din următoarele operații (transformări):

- (T_1) înmulțirea unui linii cu un număr real nenul. Vom nota $L_I \rightarrow \alpha \cdot L_I$ și citim: elementele liniei I se înmulțesc cu α , pentru $\alpha \in \mathbb{R}$,

- (T_2) permutarea a două linii/coloane. În cazul a două linii L_I, L_J , vom nota $L_I \leftrightarrow L_J$ și citim: elementele liniei I se schimbă cu elementele liniei J ,

- (T_3) adăugarea la elementele unei linii I a elementelor altei linii J . Vom nota $L_I \rightarrow L_I + L_J$ și citim: la elementele liniei I se adaugă elementele liniei J .

Operațiile $(T_i), i = \overline{1,3}$ presupun înmulțirea la stânga a matricii A cu o matrice obținută din matricea I_m după cum urmează:

- matricea de înmulțire (T_1) este $T_I(\alpha) = \begin{cases} a_{ii} = 1, & i \neq I \\ a_{II} = \alpha \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$
- matricea de permutare (T_2) este $T_{I,J} = \begin{cases} a_{ii} = 1, & i \neq I \text{ sau } i \neq J \\ a_{IJ} = a_{JI} = 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$
- matricea de adunare (T_3) este $T_{IJ}(\alpha) = \begin{cases} a_{ii} = 1, \\ a_{IJ} = \alpha & (I,J) \neq (1,1). \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$

□ **Observația 2.3:**

1. Detaliat, matricile celor trei transformări arată astfel:

$$T_I(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \leftarrow I(\text{linia } I) \quad (2.12)$$

↑
 $I(\text{coloana } I)$

$$T_{IJ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow I(\text{linia } I) \\ \leftarrow J(\text{linia } J) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ I(\text{coloana } I) & J(\text{coloana } J) \end{matrix} \quad (2.13)$$

$$T_{IJ}(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \alpha & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow I(\text{linia } I) \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow \\ J(\text{coloana } J) \end{matrix} \quad (2.14)$$

□ **Propoziția 2.6:** Matricile transformărilor elementare, $T_I(\alpha)$, T_{IJ} , $T_{IJ}(\alpha)$ satisfac următoarele proprietăți:

- $\det T_I(\alpha) = \alpha \neq 0$,
- $\det T_{IJ} = -1 \neq 0$,
- $\det T_{IJ}(\alpha) = 1 \neq 0$.

Din propoziția anterioară se observă că matricile transformărilor elementare au rangul m și sunt inversabile. Are loc

□ **Propoziția 2.7:** Inversele matricilor transformărilor elementare $T_I(\alpha)$, T_{IJ} , $T_{IJ}(\alpha)$ sunt:

- $[T_I(\alpha)]^{-1} = T_I\left(\frac{1}{\alpha}\right)$,
- $[T_{IJ}]^{-1} = T_{IJ}$,
- $[T_{IJ}(\alpha)]^{-1} = T_{IJ}(-\alpha)$.

□ **Teorema 2.1:** Transformările elementare nu modifică rangul unei matrice.

□ **Definiția 2.20 :** Matricile $T_I(\alpha)$, T_{IJ} , $T_{IJ}(\alpha)$ se numesc **matrici elementare**.

□ **Teorema 2.2:** Fie două matrici A și B . Dacă matricea B se obține prin aplicarea a k transformări elementare asupra matricei A , atunci putem scrie

$$B = T_1 * T_2 * \dots * T_k * A$$

unde matricile T_i , $i = \overline{1, k}$ sunt matricile asociate transformărilor efectuate asupra lui A .

□ **Observație 2.4** Dacă matricea A este inversabilă și considerăm în teorema 2.2 matricea $B = I_n$, atunci $A = T_1 * T_2 * \dots * T_k$.

□ **Definiția 2.21 :** Două matrici A și B care se obțin una din alta prin transformări elementare se numesc **echivalente** (în privința rangului) și scriem $A \sim B$.

2.6. Reducerea în treaptă pe coloană a unei matrice (RTC)

Un procedeu de obținere a unei matrice de formă Gauss-Jordan este RTC, metodă care se realizează cu ajutorul transformărilor elementare.

Fie matricea $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ de ordin $m \times n, m < n$. Vom nota cu L_i linia i a lui A (adică elementele de pe linia i).

□ **Definiția 2.22 :** Spunem că matricea A are **forma Gauss-Jordan** dacă conține cel mult m coloane ale matricei unitate I_m .

□ **Teorema 2.3:** Orice matrice nenulă poate fi adusă la forma Gauss-Jordan, printr-un număr finit de transformări elementare.

□ **Definiția 2.23 :** Se numește **pivot** al liniei L_i , un element nenul, ales arbitrar sau după o anumită regulă. Se numește **pivotaj** cu element pivot a_{ij} , ansamblul transformărilor elementare necesare transformării matricei A într-o matrice ce va avea coloana j astfel: elementul de pe poziția i, j egal cu 1 iar restul elementelor egale cu 0.

□ **Observație 2.5** Pivotajul presupune transformarea coloanei j a matricii inițiale într-o coloană din matricea unitate de ordinul m .

□ **Definiția 2.24 :** Se numește **lider** al liniei L_i , primul element nenul egal cu 1.

Metoda RTC presupune următoarele reguli:

- Pentru o linie, liderul va fi situat pe o coloană la dreapta față de liderul aflat pe linia anterioară. Excepție face prima linie.
- Elemente situate pe coloana liderului sunt egale cu zero.
- Liniile nule ale matricei sunt situate pe ultimele poziții în matrice.

Din cele expuse până acum deduce următorul **algoritm pentru RTC**:

Pasul 1. Notăm cu l indicele de linie al viitorului lider, având valoarea inițială $l = 1$ și alegem prima coloană cu elemente nenule. Fie i indice de parcurgere pe coloană.

Pasul 2. Determinarea un lider.

- a) Dacă elementul a_{li} este lider (linia liderului este aceeași cu coloana sa), atunci se trece la pasul următor.
- b) Dacă există $i \in \{1, \dots, m\}$ astfel încât elementul a_{li} este lider, $l \neq i$ (linia liderului este diferită de coloana sa), atunci inversăm (permutăm) linia i cu linia l .
- c) Dacă nu există $i \in \{1, \dots, m\}$ astfel încât elementul a_{li} să fie lider, atunci alegem un **pivot** și împărțim elementele liniei la pivot (sau, echivalent, înmulțim elementele liniei pivotului cu inversul acestuia). Ulterior permutăm linia pivotului și linia l .

Pasul 3. Construirea zerourilor pe coloana liderului.

Selectăm un element nenul diferit de lider. El va deveni 0 adunând la linia sa (elementele situate pe linia acestuia) elementele situate pe linia liderului l înmulțite cu opusul elementului selectat. Repetăm procedeul cu celelalte elemente de pe coloana liderului.

Pasul 4. Selectăm o coloană nenulă situată la dreapta față de coloana liderului crescând valoarea indicelui $l: l \rightarrow l + 1$. Se revine apoi la **Pasul 2**.

□ **Exemplul 2.16:** Să se reducă în treaptă pe coloană matricea de ordinul 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Există mai multe variante de reducere în treaptă a unei matrici date.

Varianta 1 : liderul se află pe o linie oarecare diferită de linia 1 a matricii:

---ITERAȚIA 1---

Pasul 1. Alegem prima coloană și respectiv $l = 1$.

Pasul 2. Elementul $a_{11} = 2$ nu este lider. Există $i = 2$ sau $i = 3$ astfel încât $a_{21} = a_{31} = 1$. Alegem liderul $a_{31} = 1$, permutând apoi linia 3 cu linia 1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ \boxed{1} & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Pasul 3. Vom transforma în 0 elementele $a_{21} = 1$ și $a_{31} = 2$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow (-1) \cdot L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ -1 + 1 & -4 + (-3) & -3 + (-2) \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \rightarrow L_3 + (-2) \cdot L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 2 + (-2) \cdot 1 & 5 + (-2) \cdot (-3) & 4 + (-2) \cdot (-2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Pasul 4. Deoarece prima coloană este finalizată, ne mutăm la cea de-a doua coloană.

---ITERAȚIA 2---

Pasul 2 Deoarece elementele de pe această coloană sunt diferite de 1, vom alege pivotul $a_{22} = -7$ și vom împărți linia $l = 2$ la pivot

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{-7} & -5 \\ 0 & 11 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \rightarrow (-\frac{1}{7}) \cdot L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \\ 0 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

obținând astfel liderul $a_{22} = 1$.

Pasul 3. Vom transforma în 0 elementele $a_{12} = -3$ și $a_{32} = 11$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \\ 0 & 11 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + 3 \cdot L_2 \\ L_3 \rightarrow L_3 + (-11) \cdot L_2 \end{array}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Pasul 4. Deoarece a doua coloană este finalizată, ne mutăm la cea de-a treia coloană.

---ITERAȚIA 3---

Pasul 2 Deoarece elementele de pe această coloană sunt diferite de 1, vom alege pivotul $a_{33} = \frac{1}{7}$ și vom împărți linia $l = 3$ la pivot

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{1}{7}} \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \rightarrow \frac{1}{7} \cdot L_3} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

și am obținut astfel liderul $a_{33} = 1$.

Pasul 3 Vom transforma în 0 elementele $a_{13} = \frac{1}{7}$ și $a_{32} = \frac{5}{7}$:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & \boxed{1} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{array}{l} L_1 \rightarrow L_1 + (-\frac{1}{7}) \cdot L_3 \\ L_2 \rightarrow L_2 + (-\frac{5}{7}) \cdot L_3 \end{array}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}.$$

Deoarece am obținut matricea unitate, care este o matrice în treaptă, algoritmul s-a încheiat.

Varianta 2 : transformarea elementului a_{11} în lider:

---ITERAȚIA 1---

Pasul 1. Alegem prima coloană și prima linie ($l = 1$).

Pasul 2. Alegem pivotul $a_{11} = 2$.

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \rightarrow \frac{1}{2} \cdot L_1} \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{5}{2} & \frac{4}{2} \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \frac{5}{2} & 2 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Continuarea algoritmului este similară celor prezentate anterior. □

Algoritmul RTC are diverse aplicații precum calculul inversei unei matrici pătratice, rezolvarea sistemelor liniare etc. Procedul este uneori mai avantajos de aplicat decât metodele clasice, nemaifiind necesare calcule suplimentare.

Fie matricea pătratică de ordinul n , $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$. Algoritmul pentru calcularea inversei matricii A prin RTC constă din următorii pași:

Pasul 1. Se formează matricea extinsă $(A|I_n)$, unde I_n este matricea unitate de ordinul n .

Pasul 2. Pentru matricea extinsă $(A|I_n)$ se aplică operațiile elementare până când se obține o matrice extinsă de forma $(I_n|B)$, respectiv până când în partea stângă a matricii extinse se obține matricea unitate.

Pasul 3. Matricea B obținută în partea dreaptă a matricii extinse este matricea inversă a lui A . Să remarcăm faptul că dacă A nu are inversă, în partea stângă a matricii extinse $(A|I_n)$ vom obține o linie cu zerouri.

□ **Exemplul 2.17:** Să se calculeze inversa matricii de ordinul 3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Rezolvare: Aplicăm algoritmul descris anterior și avem:

Pasul 1. Matricea extinsă $(A|I_3)$, este:

$$(A|I_3) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Pasul 2. În matricea extinsă $(A|I_3)$ aplicăm succesiv operațiile elementare și obținem :

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\begin{array}{l} L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \rightarrow L_3 - L_1 \end{array}} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2 \rightarrow -\frac{1}{3}L_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} \overline{L_1 \rightarrow L_1 - 4L_2} \\ L_3 \rightarrow L_3 + 7L_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & \boxed{1} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \frac{11}{3} & 1 \end{array} \right)$$

$$\overline{L_3 \rightarrow -3L_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -11 & -3 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \overline{L_1 \rightarrow L_1 - \frac{1}{3}L_3} \\ L_2 \rightarrow L_2 - \frac{2}{3}L_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 7 & -11 & -3 \end{array} \right).$$

Pasul 3. Matricea obținută în partea dreaptă a matricei extinse este matricea inversă a lui A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{pmatrix}.$$

□

2.7 Sisteme de ecuații liniare

Un sistem de m ecuații algebrice liniare cu n necunoscute (de tip $m \times n$), $m < n$, se prezintă sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (2.15)$$

unde a_{ij}, b_i ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$) sunt numere reale. Atunci **matricea coeficienților** sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

vectorul necunoscutelor sistemului este:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n), \quad (2.17)$$

iar vectorul termenilor liberi este:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

□ **Definiția 2.25:** Dacă există $b_i \neq 0$ atunci, sistemul se numește **neomogen**, în caz contrar ($b_i = 0, i = \overline{1, m}$), el se numește **omogen**.

□ **Definiția 2.26:** Matricea

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (2.19)$$

se numește **matricea extinsă** a sistemului (2.6).

Presupunem că matricea A are rangul $r \leq m$. Prin transformări elementare, matricea A poate fi adusă la forma Gauss-Jordan

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1j_{r+1}} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2j_{r+1}} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{rj_{r+1}} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \right) \cdot \quad (2.20)$$

$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ j_1 & j_2 & j_r \end{array}$

Sistemul corespunzător matricei \bar{A} este

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{j_1} + \tilde{a}_{1j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n = \tilde{b}_1 \\ x_{j_2} + \tilde{a}_{2j_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n = \tilde{b}_2 \\ \vdots \\ x_{j_r} + \tilde{a}_{rj_{r+1}}x_{j_{r+1}} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n = \tilde{b}_r \\ 0 = \tilde{b}_{r+1} \\ \vdots \\ 0 = \tilde{b}_m \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Deoarece matricele \bar{A} și \tilde{A} sunt echivalente, sistemele (2.15) și (2.21) vor fi echivalente (adică vor avea aceleași soluții). Pentru aceasta, este suficient să observăm că transformările elementare aplicate liniilor matricei \bar{A} pentru a fi adusă la forma \tilde{A} , au drept consecințe asupra sistemului de ecuații, după cum urmează:

- (T_1) – înmulțirea unei ecuații cu un număr diferit de zero;
- (T_2) – adunarea la o ecuație a unei alte ecuații (eventual înmulțită cu un scalar nenul);
- (T_3) – schimbarea a două ecuații între ele.

Evident, aceste operații aplicate unui sistem de ecuații îl transformă în unul echivalent.

□ **Teorema 2.4:** Condiția necesară și suficientă ca sistemul (2.15) să fie compatibil este ca $b_i = 0, i = \overline{r+1, m}$.

2.8. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Pentru sistemele de dimensiuni mai mari, începând de la sistemele 3×3 , metodele prezentate nu mai sunt eficiente și de aceea vom discuta în continuare metodele matriciale de rezolvare a sistemelor și anume: **regula lui Cramer**, **metoda Gauss–Jordan** și **metoda matricii inverse**.

Fie sistemul de tip $n \times n$, de forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.15')$$

Atunci **matricea coeficienților** sistemului este:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad (2.16')$$

vectorul necunoscutelor sistemului este:

$$\bar{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n),$$

iar vectorul termenilor liberi este:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.18')$$

Atunci sistemul (2.15') poate fi scris sub forma unei **ecuații matriciale**:

$$A \cdot x = B. \quad (2.22)$$

Regula lui Cramer utilizează determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.23)$$

Dacă $\Delta \neq 0$ atunci **sistemul este compatibil determinat** și are soluție unică.

Pentru calculul soluției se calculează mai întâi determinanții obținuți din înlocuirea coloanelor matricii coeficienților sistemului cu vectorul coloană al termenilor liberi:

$$\Delta x_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & \boxed{b_1} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & \boxed{b_2} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & \boxed{b_n} \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.24)$$

Soluția sistemului este dată de:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} \\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} \\ \vdots \\ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta} \end{cases} \quad (2.25)$$

□ **Exemplul 2.18:** Să se rezolve cu regula lui Cramer sistemul 3×3 :

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 1. \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Rezolvare: Calculăm mai întâi determinantul sistemului:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 28 \neq 0.$$

Sistemul este compatibil determinat și calculăm determinanții:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 13, \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 47, \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 21.$$

Rezultă soluțiile sistemului:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{13}{28}, \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{47}{28}, \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}.$$

□

Metoda de eliminare Gauss – Jordan constă în aplicarea metodei RTC asupra matricei extinse a sistemului până când, în locul matricei sistemului, se obține matricea unitate. Valorile obținute pe ultima coloană a matricei extinse reprezintă soluțiile sistemului.

□ **Exemplul 2.19:** Să se rezolve cu metoda Gauss – Jordan sistemul 4×4 :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -16 \end{cases}$$

Rezolvare: Construim matricea extinsă și apoi aplicăm operațiile elementare pentru a obține matricea unitate. Rezultă succesiv:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & -2 & 12 \\ 1 & 1 & -4 & 5 & -16 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \overline{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \\ \overline{L_3 \rightarrow L_3 - L_1} \\ \overline{L_4 \rightarrow L_4 - L_1} \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -22 \end{array} \right)$$

$$\overline{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -22 \end{array} \right)$$

$$\overline{L_3 \rightarrow \frac{1}{2}L_3} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 & -22 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \overline{L_1 \rightarrow L_1 - 2L_3} \\ L_2 \rightarrow L_2 + L_3 \\ L_4 \rightarrow L_4 + 5L_3 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 0 & 7 & 8 \\ 01 & 0 & -3 & -5 \\ 00 & \boxed{1} & -2 & 3 \\ 00 & 0 & -7 & -7 \end{array} \right)$$

$$\overline{L_4 \rightarrow -\frac{1}{7}L_4} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 7 & & 8 \\ 010 & -3 & & -5 \\ 001 & -2 & & 3 \\ 000 & \boxed{1} & & 1 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \overline{L_1 \rightarrow L_1 - 7L_4} \\ L_2 \rightarrow L_2 + 3L_4 \\ L_3 \rightarrow L_3 + 2L_4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 100 & 0 & & 1 \\ 010 & 0 & & -2 \\ 001 & 0 & & 5 \\ 000 & \boxed{1} & & 1 \end{array} \right)$$

Astfel soluția sistemului este $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 5, x_4 = 1$. □

Metoda de rezolvare funcționează și atunci când sistemul nu are soluție unică, obținându-se, în urma aplicării RTC, zerouri într-una din liniile matricei extinse. Pe baza matricei extinse obținem un nou sistem de ecuații, în care unele din variabile vor fi luate ca parametri. Obținem în cele din urmă un sistem compatibil nedeterminat, cu o infinitate de soluții.

□ **Exemplul 2.20:** Să se studieze compatibilitatea sistemului, iar în caz afirmativ, să se precizeze soluția (utilizând metoda Gauss – Jordan):

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ -x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = -3 \end{cases}$$

Rezolvare: Construim matricea extinsă și apoi aplicăm operațiile elementare pentru a obține matricea unitate. Rezultă succesiv:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 3 & -3 & 5 \\ -1 & 3 & -5 & 5 & -3 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} \overline{L_2 \rightarrow L_2 - L_1} \\ L_3 \rightarrow L_3 - 3 * L_1 \\ L_4 \rightarrow L_4 + L_1 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & 3 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 & -2 \end{array} \right)$$

$$\overline{L_2 \rightarrow \frac{1}{-2}L_2} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & -4 & 6 & -6 & 2 \\ 0 & 4 & -6 & 6 & -2 \end{array} \right)$$

$$\begin{array}{l} \overline{L_1 \rightarrow L_1 - L_2} \\ L_3 \rightarrow L_3 + 4L_2 \\ L_4 \rightarrow L_4 - 4L_2 \end{array} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & \boxed{1} & -3/2 & 3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistemul considerat este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4 = \frac{3}{2} \\ x_2 - \frac{3}{2}x_3 + \frac{3}{2}x_4 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

care este compatibil, având soluția

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\beta \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha - \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 = \alpha, x_4 = \beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad \square$$

Există și sisteme de ecuații ce nu admit soluții. Acestea se numesc **incompatibile**.

□ **Exemplul 2.21:** Să se studieze compatibilitatea sistemului, iar în caz afirmativ, să se precizeze soluția (utilizând metoda Gauss – Jordan):

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 6x_3 + x_4 = 10 \end{cases} .$$

Rezolvare: În urma unor pivotaje cu elemente pivot încadrate într-un pătrat, matricea extinsă a sistemului devine:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 6 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & \boxed{3} & 4 & 3 & 5 \\ 0 & 9 & 12 & 9 & 14 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/3 & 2 & -4/3 \\ 0 & 1 & 4/3 & 1 & 5/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

Deoarece $b_3 = -1 \neq 0$, sistemul este incompatibil. □

În final, o altă metodă de rezolvare a sistemelor liniare este cea a ecuațiilor matriceale. Am văzut că sistemul (2.15') poate fi scris sub forma unei ecuații matriceale (2.22) $A \cdot X = B$. Înmulțind, în ambii membri ai acestei ecuații, cu matricea inversă a matricei coeficienților sistemului, A^{-1} , obținem vectorul X , soluție a sistemului:

$$A \cdot X = B \quad \underset{stg}{A^{-1}} \Rightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B. \quad (2.26)$$

□ **Exemplul 2.22:** Să se rezolve cu ajutorul ecuațiilor matriceale sistemul de ecuații liniare de tip 3×3 :

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$$

Rezolvare: Matricea coeficienților sistemului A , vectorul necunoscutelor X și vectorul termenilor liberi B sunt, respectiv:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

În Exemplul 2.17 am calculat inversa matricei coeficienților sistemului A^{-1} , obținând:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{pmatrix}.$$

Atunci, aplicând relația (2.26) obținem ecuația matriceală:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -5 & 8 & 2 \\ 7 & -11 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

În membrul stâng obținem prin înmulțirea matricea unitate de ordinul 3, iar în membrul drept efectuăm înmulțirea matricelor și obținem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Am obținut astfel soluția sistemului:

$$x_1 = 3, x_2 = -2, x_3 = 2.$$

□

2.9. Explicitarea sistemelor de ecuații liniare

Fie sistemul (2.15').

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Presupunem că rangul matricei A este m , $m < n$.

□ **Definiția 2.27:** Vom spune că sistemul (2.6) este **explicitat în raport cu un grup de m variabile** (necunoscute), dacă în matricea A a sistemului, coloanele acestor variabile sunt cele m coloane ale matricei unitate de ordinul m .

Se știe că din cele n variabile ale sistemului, putem forma C_n^m grupuri diferite de câte m variabile. Din acest motiv, rezultă că un sistem liniar, care poate fi explicitat în raport cu cel puțin un grup de m variabile, va avea cel mult C_n^m forme explicite. Acest număr maxim va fi atins dacă explicitarea poate avea loc în raport cu oricare dintre cele C_n^m grupuri diferite de câte n variabile și toate formele explicite sunt distincte.

Definiția 2.27 împarte variabilele unui sistem liniar explicitat în două categorii: unele, ai căror coeficienți formează coloanele matricei unitate (denumite **variabile principale**), altele ai căror coeficienți formează celelalte coloane ale matricei sistemului (**variabile secundare**). În teoria programării liniare variabilele principale mai sunt denumite **bazice**, iar variabilele secundare **nebazice**.

□ **Definiția 2.28.** Numim **soluție de bază** a unui sistem de ecuații liniare, o soluție particulară obținută dintr-o formă explicită, prin egalarea cu zero a variabilelor secundare.

Din definiția dată rezultă că, dacă sistemul este compatibil nedeterminat, atunci are cel puțin o soluție de bază și cel mult C_n^m soluții de bază. Evident, sistemele incompatibile și cele compatibil determinate nu au soluții de bază.

Dacă o soluție de bază are exact m componente nenule, atunci soluția de bază se numește **nede generată**, iar dacă are mai puțin de m componente nenule se numește soluție de bază **de generată**.

Soluțiile de bază ale unui sistem liniar se clasifică și după un alt criteriu. Dacă toate componentele unei soluții de bază au valori nenegative (≥ 0), soluția de bază se numește **admisibilă**. În caz contrar, soluția de bază se numește **neadmisibilă** (are componente strict negative).

Să considerăm că $r = m$. În acest caz din (2.23) obținem o soluție de bază

$$x_{j_1} = \tilde{b}_1, x_{j_2} = \tilde{b}_2, \dots, x_{j_m} = \tilde{b}_m \text{ restul până la } n \text{ sunt nule.}$$

Presupunem că $a_{IJ} \neq 0$, unde $J = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$. Se dorește ca variabila principală x_{j_1} să devină secundară, iar variabila secundară x_J să devină principală.

Efectuând în matricea \tilde{A} un pivotaj cu element pivot a_{IJ} , se obține o nouă soluție de bază:

$$x_{j_1} = \tilde{b}_1 - \tilde{a}_{1J} \frac{\tilde{b}_I}{\tilde{a}_{IJ}}, x_{j_2} = \tilde{b}_2 - \tilde{a}_{2J} \frac{\tilde{b}_I}{\tilde{a}_{IJ}}, \dots, x_{j_m} = \tilde{b}_m - \tilde{a}_{mJ} \frac{\tilde{b}_I}{\tilde{a}_{IJ}}$$

iar restul până la n sunt egale cu 0.

Variabilele principale se pot scrie astfel:

$$\begin{cases} x_{j_k} = \tilde{b}_k - \tilde{a}_{kJ} \frac{\tilde{b}_I}{\tilde{a}_{IJ}}, & k \neq J \\ x_J = \frac{\tilde{b}_I}{\tilde{a}_{IJ}}, & k = J. \end{cases} \quad (2.27)$$

□ **Exemplul 2.23** Să se determine toate formele explicite și soluțiile de bază corespunzătoare pentru sistemul:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Matricea extinsă a sistemului este:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right).$$

Avem următoarele pivotaje:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{b) } \left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{c) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{d) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{-1} & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\text{e) } \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

care conduc la formele explicite în raport cu grupurile:

$$(x_1, x_4), (x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_4), (x_3, x_4)$$

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x_1 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_2 + x_4 = 2 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

Soluțiile de bază vor fi:

$(S_1) x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$ soluție de bază degenerată admisibilă

$(S_2) x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0$ soluție de bază nedegenerată admisibilă

$(S_3) x_1 = 0, x_2 = 2, x_3 = 2, x_4 = 0$ soluție de bază nedegenerată admisibilă

$(S_4) x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$ soluție de bază degenerată admisibilă

$(S_5) x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2$ soluție de bază degenerată admisibilă .

Sistemul nu poate fi explicitat în raport cu grupul de variabile (x_1, x_3) și admite doar trei soluții de bază distincte din numărul maxim de $C_4^2 = 6$ posibilități.

□

Aplicații propuse

Utilizând lema substituției, să se rezolve următoarele exerciții propuse:

□ **A2.1** Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (3, 4)$ în baza $B = \{\bar{e}_1 = (2, 1), \bar{e}_2 = (-1, 2)\}$.

□ **A2.2** Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (4, -3)$ în baza $B = \{\bar{e}_1 = (1, 3), \bar{e}_2 = (-2, 1)\}$.

□ **A2.3** Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B' , unde $B = \{\bar{e}_1 = (1, 3), \bar{e}_2 = (-2, 1)\}$, $B' = \{\bar{e}_1 = (2, 1), \bar{e}_2 = (-1, 2)\}$.

□ **A2.4** Să se determine matricea de trecere de la baza B' la baza B , unde $B = \{\bar{e}_1 = (1, 3), \bar{e}_2 = (-2, 1)\}$, $B' = \{\bar{e}_1 = (2, 1), \bar{e}_2 = (-1, 2)\}$.

□ **A2.5** Verificați că matricile de la ultimele două exerciții sunt una inversa celeilalte.

□ **A2.6** Să se determine inversa matricii: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

□ **A2.7** Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (4, -3, 2)$ în baza B din R^3 , unde $B = \{\bar{e}_1 = (1, -2, 2), \bar{e}_2 = (2, 1, 0), \bar{e}_3 = (2, 0, -1)\}$.

Unitatea de învățare III

Spații vectoriale euclidiene

Cuprins

3.1. Spații vectoriale. Definiție. Exemple	40
3.2. Liniar independență și liniar dependență	41
3.3. Bază. Dimensiune	43
3.4. Schimbarea bazei	46
3.5. Lema substituției	50
3.6. Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale	58
3.7. Spații vectoriale euclidiene și unitare	60
3.8. Dreaptă de regresie	61
Aplicații propuse	62

3.1. Spații vectoriale. Definiție. Exemple

Fie V o mulțime nevidă, ale cărei elemente se notează cu litere latine a, b, c, \dots și fie K un corp comutativ (câmp), ale cărui elemente se notează prin litere grecești $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. Se introduc două operații astfel:

- o lege de compoziție internă pe V , „+” : $V \times V \rightarrow V$, definită prin relația $(x, y) \rightarrow x + y$
- și o lege de compoziție externă pe V în raport cu K , definită prin relația $(\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$ (sau, pentru simplificarea expunerii, $(\alpha, x) \rightarrow \alpha x$).

□ **Definiția 3.1.** Un ansamblu $(V, +, \cdot, K)$, se numește *spațiu vectorial* peste corpul K , sau *spațiu liniar* peste K , sau K -spațiu vectorial (liniar), dacă:

I. Perechea $(V, +)$ este un grup abelian.

II. Operația „ \cdot ” satisface următoarele patru axiome:

1. Oricare ar fi $\alpha \in K$ și pentru orice $x, y \in V$ rezultă $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.
2. Oricare ar fi $\alpha \in K$ și pentru orice $x \in V$ rezultă $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$.
3. Oricare ar fi $\alpha \in K$ și pentru orice $x \in V$ rezultă $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.
4. Oricare ar fi $x \in V$, dacă 1 este elementul identitate al lui K , atunci $1 \cdot x = x$.

Elementele mulțimii V se vor numi *vectori*, iar elementele mulțimii K se vor numi *scalari*. Operația „+” va fi numită *adunarea vectorilor*, în timp ce operația „ \cdot ” va fi numită *înmulțirea cu scalari*.

□ **Exemple 3.1**

1. *Spații vectoriale aritmetice.* Fie $(K, +, \cdot, K)$ un câmp (corp comutativ) și $n \in \mathbf{N}$, iar

$$K^n = \underbrace{(K \times \dots \times K)}_{n \text{ ori}} = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in K, i = \overline{1, n}\},$$

pentru $n \geq 1$ și $K^0 = \{0\}$, (0 - elementul zero al lui K). Dacă, pentru elementele $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in K^n$ și $\alpha \in K$, se definesc operațiile „+” și „ \cdot ” prin

I. $\bar{x} + \bar{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ și

II. $(\alpha\bar{x}) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$,

atunci $(K^n, +, \cdot, K)$ este un K -spațiu vectorial numit *spațiul aritmetic (sau spațiul coordonatelor)*.

2. *Spații vectoriale de matrice.* Pentru un câmp $(K, +, \cdot, K)$ și $m, n \in K^*$, fie mulțimea matricelor de tip $m \times n$ (adică cu m linii și n coloane), cu componente din K , $M_{m \times n}(K)$

$$M_{m \times n}(K) = \{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in K, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}.$$

Dacă, pentru $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$ și $\alpha \in K$, se definesc operațiile „+” și „ \cdot ” prin:

I. $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$ și

II. $\alpha \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})$, atunci ansamblul $(M_{m \times n}(K), +, \cdot, K)$ este un K -spațiu vectorial, numit K -*spațiul vectorial al matricelor de tipul $m \times n$* .

3. *Spații vectoriale de polinoame.* Fie $R[X]$ mulțimea polinoamelor în nedeterminata X , cu coeficienți reali.

Dacă se consideră operația „+” ca fiind adunarea uzuală a polinoamelor din $R[X]$ și „ \cdot ” înmulțirea unui polinom din $R[X]$ cu elemente din R , se obține spațiul vectorial $(R[X], +, \cdot, R)$, numit *spațiul vectorial al polinoamelor peste corpul R* .

3.2. Liniar independență și liniar dependență

Fie V un K - spațiu vectorial și I - o mulțime de indici. Considerăm $\{x_i\}_{i \in I}$ o familie de vectori din V , adică $x_i \in V$, pentru orice $i \in I$, iar $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ o familie finită de scalari nenuli ($\alpha_i \neq 0$) - numită **familie de suport finit**.

□ **Definiția 3.2.** Se numește **combinație liniară** a vectorilor x_i cu familia de scalari $\{\alpha_i\}_{i \in I}$, suma $\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot x_i$.

□ **Definiția 3.3.** O submulțime $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, S \subset V$, se numește **sistem finit de generatori** pentru spațiul V , dacă oricare ar fi vectorul $x \in V$, există scalarii $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K$ astfel încât: $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot x_i$ (adică se poate spune că x este o combinație liniară de vectori ai submulțimii S).

Un spațiu vectorial se numește **finiț generat**, dacă există un sistem finit de generatori al său; în caz contrar, se numește **infiniț generat**.

□ Exemple 3.2

În spațiul $\mathbf{R}[X]$ al polinoamelor peste \mathbf{R} , se consideră sistemul $\{X^i\}_{i \in \mathbf{N}}, X^0 = 1$. Atunci orice polinom $p \in \mathbf{R}[X]$ este o combinație liniară a vectorilor sistemului $\{X^i\}$,

$$p = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X^1 + a_0 X^0.$$

$$\text{Fie familia } \square \{\alpha_i\}_{i \in \mathbf{N}} \subset \mathbf{R} \text{ astfel încât } \alpha_i = \begin{cases} a_i \text{ pentru } i = \overline{0, n} \\ 0 \text{ pentru } i \geq n + 1. \end{cases}$$

Se obține: $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot X^i = \sum_{i=0}^n \alpha_i \cdot X^i = p(X)$.

Deci spațiul $\mathbf{R}[X]$ este un spațiu vectorial infiniț generat, pe când spațiul vectorial real $\mathbf{R}_n[X]$ al polinoamelor de grad n , este finiț generat deoarece există, de exemplu, sistemul finit de generatori $S = \{1, X^1, X^2, \dots, X^n\}$ al spațiului $\mathbf{R}_n[X]$. □

□ **Definiția 3.4.** Fie V un K - spațiu vectorial și $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset V$ o familie de vectori din V . Mulțimea S se numește **familie (mulțime) liniar independentă** dacă anularea unei combinații liniare implică anularea scalarilor, cu alte cuvinte pentru orice scalari $\{\alpha_i\}_{i \in I} \square$, din combinația liniară $\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot x_i = 0$ rezultă $\alpha_i = 0$, oricare ar fi $i \in I$ (evident $\{\alpha_i\}_{i \in I}$ este o familie de suport finit). O familie (mulțime) $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset V$ care nu este liniar independentă, se numește **liniar dependentă**, adică există combinații liniare nule fără ca toți scalarii să fie nuli, adică există scalarii $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subset K$, nu toți nuli, astfel încât $\sum_{i \in I} \alpha_i \cdot x_i = 0$.

□ Exemple 3.3

1. În $\mathbf{R}[X]$ familia $B = \{X^i\}_{i \in \mathbf{N}}$ este liniar independentă.

2. În spațiul aritmetic K^n , sistemul de vectori $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ în care

$$\bar{e}_i = \left(0, 0, \dots, \overset{i}{\underset{\sim}{1}}, 0, \dots, 0 \right),$$

este liniar independent.

3. În spațiul $M_{m \times n}(K)$ mulțimea $B = \{E_{ij}\}_{\substack{i=1, \overline{m} \\ j=1, \overline{n}}}$ este liniar independentă, unde

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} & & & j & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \rightarrow i$$

□ Exemple 3.4

În spațiul vectorial \mathbf{R}^3 se consideră vectorii:

$$\bar{x} = (1, 2, 3), \bar{y} = (2, 3, 1), \bar{z} = (a + 3, a + 1, a + 2), a \in \mathbf{R}.$$

Să se afle valorile parametrului a pentru care acești vectori sunt liniar dependenți și să se scrie relația de dependență liniară.

Soluție:

Pentru ca vectorii dați să fie liniari dependenți, trebuie să existe scalarii reali $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ nu toți nuli astfel încât să aibă loc relația:

$$\alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y} + \alpha_3 \bar{z} = 0,$$

sau

$$\alpha_1(1, 2, 3) + \alpha_2(2, 3, 1) + \alpha_3(a + 3, a + 1, a + 2) = 0$$

$$(\alpha_1, 2\alpha_1, 3\alpha_1) + (2\alpha_2, 3\alpha_2, \alpha_2) + ((a + 3)\alpha_3, (a + 1)\alpha_3, (a + 2)\alpha_3) = 0$$

$$(\alpha_1 + 2\alpha_2 + (a + 3)\alpha_3, 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + (a + 1)\alpha_3, 3\alpha_1 + \alpha_2 + (a + 2)\alpha_3) = 0$$

Se obține sistemul liniar și omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + (a + 3)\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + (a + 1)\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 + (a + 2)\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluții nenule dacă determinantul său

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & a + 3 \\ 2 & 3 & a + 1 \\ 3 & 1 & a + 2 \end{vmatrix} = -3(a + 6)$$

este nul. Deci pentru $a = -6$ vectorii dați sunt liniar dependenți. Pentru a afla relația de dependență liniară se înlocuiește $a = -6$ în sistemul de mai sus:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 - 5\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + \alpha_2 - 4\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Se exprimă α_1, α_2 în funcție de α_3 din primele două ecuații

$$\alpha_1 = \alpha_3; \alpha_2 = \alpha_3 \neq 0.$$

Înlocuind în combinația liniară și simplificând cu α_3 se obține relația de dependență liniară:

$$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z} = 0. \quad \square$$

Să considerăm cazul particular al unei familii finite de vectori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ din spațiul vectorial real \mathbf{R}^n , iar $X = (x_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ matricea care are pe coloane elementele vectorilor x_1, x_2, \dots, x_n . Următoarele rezultate de caracterizare a familiilor liniar independente sau dependente vor fi necesare în viitoare aplicații (de exemplu în cadrul lemei substituției).

□ Observația 3.1

1. Familia de vectori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R}^n$ este linear independentă dacă și numai dacă rangul matricei X are rangul n .

2. Familia de vectori $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathbf{R}^n$ este linear dependentă dacă și numai dacă matricea X are rangul k mai mic decât n . Mai mult, orice subfamilie a acestora care conține cel mult k vectori este liniar independentă.

3.3. Bază. Dimensiune

Fie V un K -spațiu vectorial și $B = \{x_i\}_{i \in I} \subset V$ o familie de vectori din V .

□ **Definiția 3.5.** Mulțimea B se numește **bază** a spațiului V dacă este o familie liniar independentă și dacă este un sistem de generatori pentru V .

□ **Teorema 3.1.** Fie $V \neq 0$ un K -spațiu vectorial finit generat. Toate bazele lui V sunt finite și au același număr de elemente.

□ **Definiția 3.6.** Se numește **dimensiune** a unui spațiu vectorial finit generat V , numărul de vectori dintr-o bază a lui, notat $\dim V$. Spațiul nul $\{0\}$ are dimensiunea zero. Un spațiu vectorial de dimensiune finită se numește spațiu vectorial **finițional**.

□ **Observația 3.2.** Dacă există o bază a spațiului cu o infinitate de vectori, atunci dimensiunea este ∞ și spațiul se numește **infinițional**.

2. Spațiile vectoriale finit dimensionale, de dimensiune n se mai notează V_n .

□ **Exemple 3.5**

1. Fie \mathbf{R}^n spațiul vectorial aritmetic. Vectorii

$$\bar{e}_1 = \left(\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0}_{n\text{-ori}} \right), \bar{e}_2 = \left(\underbrace{0, 1, 0, \dots, 0}_{n\text{-ori}} \right), \dots, \bar{e}_n = \left(\underbrace{0, 0, 0, \dots, 1}_{n\text{-ori}} \right),$$

determină o bază $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$.

Pentru a demonstra că mulțimea B este o mulțime liniar independentă relația

$$\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$$

este echivalentă cu $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = (0, 0, \dots, 0)$, adică $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Pe de altă parte oricare ar fi $x \in \mathbf{R}^n$, rezultă

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n, \quad (*)$$

deci B generează pe V .

Relația (*) arată că în raport cu baza canonică, componentele unui vector sunt exact elementele ce compun vectorul.

2. Spațiul vectorial $\mathbf{K}_n[X]$ al polinoamelor de grad n are dimensiunea $n + 1$, o bază fiind $B = \{1, X^1, X^2, \dots, X^n\}$, numită **bază canonică** din $\mathbf{K}_n[X]$.

Se observă că mulțimea B este liniar independentă: relația

$$\alpha_0 \bar{e}_0 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \dots + \alpha_n \bar{e}_n = \bar{0}$$

devine

$$\alpha_0 + \alpha_1 X^1 + \alpha_2 X^2 + \dots + \alpha_n X^n = 0$$

și astfel se obține

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

și în plus, orice polinom de grad n este o combinație liniară finită de elemente din B .

3. Spațiul vectorial $M_{m \times n}(\mathbf{K})$, al matricelor dreptunghiulare are dimensiunea $m \times n$. O bază este mulțimea mulțimea $B = \{E_{ij}\}_{\substack{i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,n}}}$, E_{ij} fiind matricea care are elementul 1 la intersecția

liniei i cu coloana j , celelalte elemente fiind nule (a se vedea **Exemple 3.3**).

4. Fie $\mathbf{K}[X]$ spațiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X . Polinoamele $1, X^1, X^2, \dots, X^n, \dots$ constituie o bază a lui $\mathbf{K}[X]$ și deci $\dim \mathbf{K}[X] = \infty$.

5. Mulțimea \mathbf{C} , în calitate de \mathbf{R} -spațiu vectorial, are o bază $B = \{1, i\}$ și deci $\dim_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = 2$, pe când mulțimea \mathbf{C} privită ca și \mathbf{C} -spațiu vectorial are pe $B = \{1\}$ ca bază și deci $\dim_{\mathbf{C}} \mathbf{C} = 1$. □

□ **Teorema 3.2.** Fie V un K -spațiu vectorial n -dimensional. Atunci $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază a sa dacă și numai dacă oricare ar fi $x \in V$, $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ cu $x_i \in K$ unici.

□ **Definiția 3.7.** Scalarii x_i din combinația $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$ se numesc **componentelele vectorului** x în baza B .

□ **Exemple 3.6**

1. Să se arate că mulțimea $B = \{\bar{e}_1 = (1,2), \bar{e}_2 = (2,-1)\}$ este o bază în R^2 .

Pentru a demonstra că mulțimea B este o bază în R^2 este necesar a arăta că vectorii \bar{e}_1 și \bar{e}_2 sunt liniar independenți respectiv formează un sistem de generatori pentru R^2 .

– $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ liniar independenți: Se pleacă de la relația $\alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 = 0$ iar prin înlocuire avem:

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,-1) &= (0,0) \\ (\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, -\alpha_2) &= (0,0) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) &= (0,0) \end{aligned}$$

Se obține sistemul liniar și omogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluții nule deoarece determinantul său

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

este nenul. Prin urmare, vectorii \bar{e}_1, \bar{e}_2 sunt liniar independenți.

– $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ sistem de generatori: Fie un vector oarecare $\bar{v} = (a, b)$. Vom arăta că acesta se descompune după vectorii \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Avem $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$ iar prin înlocuire se obține:

$$\begin{aligned} \alpha_1(1,2) + \alpha_2(2,-1) &= (a,b) \\ (\alpha_1, 2\alpha_1) + (2\alpha_2, -\alpha_2) &= (a,b) \\ (\alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 - \alpha_2) &= (a,b) \end{aligned}$$

Se obține sistemul liniar și neomogen:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 = a \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 = b \end{cases}$$

care are soluții deoarece determinantul său

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

este nenul. Folosind regula lui Cramer se obține soluția sistemului:

$$\alpha_1 = \frac{\Delta \alpha_1}{\Delta} \Rightarrow \Delta \alpha_1 = \begin{vmatrix} a & 2 \\ b & -1 \end{vmatrix} = -a - 2b \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-a - 2b}{-5} = \frac{a + 2b}{5}$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta \alpha_2}{\Delta} \Rightarrow \Delta \alpha_2 = \begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & b \end{vmatrix} = b - 2a \Rightarrow \alpha_2 = \frac{b - 2a}{-5} = \frac{2a - b}{5}.$$

Astfel, pentru vectorul $\bar{v} = (a, b)$ se obțin scalarii $\alpha_1 = \frac{a+2b}{5}$ și $\alpha_2 = \frac{2a-b}{5}$ astfel încât $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$. Deoarece nu există restricții pentru calcularea celor doi coeficienți α_1, α_2 rezultă că pentru orice vector $\bar{v} = (a, b)$ din R^2 se obțin scalarii α_1 și α_2 astfel încât $\bar{v} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2$. Am demonstrat astfel faptul că vectorii \bar{e}_1, \bar{e}_2 generează spațiul R^2 , sau echivalent, formează un sistem de generatori pentru R^2 . În concluzie mulțimea $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ este o bază.

2. Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (3,4)$ în baza $B = \{\bar{e}_1 = (1,2), \bar{e}_2 = (2,-1)\}$.

A determina expresia vectorului \bar{x} în baza B , înseamnă a descompune vectorul \bar{x} după vectorii \bar{e}_1, \bar{e}_2 . Calculele sunt asemănătoare cu cele din Exercițiul anterior.

Avem $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2$ iar prin înlocuire se obține:

$$\begin{aligned} x_1(1,2) + x_2(2,-1) &= (3,4) \\ (x_1, 2x_1) + (2x_2, -x_2) &= (3,4) \\ (x_1 + 2x_2, 2x_1 - x_2) &= (3,4) \end{aligned}$$

Se obține sistemul liniar și neomogen:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 - x_2 = 4 \end{cases}$$

care are soluții deoarece determinantul său

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

este nenul. Folosind regula lui Cramer se obține soluția sistemului:

$$x_1 = \frac{\Delta\alpha_1}{\Delta} \Rightarrow \Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 8 = -11 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{-11}{-5} = \frac{11}{5}$$

$$x_2 = \frac{\Delta\alpha_2}{\Delta} \Rightarrow \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$$

Prin urmare, expresia vectorului $\bar{x} = (3,4)$ în baza B este

$$\bar{x} = \frac{11}{5}\bar{e}_1 + \frac{2}{5}\bar{e}_2.$$

3. Să se arate că spațiul vectorial real al matricelor de forma:

$$A = \left\{ M, M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

are dimensiunea 4 și să se determine o bază în acest spațiu.

Soluție: Considerând matricele

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Un element al mulțimii A este

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix} = aA + bB + cC + dD,$$

de unde rezultă că $aA + bB + cC + dD = O$ dacă și numai dacă $a = b = c = d = 0$, deci matricele A, B, C, D sunt liniar independente. Aceeași relație arată că orice matrice M este o combinație liniară a matricelor A, B, C, D . Deci matricele A, B, C, D formează o bază, adică spațiul vectorial al matricelor M de forma dată are dimensiunea 4. \square

3.4. Schimbarea bazei

Fie V un K - spațiu vectorial n -dimensional, iar $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $B' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ două baze ale lui V . Atunci pentru orice vector $x \in V$, se obține $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$, unde $x_i \in K$ sunt componentele lui x în baza B și $x = \sum_{i=1}^n x'_i \cdot e'_i$, unde $x'_i \in K$ sunt componentele lui x în baza B' (x_i, x'_j sunt unice cf. teoremei 3.2). În plus, se pot exprima vectorii $e'_j, j = \overline{1, n}$ în baza B , adică $e'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \cdot e_i, j = \overline{1, n}$ unde $s_{ij} \in K$ - unici.

□ **Definiția 3.8.** Matricea $S = (s_{ij}) \in M_n(K)$, unic determinată, ce are ca elemente, puse pe coloane, componentele s_{ij} din egalitățile

$$e'_j = \sum_{i=1}^n s_{ij} \cdot e_i \quad (3.1)$$

$j = \overline{1, n}$, se numește **matricea de trecere** de la baza B la baza B' , iar egalitățile (3.1) se numesc **relații de trecere**.

□ **Observația 3.3.** Deoarece $\det S \neq 0$ (altfel ar rezulta că vectorii e'_j sunt linear dependenți (absurd)) rezultă că matricea de trecere este nesingulară și deci are inversă S^{-1} . În continuare, folosind relațiile de trecere, se obține:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i = \sum_{j=1}^n x'_j \cdot e'_j = \sum_{j=1}^n x'_j \left(\sum_{i=1}^n s_{ij} \cdot e_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x'_j \right) \cdot e_i$$

și cum scrierea într-o bază este unică, rezultă că:

$$x_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \cdot x'_j, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.2)$$

Aceste egalități exprimă **legea de schimbare a componentelor unui vector la schimbarea bazelor**.

□ **Observația 3.4.** Prin convenție se notează

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(K), S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n1} & s_{n2} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(K),$$

$$B = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(K), B' = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \\ \vdots \\ e'_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(K).$$

Atunci relațiile de trecere se exprimă în forma matriceală

$$B' = S^t B. \quad (3.3)$$

unde S^t este transpusa matricei S , de trecere de la baza B la baza B' , iar legea de schimbare a componentelor unui vector la schimbarea bazelor se exprimă în forma matriceală:

$$X = S \cdot X'. \quad (3.4)$$

S-a obținut astfel:

□ **Teorema 3.3.** Fie V un K -spațiu vectorial, n -dimensional $n < \infty$, B și B' baze fixate în V , S -matricea de trecere de la baza B la baza B' . Dacă $x \in V$ și X este matricea coloană a componentelor lui x în baza B , iar X' este matricea coloană a componentelor lui x în baza B' , atunci $X = SX'$.

□ **Observația 3.5.** Dacă B, B' și B'' sunt baze fixate în V , S -matricea de trecere de la baza B la baza B' , S' -matricea de trecere de la baza B' la baza B'' , S'' -matricea de trecere de la baza B la baza B'' atunci $S'' = SS'$. □

Exemple 3.7

În spațiul vectorial \mathbf{R}^3 se consideră sistemele de vectori:

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\},$$
$$\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1 = (1, 1, 0), \bar{e}'_2 = (1, 2, 3), \bar{e}'_3 = (3, 2, 1)\}.$$

Se cere: i) Să se determine matricea de trecere S de la \mathbf{B} la \mathbf{B}' .

ii) Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (2, 5, 7)$ în baza \mathbf{B}' .

Rezolvare:

i) Pentru a determina matricea de trecere S se folosește relația (3.3) $\mathbf{B}' = S^t \mathbf{B}$

pentru $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix}$, adică are loc relația

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Descompunerea vectorului \bar{e}'_1 după baza \mathbf{B} este

$$\bar{e}'_1 = s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2 + s_{31}\bar{e}_3,$$

sau, prin înlocuirea vectorilor,

$$(1, 1, 0) = s_{11}(1, 0, 0) + s_{21}(0, 1, 0) + s_{31}(0, 0, 1)$$

relație echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} s_{11} = 1 \\ s_{21} = 1 \\ s_{31} = 0. \end{cases}$$

Analog

$$\bar{e}'_2 = s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2 + s_{32}\bar{e}_3$$

de unde $s_{12} = 1, s_{22} = 2, s_{32} = 3$.

Pentru al treilea vector din baza \mathbf{B}' are loc descompunerea

$$\bar{e}'_3 = s_{13}\bar{e}_1 + s_{23}\bar{e}_2 + s_{33}\bar{e}_3$$

de unde se obține că $s_{13} = 3, s_{23} = 2, s_{33} = 1$.

Astfel, matricea de trecere este $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

ii) Pentru a determina expresia vectorului $\bar{x} = (2, 5, 7)$ în baza \mathbf{B}' , plecăm de la relația

$$\bar{x} = x'_1 \bar{e}'_1 + x'_2 \bar{e}'_2 + x'_3 \bar{e}'_3$$

care în urma înlocuirilor devine

$$(2, 5, 7) = x'_1(1, 1, 0) + x'_2(1, 2, 3) + x'_3(3, 2, 1).$$

sau

$$\begin{aligned} (x'_1, x'_1, 0) + (x'_2, 2x'_2, 3x'_2) + (3x'_3, 2x'_3, x'_3) &= (2, 5, 7) \\ (x'_1 + x'_2 + 3x'_3, x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3, 3x'_2 + x'_3) &= (2, 5, 7) \end{aligned}$$

Se obține sistemul liniar și omogen:

$$\begin{cases} x'_1 + x'_2 + 3x'_3 = 2 \\ x'_1 + 2x'_2 + 2x'_3 = 5 \\ 3x'_2 + x'_3 = 7 \end{cases}$$

Matricea sistemului este

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

cu determinantul

$$\det M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

prin urmare soluția este de forma

$$x'_1 = \frac{\Delta x'_1}{\Delta}, x'_2 = \frac{\Delta x'_2}{\Delta}, x'_3 = \frac{\Delta x'_3}{\Delta}$$

unde

$$\Delta x'_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4, \Delta x'_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} = -2, \Delta x'_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 10.$$

Se obține soluția

$$x'_1 = \frac{4}{4} = 1, x'_2 = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}, x'_3 = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

iar expresia vectorului \bar{x} în baza \mathbf{B}' este

$$\bar{x} = 1 * \bar{e}'_1 + \frac{5}{2} * \bar{e}'_2 + \left(-\frac{1}{2}\right) * \bar{e}'_3 = \bar{e}'_1 + \frac{5}{2} \bar{e}'_2 - \frac{1}{2} \bar{e}'_3.$$

□ Exemple 3.8

1. În spațiul vectorial \mathbf{R}^2 se consideră sistemele de vectori:

$$B = \{\bar{e}_1 = (1,3), \bar{e}_2 = (-2,1)\}, \\ B' = \{\bar{e}'_1 = (2,1), \bar{e}'_2 = (-1,2)\}.$$

Se cere: i) Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza \mathbf{B}' .

ii) Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = 5\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2$ în baza \mathbf{B}' .

Rezolvare:

i) Pentru a determina matricea de trecere S se folosește relația (3.3) $\mathbf{B}' = S^t \mathbf{B}$

pentru $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \end{pmatrix}$, adică are loc relația

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} \\ s_{12} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}.$$

Descompunerea vectorului \bar{e}'_1 după baza B este

$$\bar{e}'_1 = s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2,$$

sau, prin înlocuirea vectorilor,

$$(2,1) = s_{11}(1,3) + s_{21}(-2,1)$$

relație echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} s_{11} - 2s_{21} = 2 \\ 3s_{11} + s_{21} = 1 \end{cases}$$

a cărei soluție este $s_{11} = \frac{4}{7}$, $s_{21} = -\frac{5}{7}$.

Analog

$$\bar{e}'_2 = s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2$$

de unde $s_{12} = \frac{3}{7}, s_{22} = \frac{5}{7}$.

Astfel, matricea de trecere este

$$S = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ -\frac{5}{7} & \frac{5}{7} \end{pmatrix}.$$

ii) Din ecuația matriceală $X = SX'$, matricea coloană X' ce conține componentele vectorului \bar{x} în baza \mathbf{B}' este $X' = S^{-1}X$. Ținând cont că inversa matricii S este

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Expresia vectorului \bar{x} în baza \mathbf{B}' , $\bar{x} = 5\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2$ determină matricea coloană $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$, și astfel avem:

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{5} \\ 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 - \frac{21}{5} \\ 5 + \frac{28}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{53}{5} \end{pmatrix}.$$

Astfel expresia vectorului \bar{x} în baza \mathbf{B}' este

$$\bar{x} = \frac{4}{5}\bar{e}'_1 + \frac{53}{5}\bar{e}'_2.$$

Verificare: După efectuarea calculelor, expresiile vectorului în cele două baze devin:

$$\bar{x} = 5\bar{e}_1 + 7\bar{e}_2 = 5(1,3) + 7(-2,1) = (5,15) + (-14,7) = (-9,22)$$

$$\bar{x} = \frac{4}{5}\bar{e}'_1 + \frac{53}{5}\bar{e}'_2 = \frac{4}{5}(2,1) + \frac{53}{5}(-1,2) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right) + \left(-\frac{53}{5}, \frac{106}{5}\right) = \left(\frac{45}{5}, \frac{110}{5}\right) = (-9,22)$$

prin urmare s-a obținut același vector.

2. În spațiul vectorial \mathbf{R}^3 se consideră sistemele de vectori:

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 1, 0), \bar{e}_2 = (1, 0, 0), \bar{e}_3 = (1, 2, 3)\},$$

$$\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1 = (1, 3, 3), \bar{e}'_2 = (2, 2, 3), \bar{e}'_3 = (6, 7, 9)\}.$$

Se cere: i) Să se determine matricea de trecere S de la \mathbf{B} la \mathbf{B}' .

ii) Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = 2\bar{e}_1 + 5\bar{e}_2 + 7\bar{e}_3$ în baza \mathbf{B}' .

Rezolvare:

i) Pentru a determina matricea de trecere S se folosește relația (3.3) $\mathbf{B}' = S^t \mathbf{B}$

pentru $S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B}' = \begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix}$, adică are loc relația

$$\begin{pmatrix} \bar{e}'_1 \\ \bar{e}'_2 \\ \bar{e}'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & s_{31} \\ s_{12} & s_{22} & s_{32} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Descompunerea vectorului \bar{e}'_1 după baza \mathbf{B} este

$$\bar{e}'_1 = s_{11}\bar{e}_1 + s_{21}\bar{e}_2 + s_{31}\bar{e}_3,$$

sau, prin înlocuirea vectorilor,

$$(1, 3, 3) = s_{11}(1, 1, 0) + s_{21}(1, 0, 0) + s_{31}(1, 2, 3)$$

relație echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} s_{11} + s_{21} + s_{31} = 1 \\ s_{11} + 2s_{31} = 3 \\ 3s_{31} = 3 \end{cases}$$

a cărui soluție este $s_{11} = 1, s_{21} = -1, s_{31} = 1$.

Analog

$$\bar{e}'_2 = s_{12}\bar{e}_1 + s_{22}\bar{e}_2 + s_{32}\bar{e}_3$$

de unde $s_{12} = 0, s_{22} = 1, s_{32} = 1$.

Pentru al treilea vector din baza \mathbf{B}' are loc descompunerea

$$\bar{e}'_3 = s_{13}\bar{e}_1 + s_{23}\bar{e}_2 + s_{33}\bar{e}_3$$

de unde se obține că $s_{13} = 1, s_{23} = 2, s_{33} = 3$.

Astfel, matricea de trecere este $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

ii) Din ecuația matriceală $X = SX'$, matricea coloană X' ce conține componentele vectorului x în baza \mathbf{B}' este $X' = S^{-1}X$. Ținând cont că inversa matricii S este

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

pentru $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ (matrice coloană), avem:

$$X' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Astfel expresia vectorului \bar{x} în baza \mathbf{B}' este

$$\bar{x} = 0\bar{e}'_1 + 1\bar{e}'_2 + 2\bar{e}'_3.$$

□ Observația 3.6. De remarcat că la Exemplitul 3.7 mulțimea \mathbf{B} este baza canonică din \mathbf{R}^3 . De asemenea, coloanele matricii S conțin vectorii din baza \mathbf{B}' .

3.5. Lema substituției

În această secțiune vom prezenta lema substituției, un rezultat clasic al algebrei liniare, precum și aplicațiile acesteia. Asociind un algoritm acestui procedeu, el devine astfel un instrument de lucru deosebit de util atât în programarea calculatoarelor, cât și în efectuarea unor calcule ce implică folosirea spațiilor vectoriale de dimensiuni mari.

□ Lema 3.1 (Lema Substituției) Fie $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază în spațiul vectorial V și $y \in V, y \neq 0$, având expresia $y = \sum_{i=1}^n y_i \cdot e_i$, unde $y_i \in \mathbf{K}$ sunt componentele lui y în baza \mathbf{B} . Dacă a i -a componentă a vectorului y , respectiv, y_i , este nenulă, atunci mulțimea $\mathbf{B}' = \{e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, y_i, e_i, \dots, e_n\}$ este bază pentru spațiul V . Mai mult, dacă scalarii $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_i, \dots, x_n$ sunt componentele unui vector $x \in V$ în baza \mathbf{B} , atunci coordonatele lui x în baza \mathbf{B}' vor fi

$$x'_p = x_p - x_i(y_i)^{-1}y_p, 1 \leq p \leq n, p \neq i, x'_i = (y_i)^{-1}x.$$

În cazul spațiului \mathbf{R}^n rezultatul din leamnă este sintetizat de tabelele 3.1 și 3.2:

Tabelul 3.1

Baza	Componente vector y	Componente vector x
e_1	y_1	x_1
e_2	y_2	x_2
...
e_i	y_i	x_i
...
e_n	y_n	x_n

Tabelul 3.2

Baza	Componente vector y	Componente vector x
e_1	0	$x_1 - \frac{x_1 y_1}{y_i}$
e_2	0	$x_2 - \frac{x_2 y_2}{y_i}$
...
y	1	$\frac{x_i}{y_i}$
...
e_n	0	$x_n - \frac{x_n y_n}{y_i}$

Tabelul 3.1 conține componentele vectorilor y și x în baza \mathbf{B} (**baza de referință**), iar Tabelul 3.2 conține componentele acelorași vectori în baza obținută prin înlocuirea (substituirea) vectorului e_i din baza \mathbf{B} cu vectorul y . În cele ce urmează, prin notația (i, j) vom indica o celulă oarecare din cele două tabele precizând numele liniei și coloanei din care face parte.

Elementul $y_i \neq 0$ din Tabelul 3.1 (adică componenta nenulă a vectorului y care face posibilă aplicarea Lemei 3.1) se numește *pivot*, iar coloana (respectiv linia) din Tabelul 3.1 ce conține pivotul se numește *coloana pivotului* (respectiv *linia pivotului*).

Astfel, se poate enunța următorul **algoritm** de obținere a componentelor vectorilor y și x în noua bază, \mathbf{B}' , adică de obținere a elementelor Tabelului 3.2 din elementele Tabelului 3.1.

- Prima coloană a Tabelului 3.2 va conține vectorii din noua bază.
- Elementele de pe linia pivotului se împart la pivot. Pivotul $p = a_{ij}$ devine astfel egal cu 1.
- Coloana pivotului va deveni 0 (excepție făcând pivotul).
- Restul elementelor din Tabelul 3.1 se transformă cu "regula dreptunghiului": valoarea corespunzătoare celei (r, s) din Tabelul 3.2 se determină astfel: se formează dreptunghiul care are pe diagonală pivotul și elementul aflat în celula (r, s)
- are pe diagonală pivotul și elementul aflat în celula (r, s)

a_{rs}	—	a_{rj}
a_{is}	—	p .

apoi valoarea celei (r, s) din Tabelul 3.2 se calculează conform formulei:

$$a_{rs} \rightarrow \frac{a_{rs} * p - a_{rj} * a_{is}}{p}$$

Aplicații ale lemei substituției:

1. Determinarea matricei de trecere de la o bază la alta

□ **Exemple 3.9** Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (3, 4)$ în baza

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 2), \bar{e}_2 = (2, -1)\}.$$

Soluție: Din Exercițiul 3.5 se cunoaște că în raport cu baza canonică

$$\mathbf{B}^c = \{\bar{E}_1 = (1, 0), \bar{E}_2 = (0, 1)\},$$

componentele unui vector sunt exact elementele ce compun vectorul. Prin urmare, vectorul \bar{x} se scrie

$$\bar{x} = 3\bar{E}_1 + 4\bar{E}_2.$$

Mai mult, folosind Observația 3.5 , coloanele matricei de trecere de la baza canonică la o bază oarecare vor fi vectorii acelei baze. Astfel, avem că matricea de trecere de la baza canonică la baza \mathbf{B} va fi

$$\mathbf{S}_{\mathbf{B}^c\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vom începe algoritmul cu un tabel în care componentele vectorilor celor două baze \mathbf{B}^c și \mathbf{B} sunt exprimate relativ la baza canonică. Astfel, prima coloană, baza de referință, va conține vectorii bazei canonice \mathbf{B}^c , următoarele două coloane numerice reprezintă matricea de trecere de la baza canonică la ea însăși, deci matricea unitate. Celelalte două coloane vor conține matricea $\mathbf{S}_{\mathbf{B}^c\mathbf{B}}$. Avem astfel următorul tabel:

Tabelul 3.3

	\bar{E}_1	\bar{E}_2	\bar{e}'_1	\bar{e}'_2	\bar{x}
\bar{E}_1	1	0	1	2	3
\bar{E}_2	0	1	2	-1	4

Pentru a determina expresia vectorului $\bar{x} = (3,4)$ în baza \mathbf{B} , vom înlocui vectorii bazei canonice cu cei ai bazei \mathbf{B} . În calculele care urmează, vom folosi doar celulele numerice; spre exemplu, celula a_{11} este cea care îl conține pe elementul egal cu 1 din celula din colțul stânga-sus.

ITERAȚIA I

Alegem ca pivot elementul din celula a_{13} , deci $p = 1$. Vectorul de pe linia pivotului, \bar{E}_1 , iese din baza de referință, în locul său intrând vectorul de pe coloana pivotului, \bar{e}'_1 . Deoarece $p = \boxed{1}$, linia pivotului va rămâne neschimbată. Elementele de pe coloana pivotului vor deveni 0, deci $a_{43} = 0$; excepție va face pivotul, deci $a_{33} = 1$. Celelalte elemente se calculează după regula dreptunghiului; pentru exemplificare avem:

- elementului $a_{22} = 1$ îi corespunde dreptunghiul $\begin{bmatrix} 0 & \boxed{1} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ și va deveni

$$a_{42} = \frac{1*\boxed{1}-2*0}{1} = 1$$

- elementului $a_{24} = -1$ îi corespunde dreptunghiul $\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ și va deveni

$$a_{44} = \frac{-1*\boxed{1}-2*2}{1} = -5.$$

ITERAȚIA II

Alegem ca pivot elementul din celula a_{44} , deci $p = -5$. Vectorul de pe linia pivotului, \bar{E}_2 , iese din baza de referință, în locul său intrând vectorul de pe coloana pivotului, \bar{e}'_2 . Deoarece $p = \boxed{-5}$, linia pivotului se va împărți la -5 . Elementele de pe coloana pivotului vor deveni 0, deci $a_{54} = 0$; excepție va face pivotul, deci $a_{64} = 1$. Celelalte elemente se calculează după regula dreptunghiului; pentru exemplificare avem:

- elementului $a_{31} = 1$ îi corespunde dreptunghiul $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & \boxed{-5} \end{bmatrix}$ și va deveni

$$a_{54} = \frac{1*\boxed{-5}-(-2)*2}{-5} = \frac{1}{5}$$

- elementului $a_{35} = 3$ îi corespunde dreptunghiul $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ \boxed{-5} & -2 \end{bmatrix}$ și va deveni

$$a_{44} = \frac{3*\boxed{-5}-2*(-2)}{1} = -5.$$

Rezultatele calculelor sunt redade în tabelul următor:

Tabelul 3.4

	\bar{E}_1	\bar{E}_2	\bar{e}_1 ↓	\bar{e}_2	\bar{x}
$\leftarrow \bar{E}_1$	1	0	1	2	3
\bar{E}_2	0	1	2	-1	4
\bar{e}_1	1	0	1	2	3
$\leftarrow \bar{E}_2$	-2	1	0	-5	-2
\bar{e}_1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	0	$\frac{11}{5}$
\bar{e}_2	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{2}{5}$

În ultimele două linii și respectiv primele două coloane numerice se poate observa matricea de trecere de la baza B la baza B^c

$$S_{B'B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Mai mult, coloanele trei și patru conțin componentele vectorilor din baza B în baza B' , adică matricea unitate. Ultima coloană reprezintă componentele vectorului \bar{x} în baza B , respectiv

$$\bar{x} = \frac{11}{5}\bar{e}_1 + \frac{2}{5}\bar{e}_2.$$

Ca verificare a corectitudinii rezultatelor putem observa că:

$$\bar{x} = \frac{11}{5}\bar{e}_1 + \frac{2}{5}\bar{e}_2 = \frac{11}{5} * (1,2) + \frac{2}{5} * (2,-1) = \left(\frac{11}{5}, \frac{22}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right) = \left(\frac{15}{5}, \frac{20}{5}\right) = (3,4).$$

□ **Exemple 3.10** Fie $B = \{\bar{e}_1 = (2,1), \bar{e}_2 = (1,2)\}$ și $B' = \{\bar{e}'_1 = (-1,1), \bar{e}'_2 = (1,-2)\}$ două baze în R^2 . Să se determine: a) matricea $S_{BB'}$ de trecere de la baza B la baza B' ; b) expresia vectorului $\bar{x} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$.

Soluție: Din Exercițiul 3.5 se cunoaște că în raport cu baza canonică

$$B^c = \{\bar{E}_1 = (1,0), \bar{E}_2 = (0,1)\},$$

componentele unui vector sunt exact elementele ce compun vectorul. Mai mult, folosind Observația 3.5, coloanele matricei de trecere de la baza canonică la o bază oarecare vor fi vectorii acelei baze.

Astfel, avem:

- matricea de trecere de la baza canonică la baza B va fi $S_{B^cB} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

- matricea de trecere de la baza canonică la baza B' va fi $S_{B^cB'} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Vom începe algoritmul cu un tabel în care componentele vectorilor celor două baze B și B' sunt exprimate relativ la baza canonică. Avem astfel tabelul 3.5:

Tabelul 3.5

	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}'_1	\bar{e}'_2	\bar{x}
\bar{E}_1	2	1	-1	1	
\bar{E}_2	1	2	1	-2	

Tabelul 3.6

	$\bar{e}_1 \downarrow$	\bar{e}_2	\bar{e}'_1	\bar{e}'_2	\bar{x}
$\leftarrow \bar{E}_1$	2	1	-1	1	
\bar{E}_2	1	2	1	-2	
\bar{e}_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$\leftarrow \bar{E}_2$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$	
\bar{e}_1	1	0	-1	$\frac{4}{3}$	
\bar{e}_2	0	1	1	$-\frac{5}{3}$	

a) Pentru a determina matricea de trecere de la baza B la baza B' vom înlocui vectorii bazei canonice (de referință) cu cei ai bazei B , rezultatele calculelor fiind redate în tabelul 3.6. În ultimele două linii și respectiv primele două coloane ale acestuia se poate observa matricea unitate, respectiv matricea de trecere de la baza B la baza B . Mai mult, coloanele trei și patru conțin componentele vectorilor din baza B' în baza B , adică matricea de trecere de la baza B la baza B'

$$S_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{4}{3} \\ 1 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

b) Pentru a determina expresia vectorului $\bar{x} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ în baza B' , se va pleca de la tabelul 3.7, urmând a înlocui vectorii bazei de referință B cu cei ai bazei B' , adică se va aplica lema substituției pentru matricea din coloanele trei și patru ale acestui tabel, rezultatele calculelor fiind redate în tabelul 3.8.

Tabelul 3.7

	\bar{e}_1	\bar{e}_2	\bar{e}'_1	\bar{e}'_2	\bar{x}
\bar{e}_1	1	0	-1	$\frac{4}{3}$	4
\bar{e}_2	0	1	1	$-\frac{5}{3}$	3

Tabelul 3.8

	\bar{e}_1	\bar{e}_2	$\bar{e}'_1 \downarrow$	\bar{e}'_2	\bar{x}
$\leftarrow \bar{e}_1$	1	0	-1	$\frac{4}{3}$	4
\bar{e}_2	0	1	1	$-\frac{5}{3}$	3
\bar{e}'_1	-1	0	1	$-\frac{4}{3}$	-4
$\leftarrow \bar{e}_2$	1	1	0	$-\frac{1}{3}$	7
\bar{e}'_1	-5	-4	1	0	-32
\bar{e}'_2	-3	-3	0	1	-21

În ultimele două linii și respectiv primele două coloane numerice se poate observa matricea de trecere de la baza B' la baza B

$$S_{B'B} = \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ -3 & -3 \end{pmatrix},$$

adică inversa matricei de trecere de la baza \mathbf{B} la baza \mathbf{B}' . Mai mult, coloanele trei și patru conțin componentele vectorilor din baza \mathbf{B}' în baza \mathbf{B} , adică matricea unitate. Ultima coloană reprezintă componentele vectorului $\bar{\mathbf{x}}$ în baza \mathbf{B}' , respectiv $\bar{\mathbf{x}} = -32\bar{e}'_1 - 21\bar{e}'_2$.

Ca verificare a corectitudinii rezultatelor putem observa că:

$$\bar{\mathbf{x}} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 = 4 * (2,1) + 3 * (1,2) = (11,10)$$

□

$$\bar{\mathbf{x}} = -32\bar{e}'_1 - 21\bar{e}'_2 = -32 * (-1,1) + (-21) * (1,-2) = (11,10).$$

2. Calculul inversei unei matrice.

Fie A o matrice inversabilă de ordinul n , cu elemente reale. Notăm cu C_A^i coloanele matricei A , $i = 1, \dots, n$ și cu $A^{-1} = (A_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ inversa matricei A , $A^{-1} = (A_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$. Dacă I_n este matricea unitate de ordinul n , atunci coloanele matricei I_n vor fi vectorii $\bar{E}_1^t, \bar{E}_2^t, \dots, \bar{E}_i^t, \dots, \bar{E}_n^t$, unde $\bar{E}_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$, $i = \overline{1, n}$ sunt vectorii bazei canonice din \mathbf{R}^n . Astfel, relația $A * A^{-1} = I_n$ poate fi scrisă ca

$$A_{1j} * C_A^1 + A_{2j} * C_A^2 + \dots + A_{ij} * C_A^i + \dots + A_{nj} * C_A^n = \bar{E}_j^t, j = \overline{1, n}$$

ceea ce este echivalent cu faptul că elementele de pe coloana j a matricei inverse sunt componentele vectorului \bar{E}_j^t în baza formată din vectorii reprezentați de coloanele matricei A .

□ **Exemple 3.11** Să se determine inversa matricei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Soluție: Coloanele matricei A sunt $C_A^1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, iar vectorii $\bar{E}_1^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\bar{E}_2^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, formează bazele \mathbf{B}^c și \mathbf{B} în spațiul $(\mathbf{R}^2)^t = \{ \bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbf{R} \}$.

Vom începe algoritmul cu un tabel în care componentele vectorilor celor două baze \mathbf{B}^c și \mathbf{B} sunt exprimate relativ la baza canonică \mathbf{B}^c din spațiul $(\mathbf{R}^2)^t$. Avem astfel tabelul 3.9:

Tabelul 3.8

	\bar{E}_1^t	\bar{E}_2^t	C_A^1	C_A^2
\bar{E}_1	1	0	2	1
\bar{E}_2	0	1	1	2

Tabelul 3.10

	\bar{E}_1^t	\bar{E}_2^t	C_A^1	C_A^2
$\leftarrow \bar{E}_1$	1	0	2	1
\bar{E}_2	0	1	1	2
\bar{e}_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\leftarrow \bar{E}_2$	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{5}{2}$
\bar{e}_1	1	0	-1	$\frac{4}{3}$
\bar{e}_2	0	1	1	$-\frac{5}{3}$

Să observăm din tabelul 3.9 faptul că matricea A este matricea de trecere de la baza \mathbf{B}^c la baza \mathbf{B} . Știind că matricea $\mathbf{S}_{\mathbf{B}\mathbf{B}'}$ de trecere de la o bază \mathbf{B} la o bază \mathbf{B}' este inversa matricei $\mathbf{S}_{\mathbf{B}'\mathbf{B}}$ de trecere de la baza \mathbf{B}' la baza \mathbf{B} , vom înlocui vectorii bazei canonice \mathbf{B}^c cu cei ai bazei \mathbf{B} . Rezultatele calculului sunt redată în tabelul 3.10. □

3. Rezolvarea sistemelor de ecuații liniare

Fie sistemul de ecuații liniare, neomogen:

$$AX = b,$$

unde $A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$ este matricea coeficienților, $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ este matricea necunoscutelor, iar $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)^t$ este coloana termenilor liberi. Notăm cu C_A^i coloanele matricei A , $i = 1, \dots, n$. Astfel, sistemul de ecuații poate fi scris

$$x_1 * C_A^1 + x_2 * C_A^2 + \dots + x_i * C_A^i + \dots + x_n * C_A^n = b,$$

ceea ce este echivalent cu faptul că necunoscutele x_1, x_2, \dots, x_n sunt componentele vectorului b în baza formată din vectorii reprezentați de coloanele matricei A . Astfel, putem folosi lema substituției pentru a rezolva sistemul. Considerăm vectorii $\overline{E}_1^t, \overline{E}_2^t, \dots, \overline{E}_i^t, \dots, \overline{E}_n^t$, unde $\overline{E}_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$, $i = \overline{1, n}$, sunt coloanele matricei unitate de ordinul n . Ei vor reprezenta vectorii bazei canonice B^c din $(\mathbf{R}^n)^t$.

□ **Exemple 3.12** Să se rezolve sistemul de ecuații:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - 2y + z = 6. \\ x + y - 2z = -4 \end{cases}$$

Soluție: Sistemul poate fi scris ca

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$$

prin urmare avem:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix},$$

iar coloanele matricei A , respectiv $C_A^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_A^2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_A^3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ și vectorii $\overline{E}_1^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{E}_2^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{E}_3^t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ formează bazele B (a se verifica!) și B^c în spațiul

$$(\mathbf{R}^3)^t = \left\{ \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbf{R} \right\}.$$

Vom începe algoritmul cu un tabel în care componentele vectorilor celor două baze B^c și B sunt exprimate relativ la baza canonică B^c din spațiul $(\mathbf{R}^3)^t$. Avem astfel tabelul următor:

Tabelul 3.11

	\overline{E}_1^t	\overline{E}_2^t	\overline{E}_3^t	C_A^1	C_A^2	C_A^3	b
\overline{E}_1	1	0	0	1	2	-1	1
\overline{E}_2	0	1	0	2	-2	1	2
\overline{E}_3	0	0	1	1	1	-2	2

Să observăm din tabel faptul că matricea A este matricea de trecere de la baza B^c la baza B . Pentru a exprima vectorul b în baza B , vom înlocui vectorii bazei canonice B^c cu cei ai bazei B .

Rezultatele calculelor sunt redată în tabelul următor:

Tabelul 3.12

	\overline{E}_1^t	\overline{E}_2^t	\overline{E}_3^t	C_A^1	C_A^2	C_A^3	b
$\leftarrow \overline{E}_1$	1	0	0	1	2	-1	-3
\overline{E}_2	0	1	0	2	-2	1	6
\overline{E}_3	0	0	1	1	1	-2	-4
C_A^1	1	0	0	1	2	-1	1
$\leftarrow \overline{E}_2$	-2	1	0	0	-6	3	12
\overline{E}_3	-1	0	1	0	-1	-1	-1
C_A^1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	1
C_A^2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{6}$	0	0	1	$-\frac{1}{2}$	-2
$\leftarrow \overline{E}_3$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{6}$	1	0	0	$-\frac{3}{2}$	-3
C_A^1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	0	0	1
C_A^2	$\frac{5}{9}$	$-\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{3}$	0	1	0	-1
C_A^3	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{2}{3}$	0	0	1	2

Elementele de pe ultima coloană reprezintă componentele vectorului b în baza $\{C_A^1, C_A^2, C_A^3\}$ adică soluția sistemului. Am obținut astfel $x = 1, y = -1, z = 2$. Mai mult, matricea formată din ultimele trei linii respectiv de coloanele doi, trei și patru,

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{5}{9} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

este inversa matricii A (a se verifica).

□

3.6. Subspații vectoriale. Operații cu subspații vectoriale

Fie V un K -spațiu vectorial și $V' \subset V, V' \neq \emptyset$.

□ **Definiția 3.9.** Submulțimea V' se numește **subspațiu vectorial** al lui V , dacă restricțiile celor două legi de compoziție „+” și „·” la V' determină pe această mulțime o structură de K -spațiu vectorial.

□ **Teorema 3.4.** O condiție necesară și suficientă ca $V' \subset V$ să fie un subspațiu vectorial al lui V este ca: **1.** Oricare ar fi $x, y \in V'$ să rezulte $x + y \in V'$.

2. Pentru orice $\alpha \in K$ și oricare ar fi $x \in V'$ să rezulte $\alpha x \in V'$.

□ **Corolarul 3.1.** Dacă V este un K -spațiu vectorial și V' este o submulțime nevidă a lui V , atunci V' este un subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă are loc condiția: Oricare ar fi $\alpha, \beta \in K$ și pentru orice $x, y \in V'$ să rezulte $\alpha x + \beta y \in V'$.

□ Exemple 3.13

1. Mulțimea $\{0\} \in V$ este subspațiu vectorial.

2. În spațiul vectorial \mathbf{R}^3 se consideră submulțimile

$$U_1 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$$

$$U_2 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 = 0\}.$$

Să se precizeze care din aceste submulțimi este subspațiu vectorial al lui \mathbf{R}^3 .

Soluție

Pentru a arăta că submulțimea U_1 este un subspațiu vectorial, verificăm condițiile teoremei 3.4.

Fie $\bar{x}, \bar{y} \in U_1$. Verificăm dacă $\bar{x} + \bar{y} \in U_1$. Avem:

$$\bar{x} \in U_1 \rightarrow \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

$$\bar{y} \in U_1 \rightarrow \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0.$$

De asemenea,

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = \left(\underbrace{x_1 + y_1}_{\text{not. } z_1}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\text{not. } z_2}, \underbrace{x_3 + y_3}_{\text{not. } z_3} \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} \in U_1 &\Leftrightarrow (z_1, z_2, z_3) \in U_1 \\ &\Leftrightarrow z_1 + 2z_2 + 3z_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + y_1 + 2(x_2 + y_2) + 3(x_3 + y_3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 + y_1 + 2x_2 + 2y_2 + 3x_3 + 3y_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x_1 + 2x_2 + 3x_3}_{=0} + \underbrace{y_1 + 2y_2 + 3y_3}_{=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ (adevărat)} \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \in U_1 \end{aligned}$$

Fie acum $\bar{x} \in U_1$ și $\alpha \in \mathbf{R}$. Verificăm dacă $\alpha\bar{x} \in U_1$. Avem:

$$\bar{x} \in U_1 \rightarrow \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} \alpha\bar{x} &= \alpha(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \\ \alpha\bar{x} \in U_1 &\Leftrightarrow (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3) \in U_1 \\ &\Leftrightarrow \alpha x_1 + 2\alpha x_2 + 3\alpha x_3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \underbrace{x_1 + 2x_2 + 3x_3}_{=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \cdot 0 = 0 \text{ (adevărat)} \Rightarrow \alpha\bar{x} \in U_1. \end{aligned}$$

Astfel, am arătat că submulțimea U_1 este un subspațiu vectorial al lui \mathbf{R}^3 .

În continuare, verificăm dacă submulțimea U_2 este un subspațiu vectorial.

Fie $\bar{x}, \bar{y} \in U_2$. Verificăm dacă $\bar{x} + \bar{y} \in U_2$. Avem:

$$\bar{x} \in U_2 \rightarrow \bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \mid -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4 = 0$$

$$\bar{y} \in U_1 \rightarrow \bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \mid -y_1 + 2y_2 - 3y_3 + 4 = 0.$$

De asemenea,

$$\bar{x} + \bar{y} = (x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3) = \left(\underbrace{x_1 + y_1}_{\text{not. } z_1}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\text{not. } z_2}, \underbrace{x_3 + y_3}_{\text{not. } z_3} \right)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} + \bar{y} \in U_2 &\Leftrightarrow (z_1, z_2, z_3) \in U_2 \\ &\Leftrightarrow -z_1 + 2z_2 - 3z_3 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -(x_1 + y_1) + 2(x_2 + y_2) - 3(x_3 + y_3) + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x_1 - y_1 + 2x_2 + 2y_2 - 3x_3 - 3y_3 + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{x_1 + 2x_2 + 3x_3}_{=-4} + \underbrace{y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4}_{=0} = 0 \\ &\Leftrightarrow -4 = 0 \text{ (fals)} \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \notin U_2. \end{aligned}$$

Astfel, submulțimea U_2 nu este un subspațiu vectorial al lui \mathbf{R}^3 . □

□ **Definiția 3.10.** Subspațiul $\{0\}$ se numește **subspațiul nul** al lui V . Orice spațiu vectorial V este subspațiu al lui însuși - numit **subspațiu impropriu**. Un subspațiu al lui V se numește **subspațiu propriu**, dacă el este diferit de $\{0\}$ și de V .

□ **Exemple 3.14**

1. Mulțimea matricelor simetrice și mulțimea matricelor antisimetrice de ordin n sunt subspații proprii ale spațiului matricelor pătrate de ordin n , $M_n(\mathbf{K})$

2. Mulțimea

$$V' = \{\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{K}^n \mid x_1 = 0\} \subset \mathbf{K}^n$$

este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial aritmetic \mathbf{K}^n . □

□ **Definiția 3.11.** Fie V un \mathbf{K} -spațiu vectorial și V', V'' subspații vectoriale ale lui V .

1. Se numește **subspațiu intersecție**, mulțimea: $V' \cap V''$.

2. Se numește **subspațiu sumă** a lui V' și V'' mulțimea:

$$V' + V'' = \{x' + x'' \in V \mid x' \in V', x'' \in V''\}.$$

3. Fie $S = \{x_i\}_{i \in I} \subset V$ o familie de vectori din V . Se numește **subspațiu generat de S** mulțimea notată cu $[S]$ (sau $L(S)$) a tuturor combinațiilor liniare finite de vectori ai lui S , adică:

$$[S] = \left\{ \sum_{i \in I} a_i \cdot x_i : \{a_i\}_{i \in I} \subset \mathbf{K}, \text{este o familie de suport finit, de scalari din } \mathbf{K} \right\}.$$

□ **Observația 3.7.** Analog se poate defini intersecția și suma a „ m ” subspații vectoriale $V_i \subset V$ $i = \overline{1, m}$. De exemplu:

$$V_1 + V_2 + \dots + V_m = \{x \in V : x = x_1 + x_2 + \dots + x_m, x_i \in V_i, i = \overline{1, m}\}.$$

□ **Propoziția 3.1.** Mulțimile $V' \cap V'', V' + V'', [S]$ sunt subspații vectoriale ale lui V .

□ **Definiția 3.12.** Suma $V' + V''$ a subspațiilor V' și V'' se numește **sumă directă** și se notează $V' \oplus V''$, dacă orice vector $x \in V' + V''$ se reprezintă în mod unic sub forma $x = x' + x''$ cu $x' \in V'$ și $x'' \in V''$.

□ **Definiția 3.13.** Fie V un \mathbf{K} -spațiu vectorial și S o familie de vectori din V . S se numește **sistem de generatori** pentru V , dacă $[S] = V$.

□ **Teorema 3.5.** Fie V un \mathbf{K} -spațiu vectorial și V', V'' două subspații vectoriale ale lui V . Atunci: $[V' \cup V''] = V' + V''$ (altfel spus, subspațiul generat de reuniunea a două subspații coincide cu subspațiul sumă a celor două subspații).

□ **Teorema 3.6.** Fie $V', V'' \subset V$ două subspații vectoriale ale lui V . Sunt echivalente condițiile:

1. Suma $V' + V''$ este directă.

2. $V' \cap V'' = \{0\}$.

□ **Definiția 3.14.** Dacă $V' \oplus V'' = V$, atunci subspațiile V' și V'' se numesc **suplementare** în V .

□ **Teorema 3.7. (Grassmann - teorema dimensiunii)** Fie V un \mathbf{K} -spațiu vectorial și $V', V'' \subset V$ subspații vectoriale. Atunci:

$$\dim_{\mathbf{K}}(V' + V'') = \dim_{\mathbf{K}}V' + \dim_{\mathbf{K}}V'' - \dim_{\mathbf{K}}(V' \cap V'').$$

(Dimensiunea subspațiului sumă este egală cu suma dimensiunilor subspațiilor minus dimensiunea subspațiului intersecție).

□ **Observația 3.8.** Dacă suma $V' + V''$ este directă, atunci

$$\dim_{\mathbf{K}}(V' \oplus V'') = \dim_{\mathbf{K}}V' + \dim_{\mathbf{K}}V''.$$

(Dimensiunea subspațiului sumă este egală cu suma dimensiunilor subspațiilor).

□ **Exemple 3.15**

1. Să se determine dimensiunile subspațiilor sumă și intersecție a subspațiilor generate de sistemele de vectori:

$$U = \{\bar{u}_1 = (2, 3, -1), \bar{u}_2 = (1, 2, 2), \bar{u}_3 = (1, 1, -3)\},$$

$$V = \{\bar{v}_1 = (1, 2, 1), \bar{v}_2 = (1, 1, -1), \bar{v}_3 = (1, 3, 3)\}$$

în spațiul vectorial \mathbf{R}^3 și să se verifice teorema lui Grassmann.

Soluție: Vectorii u_1, u_2, u_3 sunt liniar dependenți (a se verifica!), o bază în $[U]$ putând fi $\{u_1, u_2\}$, prin urmare avem

$$[U] = \{\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}\} \text{ și } \dim[U] = 2.$$

Vectorii v_1, v_2, v_3 sunt liniar dependenți (a se verifica!) și avem

$$[V] = \{\beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbf{R}\} \text{ și } \dim[V] = 2,$$

deoarece o bază în $[V]$ poate fi \bar{v}_1, \bar{v}_2 .

Subspațiul $[U] + [V]$ este generat de reuniunea sistemelor U și V .

Se poate verifica ușor ca o bază în reuniune este $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{v}_1$ și deci

$$\dim([U] + [V]) = 3,$$

adică $[U] + [V] = \mathbf{R}^3$.

Subspațiul intersecție $[U] \cap [V]$ conține vectorii pentru care

$$\alpha_1 \bar{u}_1 + \alpha_2 \bar{u}_2 = \beta_1 \bar{v}_1 + \beta_2 \bar{v}_2,$$

Iar prin înlocuirea celor patru vectori se obține

$$2\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad 3\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2\beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_1 + 2\alpha_2 = \beta_1 - \beta_2,$$

adică un sistem cu trei ecuații cu patru necunoscute. Alegând ca necunoscute principale $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$, iar $\beta_2 = \gamma$, necunoscută secundară, se obține

$$\alpha_1 = \gamma, \quad \alpha_2 = \gamma, \quad \beta_1 = 2\gamma.$$

Rezultă astfel că

$$[U] \cap [V] = \{(3\gamma, 5\gamma, \gamma), \gamma \in \mathbf{R}\} \text{ și } \dim([U] \cap [V]) = 1.$$

Se verifică astfel teorema lui Grassmann:

$$\dim[U] + \dim[V] = \dim([U] + [V]) + \dim([U] \cap [V]).$$

2. Să se arate că în spațiul vectorial al matricelor $(M_n(\mathbf{K}), +, \cdot, \mathbf{K})$ submulțimile definite prin $S = \{A \in M_n(\mathbf{K}) | A^t = A\}$ (matrice simetrice), $S' = \{A \in M_n(\mathbf{K}) | A^t = -A\}$ (matrice antisimetrice) formează subspații vectoriale și $M_n(\mathbf{K}) = S \oplus S'$.

Soluție: Pentru matricile $A, B \in S$, deoarece $(A + B)^t = A^t + B^t = A + B$ rezultă că $A + B \in S$ și $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ se obține $\alpha A \in S$. Analog pentru S' .

Mai mult, pentru $A \in M_n(\mathbf{K})$, atunci matricile

$$B = \frac{1}{2}(A + A^t) \in S \text{ și } C = \frac{1}{2}(A - A^t) \in S'$$

verifică relația $A = B + C$. În plus $S \cap S' = O$, astfel că $M_n(\mathbf{K}) = S \oplus S'$. □

3.7. Spații vectoriale euclidiene și unitare

□ **Definiția 3.15.** Fie V un spațiu vectorial complex (\mathbf{C} -spațiu vectorial). Se numește **produs scalar** pe V , o aplicație: $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times V \rightarrow \mathbf{C}$ astfel încât:

1. Pentru orice $x, y \in V$ implică $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$, ($\bar{\alpha}$ - conjugatul numărului complex).
2. Oricare ar fi $x_1, x_2, y \in V$ rezultă $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$.
3. Oricare ar fi \mathbf{C} și pentru orice $x, y \in V$ se obține $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$.
4. Pentru orice $x \in V$ se obține $\langle x, x \rangle \geq 0$ și $\langle x, x \rangle = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

Numărul complex $\langle x, y \rangle$ se numește **produsul scalar al vectorilor x și y** .

□ **Observația 3.9.**

1. Condițiile 2 și 3 implică: Oricare ar fi scalarii $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{K}$ și pentru orice vectori $x_1, x_2, y \in V$ rezultă: $\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle$.

2. Condițiile 1, 2 și 3 implică: $\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$ și $\langle x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \rangle = \alpha_1 \langle x, y_1 \rangle + \alpha_2 \langle x, y_2 \rangle$.

□ **Definiția 3.16.** Un spațiu vectorial peste corpul \mathbf{K} pe care s-a definit un produs scalar se numește spațiu vectorial **euclidian**, când $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, respectiv spațiu vectorial **unitar**, când $\mathbf{K} = \mathbf{C}$.

□ **Exemple 3.16**

Fie $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ doi vectori oarecare din spațiul vectorial real aritmetic \mathbf{R}^n . Aplicația definită prin:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

este un produs scalar pe \mathbf{R}^n .

$(\mathbf{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ este un spațiu vectorial euclidian, iar produsul scalar definit mai sus se numește **produs scalar uzual (canonic)** în \mathbf{R}^n . □

3.8. Dreaptă de regresie

Fie punctele $M_i, i = \overline{1, n}$ în plan având coordonatele carteziene $x_i, y_i, i = \overline{1, n}$.

□ **Definiția 3.17.** Se numește **dreaptă de regresie** asociată „norului” de puncte $M_i, i = \overline{1, n}$ dreapta din plan cu proprietatea că suma pătratelor distanțelor de la puncte la dreaptă este minimă.

Considerăm $M_i, i = \overline{1, n}$ și construim vectorii din spațiul vectorial aritmetic \mathbf{R}^n $\bar{e}_1 = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{n \text{ ori}}, \bar{e}_2 = \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ și $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$. Dreapta de regresie

(d_{reg}) asociată punctelor $M_i, i = \overline{1, n}$ va fi graficul funcției $F(x) = a + bx, a, b \in \mathbf{R}$, unde a, b sunt soluția sistemului

$$\begin{cases} \langle \bar{e}_1 | \bar{e}_1 \rangle a + \langle \bar{e}_1 | \bar{e}_2 \rangle b = \langle \bar{e}_1 | \bar{y} \rangle \\ \langle \bar{e}_2 | \bar{e}_1 \rangle a + \langle \bar{e}_2 | \bar{e}_2 \rangle b = \langle \bar{e}_2 | \bar{y} \rangle \end{cases}$$

unde operația $\langle \cdot | \cdot \rangle: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ este produsul scalar uzual de pe \mathbf{R}^n definit de relația

$$\langle x | y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

□ **Exemple 3.17**

Să se determine dreapta de regresie asociată punctelor $M_1(1,2), M_2(2,1), M_3(3,4)$.

Soluția. Pentru vectorii $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ și $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3)$ produsul scalar uzual devine

$$\langle \bar{x} | \bar{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Vectorii din \mathbf{R}^3 asociați punctelor M_1, M_2 și M_3 sunt $\bar{e}_1 = (1, 1, 1), \bar{e}_2 = \bar{x} = (1, 2, 3)$ și $\bar{y} = (2, 1, 4)$. Prin urmare avem $\langle \bar{e}_1 | \bar{e}_1 \rangle = 3, \langle \bar{e}_1 | \bar{e}_2 \rangle = 6, \langle \bar{e}_1 | \bar{y} \rangle = 7, \langle \bar{e}_2 | \bar{e}_2 \rangle = 14, \langle \bar{e}_2 | \bar{y} \rangle = 16$.

Ecuția dreptei de regresie este $F(x) = a + bx$ unde numerele a și b sunt soluția sistemului

$$\begin{cases} 3a + 6b = 7 \\ 6a + 14b = 16 \end{cases}$$

cu soluția $a = \frac{1}{3}, b = 1$. Prin urmare dreapta de regresie are ecuația $F(x) = \frac{1}{3} + x$. □

Aplicații propuse

□ **A3.1:** Arătați că mulțimile

$U_1 = \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}$, $U_2 = \{\bar{x} = (x_1, x_2) \in R^2 : x_1 - 2x_2 = 0\}$
sunt subspații vectoriale în R^2

□ **A3.2:** Să se arate că mulțimea $B = \{\bar{e}_1 = (2,1), \bar{e}_2 = (-1,2)\}$ este o bază în R^2 .

□ **A3.3:** Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = (3,4)$ în baza $B = \{\bar{e}_1 = (2,1), \bar{e}_2 = (-1,2)\}$.

□ **A3.4:** Să se determine matricea de trecere de la baza B la baza B' , unde $B = \{\bar{e}_1 = (1,3), \bar{e}_2 = (-2,1)\}$, $B' = \{\bar{e}_1 = (2,1), \bar{e}_2 = (-1,2)\}$.

□ **A3.5:** Să se determine matricea de trecere de la baza B' la baza B , unde $B = \{\bar{e}_1 = (1,3), \bar{e}_2 = (-2,1)\}$, $B' = \{\bar{e}_1 = (2,1), \bar{e}_2 = (-1,2)\}$.

□ **A3.6:** Verificați dacă matricea de la exercițiul 4 este inversa matricei de la exercițiul 5.

□ **A3.7:** Fie bazele $B = \{\bar{e}_1 = (1,3), \bar{e}_2 = (-2,1)\}$, $B' = \{\bar{e}_1 = (2,1), \bar{e}_2 = (-1,2)\}$ din R^2 . Să se determine expresia vectorului $\bar{x} = 4\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ în baza B' .

□ **A3.8:** Să se determine dreapta de regresie asociată punctelor:

a) $M_1(2,1), M_2(1,2), M_3(4, -3)$; b) $M_1(1, -1), M_2(-1,2), M_3(-2,3), M_4(2, -3)$.

Unitatea de învățare IV.

Transformări liniare

Cuprins

4.1. Noțiunea de transformare liniară	64
4.2. Transformări liniare pe spații vectoriale finit dimensionale	66
Aplicații propuse	70

4.1. Noțiunea de transformare liniară

□ **Definiția 4.1.** Fie V_1 și V_2 două \mathbf{K} spații vectoriale. Se numește **transformare liniară (operator liniar sau morfism)** de la V_1 la V_2 orice aplicație $T : V_1 \rightarrow V_2$ cu proprietățile:

1. Oricare ar fi $x, y \in V_1$, rezultă că $T(x + y) = T(x) + T(y)$, (proprietatea de aditivitate).
2. Pentru orice $\alpha \in \mathbf{K}$ și oricare ar fi $x \in V_1$, rezultă că $T(\alpha x) = \alpha T(x)$, (proprietatea de omogenitate).

Condițiile 1 și 2 sunt echivalente cu condiția:

3. Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbf{K}$ și pentru orice $x, y \in V_1$, are loc relația
$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

□ **Observația 4.1.** Dacă în particular $V_2 = \mathbf{K}$ atunci transformarea liniară T se numește **formă liniară** pe V_1 .

□ **Exemple 4.1**

1. Fie $\mathbf{K}[X]$ - spațiul vectorial al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienți din corpul comutativ \mathbf{K} . Aplicația de derivare $D : \mathbf{K}[X] \rightarrow \mathbf{K}[X]$ este o transformare liniară, numită **operator de derivare**.

2. Fie V un \mathbf{K} spațiu vectorial și $U \subset V$ un subspațiu vectorial al lui V . Aplicația $i : U \rightarrow V, i(x) = x$, pentru orice $x \in U$ este o transformare liniară, numită **aplicația de incluziune**. □

Se notează cu $L_{\mathbf{K}}(V_1, V_2) = \{T : V_1 \rightarrow V_2 \mid T \text{ -transformare liniară}\}$ **mulțimea transformărilor liniare de la V_1 la V_2** . În cazul particular când $V_1 = V_2 = V$, transformarea liniară $T : V \rightarrow V$ se numește **endomorfism** și $L_{\mathbf{K}}(V)$ este **mulțimea endomorfismelor pe V** .

□ **Definiția 4.2.**

1. Se numește **monomorfism** o aplicație $T \in L_{\mathbf{K}}(V_1, V_2)$ injectivă.
2. Se numește **epimorfism** o aplicație $T \in L_{\mathbf{K}}(V_1, V_2)$ surjectivă.
3. Se numește **izomorfism** de spații vectoriale o aplicație $T \in L_{\mathbf{K}}(V_1, V_2)$, monomorfism și epimorfism (adică o transformare liniară și bijectivă). În acest caz spațiile vectoriale V_1 și V_2 se numesc **spații vectoriale izomorfe**.
4. Se numește **automorfism** o aplicație $T \in L_{\mathbf{K}}(V)$ bijectivă.

□ **Observația 4.2.** Mulțimea izomorfismelor din $L_{\mathbf{K}}(V)$ are o structură de grup față de compunerea transformărilor.

□ **Teorema 4.1.** Dacă $T : V_1 \rightarrow V_2$ este o transformare liniară, atunci:

1. $T(0) = 0$.

2. $T(-x) = -T(x)$, oricare ar fi $x \in V_1$.

3. Dacă V'_1 este un subspațiu al lui V_1 , atunci mulțimea

$$T(V'_1) = \{v \in V_2 \mid \text{există } x \in V'_1 \text{ } T(x) = v\}$$

este subspațiu în V_2 (adică imaginea unui subspațiu vectorial printr-o transformare liniară este un subspațiu vectorial).

4. Dacă V'_2 este un subspațiu în V_2 , atunci mulțimea

$$T^{-1}(V'_2) = \{x \in V_1 \mid T(x) \in V'_2\}$$

este subspațiu în V_1 (adică imaginea inversă a unui subspațiu vectorial printr-o transformare liniară este un subspațiu vectorial).

□ **Corolar 4.1.**

1. Mulțimea $T(V_1)$ este un subspațiu în V_2 , notat: **Im T**.

2. Mulțimea $T^{-1}(0) = \{x \in V : T(x) = 0\}$ este un subspațiu în V_1 , notat **Ker T**.

3. Mulțimea $T^{-1}(V_2)$ este un subspațiu în V_1 .

□ **Definiția 4.3.** Subspațiile $Im T, Ker T, T^{-1}(V_2)$ se numesc **subspațiu imagine, nucleu** și respectiv **contraimagină**.

□ **Definiția 4.4.** Numerele reale și pozitive $dim(Im T)$ și respectiv $dim(Ker T)$ se numesc **rangul** lui T și respectiv **defectul** lui T și se notează **rang $T = dim(Im T)$ respectiv $def T = dim(Ker T)$** .

□ **Propoziția 4.1.** Fie $T: V_1 \rightarrow V_2$ o transformare liniară. Atunci:

1. T este injectivă, dacă și numai dacă $Ker T = \{0\}$.

2. T este surjectivă, dacă și numai dacă $Im T = V_2$.

□ **Teorema 4.2.** Fie $T \in L_K(V)$ o transformare liniară în spațiul vectorial V , $dim V = n$. Atunci are loc:

$$dim V = rang T + def T. \quad (4.1)$$

□ **Exemple 4.2** Să se demonstreze că aplicația $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definită prin relația

$$T(x_1, x_2) = (2x_1, x_2, x_1 - x_2),$$

este o transformare liniară.

Soluție: Pentru a arăta că aplicația T este o transformare liniară va trebui să arătăm că au loc egalitățile

$$T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2)$$

$$T(\alpha(x_1, x_2)) = \alpha \cdot T(x_1, x_2)$$

oricare ar fi $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ și $\alpha \in \mathbf{R}$.

Deoarece avem $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, rezultă că

$$\begin{aligned} T((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) &= T\left(\left(\underbrace{x_1 + y_1}_{\text{not. } z_1}, \underbrace{x_2 + y_2}_{\text{not. } z_2}\right)\right) \stackrel{\text{def}}{=} (2z_1, z_2, z_1 - z_2) \\ &= (2(x_1 + y_1), x_2 + y_2, x_1 + y_1 - (x_2 + y_2)) \\ &= (2x_1 + 2y_1, x_2 + y_2, x_1 + y_1 - x_2 - y_2) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) &= (2x_1, x_2, x_1 - x_2) + (2y_1, y_2, y_1 - y_2) \\ &= (2x_1 + 2y_1, x_2 + y_2, x_1 - x_2 + y_1 - y_2) \quad (2) \end{aligned}$$

adică, urmărind relațiile (1) și (2), obținem prima egalitate dorită.

Analog, pentru perechea (x_1, x_2) și $\alpha \in \mathbf{R}$ avem $\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$ de unde rezultă că

$$T(\alpha(x_1, x_2)) = T(\alpha x_1, \alpha x_2) \stackrel{\text{def}}{=} (2\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2) \quad (3)$$

$$\alpha \cdot T(x_1, x_2) = \alpha \cdot (2x_1, x_2, x_1 - x_2) \stackrel{\text{def}}{=} (2\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_1 + \alpha x_2) \quad (4)$$

Și astfel, urmărind relațiile (3) și (4), obținem a doua egalitate dorită. □

4.2. Transformări liniare pe spații vectoriale finit dimensionale

Fie V și W două K - spații vectoriale, $\dim V = n$, $\dim W = m$ și $T: V \rightarrow W$ o transformare liniară. Fie $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui V , iar $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ o bază a lui W .

Din capitolul "Spații vectoriale" se știe că pentru orice vector $x \in V$ și $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ bază în V are loc descompunerea $x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$, unde $x_i \in K$ sunt componentele lui x în baza B . Astfel, are loc relația

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot T(e_i).$$

Deoarece, vectorul $T(x)$ se descompune în baza B' avem

$$T(e_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} \cdot f_j, a_{ji} \in K. \quad (4.2)$$

□ **Teorema 4.3.** Dacă, $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază a lui V , iar $B' = \{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ o bază a lui W atunci există o unică matrice $A = (a_{ij})$ de tipul $m \times n$ astfel încât $T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot f_i$. În plus,

dacă imaginea vectorului $x = \sum_{j=1}^n x_j \cdot e_j$ are descompunerea $T(x) = \sum_{i=1}^m y_i \cdot f_i$ atunci $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j$, $i = \overline{1, m}$.

□ **Observația 4.3** Relația $T(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \cdot f_i$, din Teorema 5, pentru orice $j = \overline{1, n}$ arată că matricea $A = M_{B'B}$ se determină astfel: coloana j a matricei A conține componentele în baza B' ale imaginii vectorului e_j din baza B prin transformarea T , pentru orice $j = \overline{1, n}$.

Dacă se notează $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{pmatrix}$ se obține scrierea matriceală a lui T :

$$Y = AX \text{ sau } T(X) = AX. \quad (4.3)$$

□ **Definiția 4.5.** Matricea $A = M_{B'B}$ se numește **matricea asociată transformării liniare T** în raport cu perechea de baze considerate B și B' .

În continuare se consideră cazul particular al transformărilor liniare $T \in L_K(V)$, $\dim V = n$. În acest caz, pentru B bază a lui V vom nota cu A matricea lui T în raport cu baza B și vom scrie $A = M_B = M_{B'B}$.

Interesează în ce mod se schimbă matricea $A = M_B$ la schimbări de bază în V . Fie B și B' două baze în spațiul V și $A = M_B, A' = M_{B'}$, matricele asociate transformării liniare T în cele două baze.

□ **Teorema 4.4.** Dacă S este matricea trecerii de la baza B și B' în V , atunci are loc relația

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S.$$

□ **Corolar 4.2.** Rangul matricei asociate unei transformări liniare T într-o bază în V este invariant la schimbări de baze.

□ **Definiția 4.6.** Matricele $A, B \in M_n(K)$ se numesc **asemenea** dacă există o matrice nesingulară $S \in M_n(K)$, astfel încât $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

□ **Observația 4.4.** Matricele $A = M_B, A' = M_{B'}$ sunt asemenea.

□ Exemple 4.3

1. Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, $T(\bar{x}) = (x_1, x_1 + x_2 + x_3, x_1)$ pentru orice $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Se cere:

- i) Să se calculeze $T(\bar{u})$, unde $\bar{u} = (1, 2, 3)$.
- ii) Să se determine matricea asociată lui T în baza canonică din \mathbf{R}^3 .
- iii) Să se determine $\text{Ker}T$ și $\text{Im}T$.

Rezolvare:

i) $T(\bar{u}) \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1 + 2 + 3, 1) = (1, 6, 1)$.

ii) Baza canonică din \mathbf{R}^3 este

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

iar imaginile vectorilor din bază prin aplicația T sunt

$$\begin{aligned} T(\bar{e}_1) &= T(1, 0, 0) \stackrel{\text{def}}{=} (1, 1, 1), \\ T(\bar{e}_2) &= T(0, 1, 0) \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1, 0), \\ T(\bar{e}_3) &= T(0, 0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} (0, 1, 0). \end{aligned}$$

În raport cu baza canonică din \mathbf{R}^3 , orice vector $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ admite descompunerea (a se vedea **Exemplul 3.5**) adică, în raport cu baza canonică, componentele unui vector sunt exact elementele ce compun vectorul.

$$\bar{x} \equiv (x_1, x_2, x_3) = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + x_3 \bar{e}_3. \quad (*)$$

Din cele spuse anterior, expresiile vectorilor $T(\bar{e}_1), T(\bar{e}_2), T(\bar{e}_3)$ sunt:

$$\begin{aligned} T(\bar{e}_1) &= (1, 1, 1) = 1 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 1 \cdot \bar{e}_3, \\ T(\bar{e}_2) &= (0, 1, 0) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3, \\ T(\bar{e}_3) &= (0, 1, 0) = 0 \cdot \bar{e}_1 + 1 \cdot \bar{e}_2 + 0 \cdot \bar{e}_3, \end{aligned}$$

Folosind **Observația 4.3** matricea asociată lui T în baza \mathbf{B} , $S = M_{\mathbf{B}}$, este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iii) Din definiția nucleului unei transformări liniare avem că

$$\text{Ker}T = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^3 \mid T(\bar{x}) = \bar{0}\},$$

iar relația $T(\bar{x}) = \bar{0}$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

S-a obținut astfel un sistem liniar omogen, simplu nedeterminat, alegând primele două ecuații ca și ecuații principale, iar ca necunoscută secundară pe x_3 . Avem astfel sistemul

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_1 + x_2 = -\alpha, (x_3 = \alpha), \alpha \in \mathbf{R} \end{cases}$$

cu soluția

$$x_1 = 0, x_2 = -\alpha, x_3 = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}.$$

adică avem

$$\text{Ker}T = \{\bar{x} = (0, -\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}.$$

Vom determina acum mulțimea ImT . Din definiția imaginii unei transformări liniare avem că

$$Im T = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^3 \mid \text{există } \bar{x} \in \mathbf{R}^3 \text{ astfel încât } T(\bar{x}) = \bar{y}\}.$$

Relația $T(\bar{x}) = \bar{y}$, pentru $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 = y_3 \end{cases}$$

Din definiția imaginii lui T , se observă că interesează vectorii $\bar{y} \in \mathbf{R}^3$ pentru care există $\bar{x} \in \mathbf{R}^3$ a.î. $T(\bar{x}) = \bar{y}$, prin urmare nu este necesară găsirea soluției sistemului anterior, ci doar studierea sistemului compatibil.

Sistemul obținut este unul liniar omogen, având matricea coeficienților

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul său este $\Delta = \det D = 0$, alegem ca minor principal

$$\Delta_p = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Minorul caracteristic asociat va fi

$$\Delta_c = \begin{vmatrix} 1 & 0 & y_1 \\ 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 0 & y_3 \end{vmatrix} = y_3 - y_1.$$

Se disting astfel două cazuri:

a) $\Delta_c = 0 \Leftrightarrow y_3 - y_1 = 0 \Leftrightarrow y_3 = y_1$. În acest caz, alegând primele două ecuații ca și ecuații principale, iar ca necunoscută secundară pe x_3 , sistemul este unul compatibil simplu nedeterminat. Deoarece nu este necesară determinarea soluției sistemului anterior, ci doar studierea compatibilității, rezultă că

$$ImT = \{\bar{y} = (y_1, y_2, y_1) \mid y_1, y_2 \in \mathbf{R}\}, \text{ deoarece } y_3 = y_1.$$

b) $\Delta_c \neq 0$. În acest caz, sistemul este incompatibil, prin urmare acest caz nu prezintă interes.

Să se determine rangul și defectul transformării liniare $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definită prin:

$$T(x) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2 + x_3), \quad x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3,$$

explicitând câte o bază în $KerT$ și ImT .

Soluție: Din definiția nucleului unei transformări liniare avem că

$$KerT = \{\bar{x} \in \mathbf{R}^3 \mid T(\bar{x}) = \bar{0}\},$$

iar relația $T(\bar{x}) = \bar{0}$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Sistemul obținut este unul liniar omogen, având matricea coeficienților

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul său este $\Delta = \det D = 0$, iar toți minorii de ordinul 2 sunt nuli alegem ca minor principal

$$\Delta_p = 1 \neq 0.$$

Minorii caracteristici asociați fiind nuli, rezultă că sistemul este compatibil dublu nedeterminant. Având prima ecuație ca ecuație principală, iar pe x_2, x_3 ca necunoscute secundare, rezultă că

$$x_1 = -x_2 - x_3, x_2, x_3 \in \mathbf{R}.$$

În concluzie orice vector $x \in \text{Ker}T$ are forma

$$\text{Ker}T = \{\bar{x} = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) | x_2, x_3 \in \mathbf{R}\}.$$

Pentru a afla defectul lui T este necesar a determina o bază în $\text{Ker}T$, respectiv a determina vectorii liniar independenți care generează subspațiul $\text{Ker}T$. Se observă că are loc descompunerea

$$(x_1, x_2, -x_1 - x_2) = (x_1, 0, -x_1) + (0, x_2, -x_2) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1).$$

Notăm cu $\bar{e}_1 = (1, 0, -1)$ și $\bar{e}_2 = (0, 1, -1)$ vectorii care generează subspațiul $\text{Ker}T$. Deoarece \bar{e}_1 și \bar{e}_2 sunt liniar independenți (temă - a se vedea Capitolul 3 „Spații vectoriale”), rezultă că mulțimea $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ este o bază pentru $\text{Ker}T$ și astfel $\dim \text{Ker}T = 2$, ceea ce este echivalent cu faptul că $\text{def } T = 2$.

Vom determina acum mulțimea $\text{Im}T$. Din definiția imaginii unei transformări liniare avem că

$$\text{Im } T = \{\bar{y} \in \mathbf{R}^3 | \text{există } \bar{x} \in \mathbf{R}^3 \text{ astfel încât } T(\bar{x}) = \bar{y}\}.$$

Relația $T(\bar{x}) = \bar{y}$, pentru $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ conduce la sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = y_1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_2 \\ x_1 + x_2 + x_3 = y_3 \end{cases}$$

Din definiția imaginii lui T , se observă că interesează vectorii $\bar{y} \in \mathbf{R}^3$ pentru care există $\bar{x} \in \mathbf{R}^3$ a.î. $T(\bar{x}) = \bar{y}$, prin urmare nu este necesară găsirea soluției sistemului anterior, ci doar studierea sistemului compatibil.

Sistemul obținut este unul liniar omogen, având matricea coeficienților

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Deoarece determinantul său este $\Delta = \det D = 0$, alegem ca minor principal $\Delta_p = 1 \neq 0$.

Minorii caracteristici asociați vor fi

$$\Delta_{c1} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \end{vmatrix} = y_2 - y_1,$$

$$\Delta_{c2} = \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_3 \end{vmatrix} = y_3 - y_1,$$

$$\Delta_{c3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & y_1 \\ 1 & 1 & y_2 \\ 1 & 1 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Se disting astfel trei cazuri:

a) $\Delta_{c1} = \Delta_{c2} = 0 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = y_3 - y_1 = 0 \Leftrightarrow y_2 = y_3 = y_1$. În acest caz, alegând prima ecuație ca și ecuație principală, iar ca necunoscute secundare pe x_2, x_3 , sistemul este unul compatibil dublu nedeterminat. Deoarece nu este necesară determinarea soluției sistemului anterior, ci doar studierea compatibilității, rezultă că

$$ImT = \{\bar{y} = (y_1, y_1, y_1) \mid y_1, y_2 \in \mathbf{R}\}, \text{ deoarece } y_2 = y_3 = y_1.$$

Notăm cu $\bar{e}_3 = (1, 1, 1)$ vectorul care generează subspațiul ImT . Deoarece \bar{e}_3 este liniar independent (evident – fiind nenul și singurul), rezultă că mulțimea $\{\bar{e}_3\}$ este o bază pentru ImT și astfel $\dim ImT = 1$, ceea ce este echivalent cu faptul că $rang T = 1$.

b) $\Delta_{c1} \neq 0, \Delta_{c2} = 0 \Leftrightarrow y_2 - y_1 \neq 0, y_3 - y_1 = 0 \Leftrightarrow y_2 \neq y_3 = y_1$. În acest caz, sistemul este incompatibil, prin urmare acest caz nu prezintă interes.

c) $\Delta_{c1} = 0, \Delta_{c2} \neq 0 \Leftrightarrow y_2 - y_1 = 0, y_3 - y_1 \neq 0 \Leftrightarrow y_2 = y_3 \neq y_1$. În acest caz, sistemul este incompatibil, prin urmare nici acest caz nu prezintă interes. \square

Aplicații propuse

\square **A4.1** Să se arate că aplicația $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, T(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$ este o transformare liniară.

\square **A4.2** Să se arate că aplicația $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, T(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$ este o transformare liniară.

\square **A4.3** Fie operatorul liniar $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, T(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 - 3x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine $KerT$ și $Im T$.

\square **A4.3** Fie operatorul liniar $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2, T(\bar{x}) = (x_1 + 3x_2, 2x_1 - x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine $KerT$ și $Im T$.

\square **A4.4** Se consideră transformarea liniară $T: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3, T(\bar{x}) = (x_3, x_1 - x_2 + x_3, x_3)$ pentru orice $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$. Se cere:

i) Să se calculeze $T(\bar{u})$, unde $\bar{u} = (1, 2, 3)$.

ii) Să se determine matricea asociată lui T în baza canonică din \mathbf{R}^3 .

iii) Să se determine $KerT$ și ImT .

Unitatea de învățare V.
Valori proprii. Vectori proprii

Cuprins

5.1. Valori și vectori proprii	72
5.2. Reducerea unei matrice la forma diagonală	79
Aplicații propuse	82

5.1. Valori și vectori proprii

Fie V un K -spațiu vectorial de dimensiune n și $T \in L_K(V)$ un endomorfism al lui V .

□ **Definiția 5.1.** Un vector $x \in V \setminus \{0\}$, se numește **vector propriu** al endomorfismului (transformării liniare) $T \in L_K(V)$ dacă există $\lambda \in K$ astfel încât $T(x) = \lambda x$ (sau $(T - \lambda \cdot 1_V)(x) = 0$). Scalarul λ se numește **valoare proprie** a lui T , iar x se numește **vector propriu** al lui T , corespunzător valorii proprii λ . Mulțimea tuturor valorilor proprii ale lui T se numește **spectrul** lui T .

□ **Teorema 5.1.** Dacă $\lambda \in K$ este o valoare proprie pentru $T \in L_K(V)$, atunci mulțimea tuturor vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ , plus vectorul nul al spațiului, este un subspațiu vectorial al lui V , invariant în raport cu T .

Prin urmare, mulțimea

$$V_\lambda = \{x \in V \mid T(x) = \lambda x\}$$

se numește **subspațiu propriu corespunzător valorii proprii λ** .

În plus, oricare ar fi $x \in V_\lambda$ rezultă că $T(x) = \lambda x$ (deci $T(x)$ este o combinație liniară a vectorului x), rezultă că $T(x) \in V_\lambda$.

□ **Teorema 5.2.**

1. Unui vector propriu al lui T , îi corespunde o singură valoare proprie.
2. Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sunt liniar independenți.
3. Subspațiile proprii corespunzătoare la valori proprii distincte, sunt disjuncte.

Fie B o bază în spațiul vectorial V , iar $A = (a_{ij})$ matricea asociată lui T în baza B , adică $A = M_B$. Un vector x din V se va descompune în baza B

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i$$

iar dacă notăm cu X coloana componentelor vectorului x în baza B , adică $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$,

conform definiției vectorului propriu, se va obține o definiție similară în scriere matriceală:

$$x \in V \text{ este vector propriu dacă } TX = \lambda X.$$

De asemenea, știm că, pentru transformarea liniară T avem scrierea matriceală (4.3) $TX = AX$ astfel că din cele două relații obținem

$$AX = \lambda X \text{ sau, echivalent, } (A - \lambda I_n)X = 0,$$

relație care după înlocuirea matricelor A și X devine

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

adică un sistem liniar și omogen.

□ **Observația 5.1.**

i) Dacă se cunosc valorile proprii ale transformării liniare T , cu alte cuvinte, ale matricei asociate A , sistemul de mai sus permite determinarea vectorilor proprii atașați.

ii) Subspațiul propriu V_α asociat unei valori proprii α a lui T este mulțimea

$$V_\alpha = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (A - \lambda \cdot I_n)X = O_n\}, \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ iar } O_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Determinarea vectorilor proprii nenuli presupune ca sistemul liniar și omogen obținut mai sus să aibă soluții nenule, fapt echivalent cu anularea determinantului matricei sistemului, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

□ **Definiția 5.2.** Polinomul de grad n ,

$$P(\alpha) = \det(A - \lambda I_n). \quad (5.2)$$

se numește **polinom caracteristic** al transformării liniare T în baza B , sau **polinom caracteristic** al matricei A .

Astfel, valorile proprii ale transformării liniare T sunt rădăcinile polinomului caracteristic $P(\lambda)$.

□ **Teorema 5.3.** Polinomul caracteristic al matricei A are expresia:

$$P(\lambda) = (-1)^n [\lambda^n - \delta_1 \lambda^{n-1} + \delta_2 \lambda^{n-2} + \dots + (-1)^n \delta_n],$$

unde δ_1 este urma matricii A , (deci $\delta_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$), δ_2 este suma minorilor principali de ordinul doi cu elemente de pe diagonala principală, ai matricei $A - \lambda I_n, \dots, \delta_n = \det A$.

□ **Definiția 5.3.** Ecuația

$$P(\lambda) = 0 \text{ respectiv } \det(A - \alpha I_n) = 0 \quad (5.3)$$

se numește **ecuația caracteristică** a transformării liniare T , sau **ecuația caracteristică** a matricei A .

□ **Observația 5.2.** Rădăcinile din corpul K ale ecuației caracteristice sunt valorile proprii ale transformării liniare T .

□ **Propoziția 5.1.** Polinomul caracteristic al unei transformări liniare este invariant față de schimbările de bază ale spațiului vectorial.

□ **Teorema 5.4. (Teorema Hamilton-Cayley)** Orice matrice este rădăcină a propriului său polinom caracteristic.

□ **Teorema 5.5.** Două matrice asemenea au același polinom caracteristic.

□ **Exemple 5.1**

1. Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, dată prin matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai endomorfismului T .

Soluție. Polinomul caracteristic al matricei A este (vezi (5.2)):

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 5 \\ 5 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)^2 - 25 = \lambda^2 - 6\lambda - 16.$$

Astfel, ecuația caracteristică (6) devine

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

ecuație care are drept rădăcini valorile proprii: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2$.

În cele ce urmează se determină subspațiile proprii asociate valorilor proprii determinate.

Din **Observația 5.1** punctul ii), subspațiul propriu asociat unei valori proprii λ a lui T este mulțimea

$$V_\lambda = \{x = (x_1, x_2) \mid (A - \lambda \cdot I_2)X = O_2\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \text{ iar } O_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda_1 = 8$ subspațiul propriu asociat este

$$V_8 = \{x = (x_1, x_2) \mid (A - 8 \cdot I_2)X = O_2\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 8 \cdot I_2)X = O_2$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} -5 & 5 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} -5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $x_1 = x_2, x_2 \in \mathbf{R}$.

Astfel, subspațiul propriu V_8 devine

$$V_8 = \{\bar{x} = (x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$$

sau

$$V_8 = \{\bar{x} = x_2(1,1) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

În mod similar, pentru $\lambda_2 = -2$ subspațiul propriu asociat este

$$V_{-2} = \{x = (x_1, x_2) \mid (A + 2 \cdot I_3)X = O_2\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A + 2 \cdot I_3)X = O_3$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 = 0 \\ 5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $x_1 = -x_2, x_2 \in \mathbf{R}$.

Astfel, subspațiul propriu V_{-2} devine

$$V_{-2} = \{\bar{x} = (-x_2, x_2) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}$$

sau

$$V_{-2} = \{\bar{x} = x_2(-1,1) \mid x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

2. Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, dată prin matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Să se

determine valorile proprii și vectorii proprii ai endomorfismului T .

Soluție. Polinomul caracteristic al matricei A este (vezi (5.2)):

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda)$$

Astfel, ecuația caracteristică (6) devine

$$(2 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda) = 0,$$

ecuație care are drept rădăcini valorile proprii: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$.

În cele ce urmează se determină subspațiile proprii asociate valorilor proprii determinate. Din **Observația 5.1** punctul ii), subspațiul propriu asociat unei valori proprii λ a lui T este mulțimea

$$V_\lambda = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid (A - \lambda \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ iar } O_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda_1 = 2$ subspațiul propriu asociat este

$$V_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid (A - 2 \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 2 \cdot I_3)X = O_3$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluția

$$x_1 \in \mathbf{R}, x_2 = x_3 = 0.$$

Astfel, subspațiul propriu V_2 devine

$$V_2 = \{\bar{x} = (x_1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}$$

sau

$$V_2 = \{\bar{x} = x_1 (1, 0, 0) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}.$$

Pentru $\lambda_2 = 0$ subspațiul propriu asociat este

$$V_0 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid (A - 0 \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 0 \cdot I_3)X = O_3$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $x_1 = 0, x_2 = -x_3, x_3 \in \mathbf{R}$.

Astfel, subspațiul propriu V_0 devine

$$V_0 = \{\bar{x} = (0, -x_3, x_3) \mid x_3 \in \mathbf{R}\}$$

sau

$$V_0 = \{\bar{x} = x_3 (0, -1, 1) \mid x_3 \in \mathbf{R}\}.$$

Pentru $\lambda_1 = 1$ subspațiul propriu asociat este

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid (A - 1 \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 1 \cdot I_3)X = O_3$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $x_2 = 0, x_1 = -x_3, x_3 \in \mathbf{R}$.

Astfel, subspațiul propriu V_1 devine

$$V_1 = \{\bar{x} = (-x_3, 0, x_3) | x_3 \in \mathbf{R}\}$$

sau

$$V_1 = \{\bar{x} = x_3(-1, 0, 1) | x_3 \in \mathbf{R}\}.$$

3. Se consideră transformarea liniară $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, dată prin matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai endomorfismului T .

Soluție. Polinomul caracteristic al matricei A este (vezi (5.2)):

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2(2 - \lambda).$$

Astfel, ecuația caracteristică (6) devine

$$(1 - \lambda)^2(2 - \lambda) = 0,$$

ecuație care are drept rădăcini valorile proprii: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2$.

În cele ce urmează se determină subspațiile proprii asociate valorilor proprii determinate. Din **Observația 5.1** punctul ii), subspațiul propriu asociat unei valori proprii λ a lui T este mulțimea

$$V_\lambda = \{x = (x_1, x_2, x_3) | (A - \lambda \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ iar } O_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pentru $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ subspațiul propriu asociat este

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3) | (A - 1 \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 1 \cdot I_3)X = O_3$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

care are soluția $x_3 = -x_2, x_1 \in \mathbf{R}$.

Astfel, subspațiul propriu V_1 devine

$$V_1 = \{\bar{x} = (x_1, x_2, -x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$$

și folosind descompunerea

$$(x_1, x_2, -x_2) = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, -x_2)$$

se obține

$$V_1 = \{\bar{x} = (x_1, 0, 0) + (0, x_2, -x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}.$$

În mod similar, pentru $\lambda_3 = 2$ subspațiul propriu asociat este

$$V_2 = \{x = (x_1, x_2, x_3) \mid (A - 2 \cdot I_3)X = O_3\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 2 \cdot I_3)X = O_3$ este echivalentă cu ecuația

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

respectiv cu sistemul

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

care are soluția

$$x_3 = x_1, x_2 = 0.$$

Astfel, subspațiul propriu V_2 devine

$$V_2 = \{\bar{x} = (x_1, 0, x_1) \mid x_1 \in \mathbf{R}\}.$$

4. Fie $T : \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^4$ endomorfismul dat prin matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Să se determine valorile proprii și vectorii proprii ai endomorfismului T .

Soluție:

Polinomul caracteristic $P(\lambda)$ este

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 - \lambda & 4 & -2 \\ 2 & -1 & -\lambda & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

sau

$$P(\lambda) = -(\lambda - 1)^4$$

și are ca și rădăcini valorile proprii ale matricei A . Din ecuația caracteristică $P(\lambda) = 0$ se obțin rădăcinile $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$, adică o valoare proprie multiplă de ordinul patru.

Pentru a determina vectorii proprii ai lui T , se consideră subspațiul propriu

$$V_1 = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid (A - 1 \cdot I_4)X = O_4\} \text{ unde } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Ecuția matriceală $(A - 1 \cdot I_4)X = O_4$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$\begin{cases} x_1 = \alpha, \\ x_2 = 2\alpha + \beta, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = 2\beta, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Așadar valorii proprii $\lambda_1 = 1$ îi corespunde subspațiul propriu

$$\begin{aligned} V_{-1} &= \{x = (\alpha, 2\alpha + \beta, \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \\ &= \{(\alpha, 2\alpha, 0, 0) + (0, 0, \beta, 2\beta) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \\ &= \{\alpha(1, 2, 0, 0) + \beta(0, 1, 1, 2) \mid \alpha, \beta \in \mathbf{R}\} \end{aligned}$$

generat de doi vectori proprii liniar independenți

$$v_1 = (1, 2, 0, 0), v_2 = (0, 1, 1, 2),$$

bază a subspațiului propriu V_{-1} .

5. Folosind teorema Hamilton-Cayley să se calculeze A^{-1} pentru matricea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soluție: Polinomul caracteristic al matricei A este

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix}$$

sau $P(\lambda) = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6$.

Conform teoremei Hamilton-Cayley rezultă

$$A^3 - 6A^2 + 11A - 6 = O_3.$$

Relația de mai sus poate fi pusă în forma

$$A(A^2 - 6A + 11I_3) = 6I_3$$

de unde rezultă

$$A^{-1} = \frac{1}{6}(A^2 - 6A + 11I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Observația 5.3. În Exemplul anterior, se observă două situații distincte: în 2 s-au obținut trei valori proprii distincte, în timp ce în 3 există două valori proprii distincte, iar una dintre ele este o rădăcină multiplă a ecuației caracteristice.

5.2. Reducerea unei matrice la forma diagonală

Fie V un \mathbf{K} -spațiu vectorial de dimensiune n .

□ **Definiția 5.4.** Un endomorfism $T: V \rightarrow V$ se numește **diagonalizabil** dacă există o bază $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ astfel încât matricea lui în această bază să fie diagonală (adică toate elementele sunt nule, cu excepția celor de pe diagonala principală).

Matricele din clasa de asemănare care îi corespunde endomorfismului T se numesc **matrice diagonalizabile**.

□ **Teorema 5.6.** *Un endomorfism $T: V \rightarrow V$ este diagonalizabil dacă și numai dacă polinomul caracteristic are toate rădăcinile în corpul comutativ \mathbf{K} , peste care este luat V și dimensiunea fiecărui subspațiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare.*

□ **Concluzii:** Practic, pentru diagonalizarea unui endomorfism $T: V \rightarrow V$ se procedează în felul următor:

1. Se fixează o bază în V și se determină matricea $A = (a_{ij})$ a endomorfismului T în această bază, $A = M_B$.
2. Se determină valorile proprii, care sunt soluțiile în \mathbf{K} ale ecuației $P(\lambda) = 0$.
3. Pentru valorile proprii distincte $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ cu ordinele de multiplicitate m_1, \dots, m_p , se calculează dimensiunea subspațiului propriu asociat, $V(\lambda_j)$. Dacă $\dim V(\lambda_j) = m_j, j = \overline{1, p}$, atunci T este diagonalizabil.
4. Se rezolvă cele p sisteme omogene $(A - \lambda_j I_n)X = 0_n$. Un sistem fundamental de soluții pentru un asemenea sistem, este reprezentat de componentele vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_j .
5. Matricea endomorfismului T , în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui T , are pe diagonală elementele $\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\alpha_1}\text{-ori}}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_{\alpha_p}\text{-ori}}$, adică valorile proprii, iar restul elementelor sale sunt egale cu 0.
6. Se notează prin $A' \in M_{n \times n}(\mathbf{K})$ matricea diagonală atașată endomorfismului T , în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui T .

Dacă $S \in M_{n \times n}(\mathbf{K})$ este matricea ale cărei coloane sunt vectorii proprii care alcătuiesc noua bază a lui V , adică matricea de trecere de la baza inițială din V (baza canonică în \mathbf{R}^n) la baza formată din vectorii proprii, atunci $A' = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

□ Exemple 5.2

Să se cerceteze dacă matricea a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

este diagonalizabilă. În caz afirmativ să se determine matricea diagonală.

Soluție. Din **Exercițiul 5.1**, 1 se obține că ecuația caracteristică $P(\lambda) = 0$ (formula (5.3)) este echivalentă cu

$$\lambda^2 - 6\lambda - 16 = 0,$$

iar rădăcinile ei (valorile proprii), reale și distincte: $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = -2$ având ordinele de multiplicitate

$$m_{\lambda_1} = 1, m_{\lambda_2} = 1.$$

Subspațiile proprii ale valorilor proprii sunt

$$V_8 = \{\bar{x} = x_2(1,1) | x_2 \in \mathbf{R}\}$$

$$V_{-2} = \{\bar{x} = x_2(-1,1) | x_2 \in \mathbf{R}\}$$

iar vectorii proprii care le generează sunt :

$$\bar{e}'_1 = (1,1), \bar{e}'_2 = (-1,1)$$

și astfel avem

$$\dim V(\lambda_1) = 1 = m_{\lambda_1}, \dim V(\lambda_2) = 1 = m_{\lambda_2}.$$

În concluzie, matricea A este diagonalizabilă.

Vectorii \bar{e}'_1, \bar{e}'_2 constituie o nouă bază în \mathbf{R}^2 , iar matricea de trecere la această bază este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde se obține

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

b) Din Exercițiul 5.1, 2 se obține că ecuația caracteristică (5.3) $P(\lambda) = 0$ este echivalentă cu

$$(2 - \lambda)(-\lambda)(1 - \lambda) = 0$$

iar rădăcinile ei (valorile proprii), reale și distincte,

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1$$

având ordinele de multiplicitate

$$m_{\lambda_1} = 1, m_{\lambda_2} = 1, m_{\lambda_3} = 1.$$

Subspațiile proprii ale valorilor proprii sunt

$$V_2 = \{\bar{x} = x_1(1,0,0) | x_1 \in \mathbf{R}\}$$

$$V_0 = \{\bar{x} = x_3(0,-1,1) | x_3 \in \mathbf{R}\}$$

$$V_1 = \{\bar{x} = x_3(-1,0,1) | x_3 \in \mathbf{R}\}$$

iar vectorii proprii care le generează sunt :

$$\bar{e}'_1 = (1,0,0), \bar{e}'_2 = (0,-1,1), \bar{e}'_3 = (-1,0,1)$$

și astfel avem

$$\dim V(\lambda_1) = 1 = m_{\lambda_1}, \dim V(\lambda_2) = 1 = m_{\lambda_2}, \dim V(\lambda_3) = 1 = m_{\lambda_3}.$$

În concluzie, matricea A este diagonalizabilă.

Vectorii $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ constituie o nouă bază în \mathbf{R}^3 , iar matricea de trecere la această bază este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de unde se obține

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Polinomul caracteristic al matricei A este:

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix}$$

sau

$$P(\lambda) = \lambda(1 - \lambda)^2(\lambda - 6).$$

Ecuția caracteristică (5.3) $P(\lambda) = 0$
echivalentă cu

$$\lambda(1 - \lambda)^2(\lambda - 6) = 0$$

are rădăcinile (valorile proprii) reale

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1 \text{ și } \lambda_4 = 6$$

având ordinele de multiplicitate

$$m_{\lambda_1} = 1, m_{\lambda_2} = 2, m_{\lambda_4} = 1.$$

Deoarece rangul matricii $\mathbf{A} - \lambda_1 I_4$ este egal cu 3, se obține un singur vector propriu liniar independent corespunzător lui λ_1 .

Ecuția matriceală $(\mathbf{A} - \lambda_1 I_4)X = O_4$, $X = {}^t(x_1, x_2, x_3, x_4)$ este echivalentă cu sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0, \\ x_2 = 0, \\ x_3 - 2x_4 = 0, \end{cases}$$

cu soluția

$$\begin{cases} x_1 = -\alpha, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 2\alpha, \\ x_4 = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_1 = 0$ este

$$V(\lambda_1) = \{\bar{x} = (-\alpha, 0, 2\alpha, \alpha) | \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\bar{x} = \alpha(-1, 0, 2, 1) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Vectorul propriu liniar independent care generează subspațiul propriu $V(\lambda_1)$ este $\bar{e}'_1 = (-1, 0, 2, 1)$, deci

$$\dim V(\lambda_1) = 1 = m_{\lambda_1},$$

unde m_{λ_1} este ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_1 .

Analog, $\text{rang}(\mathbf{A} - \lambda_2 I_4) = 2$ și deci valorii proprii duble $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ îi corespund doi vectori proprii liniar independenți. Ecuția matriceală $(\mathbf{A} - \lambda_2 I_4)X = O_4$, este echivalentă cu sistemul:

$$\begin{cases} x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_3 + 4x_4 = 0, \end{cases}$$

având soluția

$$\begin{cases} x_1 = 2\beta, \\ x_2 = \alpha, \\ x_3 = \beta, \\ x_4 = 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Subspațiul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_2 = 1$ este

$$V(\lambda_2) = \{\bar{x} = (2\beta, \alpha, \beta, 0) | \alpha \in \mathbb{R}\} = \{\bar{x} = \alpha(0, 1, 0, 0) + \beta(2, 0, 1, 0) | \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Așadar, valorii proprii λ_2 îi corespund vectorii proprii liniar independenți

$$\bar{e}'_2 = (0, 1, 0, 0), \bar{e}'_3 = (2, 0, 1, 0).$$

Deci

$$\dim V(\lambda_2) = 2 = m_{\lambda_2}$$

unde m_{λ_2} este ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_2 .

Deoarece $\text{rang}(A - \lambda_4 I_4) = 3$ rezultă că valorii proprii $\lambda_4 = 6$ îi corespunde un singur vector propriu liniar independent. Efectuând calculele, se obține că

$$\bar{e}'_4 = (1, 0, -2, 5).$$

Astfel,

$$\dim V(\lambda_4) = 1 = m_{\lambda_4}$$

unde m_{λ_4} este ordinul de multiplicitate al valorii proprii λ_4 . În concluzie, matricea A este diagonalizabilă.

Vectorii $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ constituie o nouă bază în \mathbf{R}^4 , iar matricea de trecere la această bază este

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

de unde se obține

$$A' = S^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

□

Aplicații propuse

□ **A5.1** Fie operatorul liniar $T: R^2 \rightarrow R^2$, $T(\bar{x}) = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 2x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine: a) matricea endomorfismului în raport cu baza canonică din R^2 ; b) forma diagonală precum și baza în raport cu care admite formă diagonală.

□ **A5.2** Fie operatorul liniar $T: R^2 \rightarrow R^2$, $T(\bar{x}) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1 + 3x_2)$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine: a) matricea endomorfismului în raport cu baza canonică din R^2 ; b) forma diagonală precum și baza în raport cu care admite formă diagonală.

□ **A5.3** Fie operatorul liniar $T: R^3 \rightarrow R^3$, $T(\bar{x}) = (2x_1 + x_2, x_2, 2x_1 + x_2 + 3x_3)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine: a) matricea endomorfismului în raport cu baza canonică din R^3 ; b) forma diagonală precum și baza în raport cu care admite formă diagonală.

Cuprins

6.1. Forme biliniare. Definiție. Exemple. Matrice atașată	84
6.2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică	87
6.3. Clasificarea formelor pătratice. Signatură	93
Aplicații propuse	94

6.1. Forme biliniare. Definiție. Exemple. Matrice atașată

Fie V un spațiu vectorial real.

□ **Definiția 6.1.** Se numește **formă biliniară** pe V o aplicație $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ cu proprietățile:

1. Oricare ar fi $x_1, x_2, y_1, y_2, x, y \in V$, rezultă:

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2, y) &= g(x_1, y) + g(x_2, y), \\ g(x, y_1 + y_2) &= g(x, y_1) + g(x, y_2), \end{aligned}$$

(liniaritate în fiecare argument).

2. Oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$ și $x, y \in V$, rezultă

$$g(\alpha x, y) = \alpha \cdot g(x, y), \quad g(x, \alpha y) = \alpha \cdot g(x, y),$$

(omogenitate).

□ **Observația 6.1.** Condițiile 1 și 2 din definiția 1 sunt echivalente cu condițiile:

Oricare ar fi $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ și $x, y, z \in V$, rezultă

$$g(\alpha x + \beta y, z) = \alpha \cdot g(x, z) + \beta \cdot g(y, z)$$

și

$$g(x, \alpha y + \beta z) = \alpha \cdot g(x, y) + \beta \cdot g(x, z).$$

□ **Definiția 6.2.** O formă biliniară $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ se numește **simetrică** dacă pentru orice $x, y \in V$ rezultă: $g(x, y) = g(y, x)$.

□ **Definiția 6.3.** O formă biliniară simetrică g se numește **pozitiv semidefinită** dacă pentru orice $x \in V$: $g(x, x) \geq 0$, și **pozitiv definită** dacă este pozitiv semidefinită și în plus, $g(x, x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$.

Dacă pentru orice $x \in V$: $g(x, x) \leq 0$, g se numește **negativ semidefinită**, iar dacă în plus $g(x, x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$, g se numește **negativ definită**.

Fie V un spațiu vectorial n -dimensional peste câmpul \mathbf{R} și fie $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază fixată în V . Fie vectorii $x, y \in V$ având descompunerile în baza \mathbf{B}

$$x = \sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \quad y = \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j.$$

Atunci avem

$$g(x, y) = g\left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot e_i, \sum_{j=1}^n y_j \cdot e_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j \cdot g(e_i, e_j)$$

și dacă se notează $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, se obține

$$g(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j$$

egalitate care arată că forma biliniară g determină matricea $G = (g_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$, când baza \mathbf{B} este fixată și reciproc, matricea $G \in M_n(\mathbf{R})$ determină complet forma biliniară g .

$$\text{Dacă se introduc matricele coloană } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R}), \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}(\mathbf{R})$$

atașate vectorilor x și y , atunci expresia analitică $g(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j$ a formei biliniare poate fi scrisă sub forma matriceală: $(g(x, y)) = {}^t X \cdot G \cdot Y$.

Aplicația care asociază fiecărei forme biliniare $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, matricea ei în raport cu o bază dată a spațiului V este un izomorfism între spațiul vectorial $B(V, \mathbf{R})$ și spațiul vectorial $M_{n \times n}(\mathbf{R})$. În consecință $\dim B(V, \mathbf{R}) = \dim M_n(\mathbf{R}) = n^2$.

□ **Definiția 6.4.** Matricea $G = (g_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$, unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, $i, j = \overline{1, n}$, se numește **matricea atașată formei biliniare** g în baza \mathbf{B} , iar expresia $g(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} x_i y_j$ se numește **expresia analitică** a formei biliniare față de baza considerată.

□ **Teorema 6.1.** Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n și $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară. Dacă $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ și $\mathbf{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ sunt baze fixate în V , $A = (a_{ij})$ este matricea de trecere, iar $G = (g_{ij})$ și $G' = (g'_{ij})$ sunt matricele asociate formei g în cele două baze, atunci $G' = {}^t A \cdot G \cdot A$.

□ **Corolar 6.1.** $\text{rang } G = \text{rang } G'$.

□ **Definiția 6.5.** Dacă matricea G este nesingulară (respectiv singulară), atunci g se numește **nedegenerată** (respectiv **degenerată**). **Rangul formei biliniare** g se definește ca fiind rangul matricei sale într-o bază oarecare a spațiului vectorial.

□ **Teorema 2.** O formă biliniară $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, este simetrică (respectiv antisimetrică) dacă și numai dacă matricea formei într-o bază a spațiului este simetrică (respectiv antisimetrică).

□ **Definiția 6.2.** Fie $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$, o formă biliniară. Se numește **nucleu** al formei biliniare g mulțimea: $\text{Ker } g = \{x \in V : g(x, y) = 0, \text{ pentru orice } y \in V\}$.

□ **Teorema 6.3. (teorema rangului)** Fie $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară simetrică. Atunci:

$$\text{rang } g = \dim V - \dim(\text{Ker } g).$$

□ Exemple 6.1

1. Să se demonstreze că orice produs scalar real este o formă biliniară, simetrică și pozitiv definită.

Soluție: Dacă aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ este un produs scalar real, atunci se obține:

$$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$$

$$\langle x, \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \beta \langle x, z \rangle$$

oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$ și pentru orice $x, y, z \in V$ și deci $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este o formă biliniară.

Deoarece $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$, oricare ar fi $x, y \in V$, rezultă că aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este și simetrică, în plus $\langle x, x \rangle \geq 0$, pentru orice $x \in V$ și $\langle x, x \rangle = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$, deci aplicația $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este pozitiv definită.

2. În spațiul vectorial \mathbf{R}^4 se consideră următoarea formă biliniară:

$$g : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}, g(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_4 y_1 + x_4 y_4,$$

oricare ar fi $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \bar{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbf{R}^4$.

i) Să se scrie matricea lui g în baza canonică din \mathbf{R}^4 .

ii) Să se găsească matricea lui g în baza:

$$\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1 = (1, 1, 1, 1), \bar{e}'_2 = (0, 1, 2, 1), \bar{e}'_3 = (0, 1, 1, 0), \bar{e}'_4 = (1, 0, 0, 2)\}$$

Soluție: i) Deoarece matricea G , are componentele $g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$, $i, j = \overline{1, 3}$, vom determina aceste elemente folosind vectorii bazei canonice din \mathbf{R}^4

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1, 0), \bar{e}_4 = (0, 0, 0, 1)\}.$$

Astfel, pe de o parte $g_{11} = g(\bar{e}_1, \bar{e}_1)$, iar pe de altă parte, înlocuind în expresia formei biliniare g

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_4 y_1 + x_4 y_4$$

avem

$$g(\bar{e}_1, \bar{e}_1) = g\left(\left(\underbrace{1}_{x_1}, \underbrace{0, 0}_{\dots}, \underbrace{0}_{x_4}\right), \left(\underbrace{1}_{y_1}, \underbrace{0, 0}_{\dots}, \underbrace{0}_{y_4}\right)\right),$$

$$= 2 * 1 * 1 + 1 * 0 * 1 + 1 * 0 * 0 + 3 * 0 * 0 + 1 * 0 * 1 + 1 * 0 * 0 = 2$$

deci $g_{11} = 2$.

Continuând raționamentul, avem $g_{12} = g(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ respectiv

$$g(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 2 * 1 * 0 + 1 * 0 * 0 + 1 * 0 * 1 + 3 * 0 * 0 + 1 * 0 * 1 + 1 * 0 * 0 = 0,$$

deci $g_{12} = 0$.

Vom aplica acest raționament și pentru $g_{21} = g(\bar{e}_2, \bar{e}_1)$. Avem

$$g(\bar{e}_2, \bar{e}_1) = 2 * 0 * 1 + 1 * 1 * 1 + 1 * 1 * 0 + 3 * 0 * 0 + 1 * 0 * 1 + 1 * 0 * 0 = 1,$$

deci $g_{21} = 1$.

Se obțin în final componentele matricii G

$$g_{11} = 2, g_{21} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 3, g_{41} = 1, g_{44} = 1$$

restul coeficienților fiind nuli. Astfel, matricea lui g în baza B este:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mai mult, dacă se consideră expresia generală forme biliniare

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 g_{ij} x_i y_j$$

$$= g_{11} x_1 y_1 + g_{12} x_1 y_2 + \dots + g_{44} x_4 y_4$$

și se identifică coeficienții din expresia formei biliniare g

$$g(\bar{x}, \bar{y}) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_2 y_2 + 3x_3 y_3 + x_4 y_1 + x_4 y_4$$

se obține

$$g_{11} = 2, g_{21} = 1, g_{22} = 1, g_{33} = 3, g_{41} = 1, g_{44} = 1$$

restul coeficienților fiind nuli. Cu alte cuvinte, matricea asociată este $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Comparând cele două matrici se constată că sunt identice. Prin urmare, dacă este vorba de **baza canonică**, matricea G se poate determina prin identificarea coeficienților din expresia lui g din enunț.

ii) Matricea de trecere de la baza canonică B la baza B' este

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Matricea lui } g \text{ în baza } B' \text{ este } G' = {}^t S \cdot G \cdot S = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 4 & 6 \\ 10 & 14 & 7 & 4 \\ 5 & 7 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

6.2. Forme pătratice. Reducerea la forma canonică

Fie V un spațiu vectorial real și $g : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă biliniară simetrică.

□ **Definiția 6.7.** Se numește *formă pătratică* asociată lui g , funcția $h : V \rightarrow \mathbf{R}$, $h(x) = g(x, x)$, oricare ar fi $x \in V$; g se numește *forma polară* sau *forma dedublată* a lui h . Dacă g este pozitiv definită (negativ definită), atunci forma pătratică h se numește *pozitiv definită* (*negativ definită*), adică $h(x) > 0$, pentru orice $x \neq 0$; $h(x) = 0$ dacă și numai dacă $x = 0$ (analog pentru negativ definită).

□ **Observația 6.2** Forma polară g a formei pătratice h este dată de relația

$$g(x, y) = \frac{1}{2}[h(x + y) - h(x) - h(y)]$$

oricare ar fi $x, y \in V$.

□ **Exemple 6.2**

În spațiul euclidian $(\mathbf{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cu produsul scalar uzual, se dă forma pătratică:

$$h(\bar{x}) = 3(x_1)^2 + 10x_1x_2 + 3(x_2)^2, \text{ pentru } \bar{x} = (x_1, x_2).$$

Să se determine forma polară g a formei pătratice h .

Soluție: Folosind expresia formei pătratice, obținem:

$$h(\bar{x}) = 3(x_1)^2 + 10x_1x_2 + 3(x_2)^2$$

$$h(\bar{y}) = 3(y_1)^2 + 10y_1y_2 + 3(y_2)^2$$

respectiv

$$\begin{aligned} h(\bar{x} + \bar{y}) &= 3(x_1 + y_1)^2 + 10(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) + 3(x_2 + y_2)^2 \\ &= 3(x_1)^2 + 6x_1y_1 + 3(y_1)^2 + 10x_1x_2 + 10x_1y_2 \\ &\quad + 10y_1x_2 + 10y_1y_2 + 3(y_1)^2 + 6y_1y_2 + 3(y_2)^2. \end{aligned}$$

Astfel, utilizând expresia polare a unei forme pătratice,

$$g(x, y) = \frac{1}{2}[h(x + y) - h(x) - h(y)]$$

avem

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2} \left\{ \underline{3(x_1)^2} + 6x_1y_1 + \underline{3(y_1)^2} + \underline{10x_1x_2} + 10x_1y_2 + 10y_1x_2 + \underline{10y_1y_2} + \right. \\ &= \left. \underline{3(y_1)^2} + 6y_1y_2 + \underline{3(y_2)^2} - \left[\underline{3(x_1)^2} + \underline{10x_1x_2} + \underline{3(x_2)^2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \underline{3(y_1)^2} + \underline{10y_1y_2} + \underline{3(y_2)^2} \right\} \end{aligned}$$

sau

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \frac{1}{2}(6x_1y_1 + 10x_1y_2 + 10y_1x_2 + 6y_1y_2) \\ &= 3x_1y_1 + 5x_1y_2 + 5y_1x_2 + 3y_1y_2. \end{aligned}$$

□ **Definiția 6.8.** Matricea $G = (g_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ atașată formei biliniare simetrice g se numește *matricea atașată formei pătratice* h .

□ **Definiția 6.9.** Se numește *formă canonică a unei forme pătratice* $h : V \rightarrow \mathbf{R}$, $\dim V = n$, orice scriere a sa într-o bază a lui V , de forma $h(x) = \sum_{i=1}^n g_{ii}x_i^2$ cu $g_{ii} \in \mathbf{R}$ și nu toate neapărat nenule.

□ **Observația 6.3.** În această bază, matricea atașată formei pătratice este o matrice diagonală.

□ **Teorema 6.4. (de reducere la forma canonică)** Fie V un spațiu euclidian, $\dim V = n$ și $h : V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică pe V . Atunci există o bază ortonormată $\mathbf{B}' \subset V$, astfel încât matricea asociată formei pătratice h să fie diagonală, adică în care h să aibă forma canonică.

□ **Observația 6.4.** Baza \mathbf{B}' este compusă din versorii proprii ai matricei G , iar elementele diagonale ale matricei G' sunt tocmai valorile proprii (nu neapărat distincte) ale matricei G . Din acest motiv, metoda de reducere la forma canonică conținută în această teoremă se numește **metoda valorilor proprii**.

□ **Teorema 6.5. (metoda lui Gauss)** Dacă $h : V \rightarrow \mathbf{R}$, unde V este un spațiu vectorial real, $\dim V = n$, este o formă pătratică pe spațiul V , iar $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază în V , față de care $h(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ astfel încât $G = (g_{ij}) \neq O_n$ (O_n - matricea nulă), atunci există o bază $\mathbf{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ în V , în care, $h(x') = \sum_{i=1}^n g'_{ii} (x'_i)^2$ unde $x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$.

□ **Teorema 6.6. (metoda lui Jacobi)** Fie V un spațiu vectorial real, $\dim V = n$, $h : V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică, $\mathbf{B} = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ o bază oarecare fixată în V , față de care $h(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n g_{ij} \cdot x_i \cdot x_j$ unde $g_{ij} = g(e_i, e_j)$, g fiind polara lui h . Dacă numerele reale

$$\Delta_1 = g_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det G$$

(adică determinanții diagonali ai matricei simetrice asociate lui h) sunt nenuli, atunci există o bază $\mathbf{B}' = \{e'_1, e'_2, \dots, e'_n\}$ a lui V , față de care h are forma canonică

$$h(x') = \sum_{i=1}^n \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} (x'_i)^2$$

unde $x = \sum_{i=1}^n x'_i e'_i$ și $\Delta_0 = 1$.

□ Exemple 6.3

1. Să se scrie forma pătratică definită de forma biliniară simetrică

$$g : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, g(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + 2x_1 y_2 + 2x_2 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1$$

și să se determine rangul ei.

Soluție: Deoarece $h(\bar{x}) = g(\bar{x}, \bar{x})$, se obține

$$h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3.$$

Rangul formei pătratice fiind rangul matricei acesteia în baza canonică, ținând cont că matricea

lui g este $G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, rezultă că $\text{rang } h = \text{rang } G = 3$.

2. În spațiul euclidian $(\mathbf{R}^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cu produsul scalar uzual, se dă forma pătratică:

$$h(\bar{x}) = 3(x_1)^2 + 10x_1 x_2 + 3(x_2)^2.$$

Să se reducă h la forma canonică, folosindu-se metoda valorilor proprii.

Soluție: Matricea simetrică G atașată formeii pătratice h în baza canonică

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0), \bar{e}_2 = (0, 1)\}$$

este $G = (g_{ij}), g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j), i, j = \overline{1, 2}$.

Expresia generală a formeii pătratice h este

$$h(\bar{x}) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 g_{ij} x_i x_j$$

$$= g_{11} (x_1)^2 + 2g_{12} x_1 x_2 + g_{22} (x_2)^2$$

iar prin identificarea coeficienților din expresia formeii pătratice g

$$h(\bar{x}) = 3(x_1)^2 + 10x_1 x_2 + 3(x_2)^2$$

se obține

$$g_{11} = 3, 2g_{12} = 10 \rightarrow g_{12} = 2 = g_{21}, g_{22} = 3$$

adică

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Polinomul caracteristic al matricei G este:

$$P(\alpha) = \det(G - \alpha I_2)$$

unde

$$G - \alpha I_2 = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \alpha & 5 \\ 5 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

astfel polinomul P va avea expresia

$$P(\alpha) = \begin{vmatrix} 3 - \alpha & 5 \\ 5 & 3 - \alpha \end{vmatrix} = (3 - \alpha)^2 - 25 = \alpha^2 - 6\alpha - 16.$$

Valorile proprii, (rădăcinile polinomului caracteristic), sunt soluții ale ecuației caracteristice

$$P(\alpha) = 0 \text{ sau } \alpha^2 - 6\alpha - 16 = 0$$

cu soluția $\alpha_1 = 8, \alpha_2 = -2$, deci forma canonică a formei pătratice h este

$$h(x) = 8(x'_1)^2 - 2(x'_2)^2,$$

cu matricea $G' = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Pentru a determina o bază în care are loc această formă canonică este necesar să se determine subspațiile proprii asociate valorilor proprii (a se vedea capitolul Transformări liniare).

Pentru $\alpha_1 = 8$ se obține subspațiul propriu $V_8 = \{\bar{x} = x_2(1,1) | x_2 \in \mathbf{R}\}$, din care se extrage vectorul $\bar{e}'_1 = (1,1)$ având versorul $\bar{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Analog, pentru $\alpha_2 = -2$ se obține subspațiul propriu $V_{-2} = \{\bar{x} = x_2(-1,1) | x_2 \in \mathbf{R}\}$, din care se extrage vectorul $\bar{e}'_2 = (-1,1)$ având versorul $\bar{e}'_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Matricea de trecere de la baza canonică \mathbf{B} la baza $\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ este:

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

3. În spațiul euclidian $(\mathbf{R}^3, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ cu produsul scalar uzual, se dă forma pătratică:

$$h(x) = 2(x_2)^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

Să se reducă h la forma canonică, folosindu-se metoda valorilor proprii.

Soluție: Matricea simetrică G atașată formei pătratice h în baza canonică

$$\mathbf{B} = \{\bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1)\}$$

este $G = (g_{ij}), g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j), i, j = \overline{1, 3}$ adică $G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

Polinomul caracteristic al matricei G este:

$$P(\alpha) = \det(G - \alpha I_3) = \begin{vmatrix} -\alpha & 2 & -4 \\ 2 & 2 - \alpha & -2 \\ -4 & -2 & -\alpha \end{vmatrix} = \alpha(\alpha + 4)(\alpha - 6).$$

Valorile proprii sunt: $\alpha_1 = -4, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 6$, deci forma canonică a formei pătratice h este

$$h(x) = -4(x'_1)^2 + 6(x'_3)^2,$$

cu matricea $G' = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Pentru a determina o bază în care are loc această formă canonică este necesar să se determine subspațiile proprii asociate valorilor proprii.

Pentru $\alpha_1 = -4$ se obține subspațiul propriu $V_{-4} = \{a(1, 0, 1) \mid a \in \mathbf{R}\}$, din care se extrage vectorul $\bar{e}'_1 = (1, 0, 1)$ având versorul $\bar{e}'_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Analog se obțin $\bar{e}'_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \bar{e}'_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Matricea de trecere de la baza canonică \mathbf{B} la baza $\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ este:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

4. Utilizând metoda lui Gauss să se reducă la forma canonică următoarele forme pătratice:

a) $h : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}, h(\bar{x}) = (x_1)^2 + 6x_1x_2 + 2(x_2)^2$; pentru orice $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$;

b) $h : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$, pentru orice $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$

pentru orice $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$ și să se determine baza corespunzătoare acestei forme canonice.

Soluție : a) Din primii doi termeni, (care îl conțin pe x_1), folosind formula

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

se construiește un pătrat

$$(x_1)^2 + 6x_1x_2 = (x_1)^2 + 6x_1x_2 + 9(x_2)^2 - 9(x_2)^2 = (x_1 + 3x_2)^2 - 9(x_2)^2$$

de unde, prin înlocuire, se obține

$$h(\bar{x}) = (x_1 + 3x_2)^2 - 9(x_2)^2 + 2(x_2)^2 = (x_1 + 3x_2)^2 - 7(x_2)^2.$$

Efectuând schimbările de coordonate

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 3x_2 \\ x'_2 = x_2 \end{cases} \text{ echivalent } \begin{cases} x'_1 = 1 * x_1 + 3 * x_2 \\ x'_2 = 0 * x_1 + 1 * x_2 \end{cases} \text{ sau, în exprimare matriceală,} \\ \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

acestea sugerează alegerea unei baze $\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2\}$ astfel încât

$$\bar{x} = x'_1 \bar{e}'_1 + x'_2 \bar{e}'_2$$

în care expresia lui h devine

$$h(\bar{x}) = (x'_1)^2 - 7(x'_2)^2$$

adică h este redusă la forma canonică.

Deoarece $X' = S^{-1}X$, unde $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, iar S este matricea de trecere de la baza \mathbf{B} la baza \mathbf{B}' (a se vedea capitolul Spații euclidiene) rezultă că inversa matricii S este

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

iar matricea S este $S = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Deoarece coloanele matricii S conțin componentele vectorilor din baza \mathbf{B}' relativ la baza \mathbf{B} (\mathbf{B} fiind baza canonică), rezultă că baza corespunzătoare formei canonice a lui h este:

$$\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1 = (1, 0), \bar{e}'_2 = (-3, 1)\}.$$

b) Pentru a reduce la forma canonică forma pătratică h , se rescrie expresia acesteia grupând termenii lui h astfel

$$h(\bar{x}) = (x_1)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + (x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 2x_2x_3,$$

adică se vor trece pe primele poziții termenii care îl conțin pe x_1 .

Din primii trei termeni, folosind formula

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

se construiește un pătrat

$$\begin{aligned} (x_1)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 &= (x_1)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + \underline{4(x_2)^2} + \underline{(x_3)^2} + \underline{4x_2x_3} \\ &\quad - \underline{4(x_2)^2} - \underline{(x_3)^2} - \underline{4x_2x_3} \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4(x_2)^2 - (x_3)^2 - 4x_2x_3 \end{aligned}$$

de unde, prin înlocuire, se obține

$$h(\bar{x}) = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 3(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - 2x_2x_3.$$

Efectuând schimbările de coordonate

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = x_3 \end{cases} \text{ echivalent } \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

acestea sugerează alegerea unei baze $\mathbf{B}' = \{\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3\}$ astfel încât

$$\bar{x} = x'_1 \bar{e}'_1 + x'_2 \bar{e}'_2 + x'_3 \bar{e}'_3$$

în care expresia lui h devine

$$h(\bar{x}) = (x'_1)^2 - 3(x'_2)^2 + 2(x'_3)^2 - 2x'_2x'_3.$$

Deoarece $X' = (S')^{-1}X$, unde $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, iar S' este matricea de trecere de

la baza \mathbf{B} la baza \mathbf{B}' (a se vedea capitolul Spații euclidiene), inversa matricii S' este

$$(S')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Continuând procedeul pentru grupul $-3(x'_2)^2 + 2(x'_3)^2 - 2x'_2x'_3$ din expresia lui $h(x)$ folosind formula

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

avem

$$-3(x'_2)^2 + 2(x'_3)^2 - 2x'_2x'_3 = -3\left(x'_2 + \frac{1}{3}x'_3\right)^2 + \frac{7}{3}(x'_3)^2$$

adică

$$h(\bar{x}) = (x'_1)^2 - 3\left(x'_2 + \frac{1}{3}x'_3\right)^2 + \frac{7}{3}(x'_3)^2.$$

Efectuând schimbările de coordonate

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1 \\ x''_2 = x'_2 + \frac{1}{3}x'_3 \\ x''_3 = x'_3 \end{cases} \text{ echivalent } \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix},$$

acestea sugerează alegerea bazei $\mathbf{B}'' = \{\bar{e}''_1, \bar{e}''_2, \bar{e}''_3\}$ astfel încât

$$\bar{x} = x''_1 \bar{e}''_1 + x''_2 \bar{e}''_2 + x''_3 \bar{e}''_3$$

în care expresia lui h devine

$$h(\bar{x}) = (x''_1)^2 - 3(x''_2)^2 + \frac{7}{3}(x''_3)^2.$$

Matricea de trecere S'' de la baza B' la baza B'' are inversa $(S'')^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

În baza B'' expresia lui h devine

$$h(\bar{x}) = (x''_1)^2 - 3(x''_2)^2 + \frac{7}{3}(x''_3)^2,$$

adică h este redusă la forma canonică. Matricea de trecere S de la baza B la baza B'' este:

$$S = S' \cdot S'' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a se vedea Observația 6 din Capitolul Spații vectoriale).

Deoarece coloanele matricei S conțin componentele vectorilor din baza B'' relativ la baza B (B fiind baza canonică), rezultă că baza corespunzătoare formei canonice a lui h este:

$$B'' = \left\{ \bar{e}''_1 = (1, 0, 0), \bar{e}''_2 = (-2, 1, 0), \bar{e}''_3 = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1\right) \right\}.$$

5. Se dă forma pătratică:

$$h(\bar{x}) = 5(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Utilizând metoda lui Jacobi să se reducă h la forma canonică.

Soluție: Matricea simetrică G atașată formei pătratice h în baza canonică

$$B = \{ \bar{e}_1 = (1, 0, 0), \bar{e}_2 = (0, 1, 0), \bar{e}_3 = (0, 0, 1) \}$$

este $G = (g_{ij})$, $g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$, $i, j = \overline{1, 3}$ adică $G = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Determinanții diagonali sunt

$$\Delta_0 = 1, \Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 80.$$

Toți acești determinanți sunt nenuli și pozitivi. Forma canonică a lui h este

$$h(\bar{x}') = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (x'_2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} (x'_3)^2 = \frac{1}{5} (x'_1)^2 + \frac{5}{26} (x'_2)^2 + \frac{13}{40} (x'_3)^2$$

unde $\bar{x} = x'_1 \bar{e}'_1 + x'_2 \bar{e}'_2 + x'_3 \bar{e}'_3 \in \mathbf{R}^3$, iar noua bază $B' = \{ \bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3 \}$ se construiește de forma:

$$\begin{cases} \bar{e}'_1 = a_{11} \bar{e}_1 \\ \bar{e}'_2 = a_{21} \bar{e}_1 + a_{22} \bar{e}_2 \\ \bar{e}'_3 = a_{31} \bar{e}_1 + a_{32} \bar{e}_2 + a_{33} \bar{e}_3 \end{cases}$$

cu condiția ca

$$g(\bar{e}'_i, \bar{e}'_j) = 0, 1 \leq j < i \leq 3$$

și $g(\bar{e}'_i, \bar{e}'_i) = 1, i = \overline{1, 3}$ iar $g_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ sunt elementele lui G .

Rescriind cele de mai sus, avem:

$$\left. \begin{cases} g(\bar{e}'_1, \bar{e}_1) = a_{11} g_{11} \\ g(\bar{e}'_1, \bar{e}_1) = 1 \end{cases} \right\} \rightarrow a_{11} = \frac{1}{5},$$

$$\left. \begin{cases} g(\bar{e}'_2, \bar{e}_1) = a_{21} g_{11} + a_{22} g_{12} \\ g(\bar{e}'_2, \bar{e}_1) = 0 \\ g(\bar{e}'_2, \bar{e}_2) = a_{21} g_{21} + a_{22} g_{22} \\ g(\bar{e}'_2, \bar{e}_2) = 0 \end{cases} \right\} \rightarrow a_{21} = \frac{1}{13}, a_{22} = \frac{5}{26}.$$

$$\left. \begin{aligned} g(\bar{e}'_3, \bar{e}_1) &= a_{31}g_{11} + a_{32}g_{12} + a_{33}g_{13} \\ g(\bar{e}'_3, \bar{e}_1) &= 0 \\ g(\bar{e}'_3, \bar{e}_2) &= a_{31}g_{12} + a_{32}g_{22} + a_{33}g_{23} \\ g(\bar{e}'_3, \bar{e}_2) &= 0 \\ g(\bar{e}'_3, \bar{e}_3) &= a_{31}g_{13} + a_{32}g_{23} + a_{33}g_{33} \\ g(\bar{e}'_3, \bar{e}_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a_{31} = \frac{3}{20}, a_{32} = \frac{1}{20}, a_{33} = \frac{13}{40}.$$

Cu aceste rezultate, relațiile de legătură dintre vectorii noii baze și a celei vechi sunt:

$$\bar{e}'_1 = \frac{1}{5}\bar{e}_1, \bar{e}'_2 = \frac{1}{13}\bar{e}_1 + \frac{5}{26}\bar{e}_2, \bar{e}'_3 = \frac{3}{20}\bar{e}_1 + \frac{1}{20}\bar{e}_2 + \frac{13}{40}\bar{e}_3.$$

6.3. Clasificarea formelor pătratice. Signatură

Fie V un spațiu vectorial real, $\dim V = n$, $h : V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică și $G = (g_{ij})$, $G \in M_n(\mathbf{R})$, $(g_{ij} = g(e_i, e_j))$ matricea asociată formei într-o bază ortonormată fixată în V , $B = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$. Prin metoda transformărilor ortogonale se poate determina o matrice ortogonală A , astfel încât din relația $X = AY$ se obține forma canonică: $h(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i (y_i)^2$, unde $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sunt valori proprii reale (și eventual nule) ale matricei G . Printr-o renumerotare convenabilă se poate presupune că $\alpha_1, \dots, \alpha_r > 0$ și $\alpha_{r+1}, \dots, \alpha_s < 0$ unde $r > 0$, $s > 0$ și $r + s \leq n$.

Din definiția rangului unei forme pătratice, rezultă că acesta este $r + s$ prin urmare, dacă $r + s < n$ forma pătratică este degenerată.

□ **Definiția 6.10.** Numărul natural r se numește **indexul pozitiv** al formei pătratice h , numărul natural s se numește **indexul negativ** al formei pătratice, iar perechea (r, s) se numește **signatura** formei pătratice.

□ **Propoziția 6.1.** Fie V un spațiu vectorial, n -dimensional și $h : V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică. Atunci h este pozitiv definită dacă și numai dacă $\text{rang}(h) = n$ și signatura este $(n, 0)$ (adică indexul negativ este nul), iar dacă signatura este $(0, n)$ (altfel spus indexul pozitiv este nul), forma este negativ definită.

Un criteriu care să ofere condiții necesare și suficiente pentru ca o formă pătratică dată să fie pozitiv-definită (respectiv negativ-definită) este dat de teorema:

□ **Teorema 6.7. (criteriul Sylvester)** Fie V un spațiu vectorial real, $\dim V = n$, $h : V \rightarrow \mathbf{R}$ o formă pătratică și $G = (g_{ij})$ matricea atașată formei pătratice în raport cu o bază a spațiului. Forma pătratică h este pozitiv definită (respectiv negativ definită) dacă și numai dacă toți minorii diagonali

$$\Delta_1 = g_{11}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \det G$$

sunt strict pozitivi (respectiv $(-1)^k \Delta_k > 0$, oricare ar fi $k = \overline{1, n}$).

□ Exemple 6.4

Să se determine signatura formei pătratice

$$h : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}, h(\bar{x}) = 5(x_1)^2 + 6(x_2)^2 + 4(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3.$$

Soluție: Utilizând metoda lui Jacobi, o expresie canonică a formei pătratice h este, conform **Exercițiului 6.3.5.**

$$h(x') = \frac{\Delta_0}{\Delta_1} (x'_1)^2 + \frac{\Delta_1}{\Delta_2} (x'_2)^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_3} (x'_3)^2 = \frac{1}{5} (x'_1)^2 + \frac{5}{26} (x'_2)^2 + \frac{13}{40} (x'_3)^2$$

rezultă că indexul pozitiv este $r = 3$ și indexul negativ este $s = 0$, de unde signatura formei pătratice h este $(3, 0)$, adică h este pozitiv definită.

Același rezultat se obține utilizând criteriul Sylvester, deoarece toți minorii diagonali sunt strict pozitivi.

Aplicații propuse

□ **A6.1** Fie forma pătratică $h: R^2 \rightarrow R^2$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine forma canonică a lui h utilizând metoda lui Gauss.

□ **A6.2** Fie forma pătratică $h: R^2 \rightarrow R^2$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 - 2(x_2)^2 - 4x_1x_2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine forma canonică a lui h utilizând metoda lui Gauss.

□ **A6.3** Fie forma pătratică $h: R^3 \rightarrow R^3$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine forma canonică a lui h utilizând metoda lui Gauss.

□ **A6.4** Fie forma pătratică $h: R^2 \rightarrow R^2$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 - 2(x_2)^2 - 4x_1x_2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine forma canonică a lui h utilizând metoda lui Jacobi.

□ **A6.5** Fie forma pătratică $h: R^2 \rightarrow R^2$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$. Să se determine forma canonică a lui h utilizând metoda lui Jacobi.

□ **A6.6** Fie forma pătratică $h: R^3 \rightarrow R^3$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3$, $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine forma canonică a lui h utilizând metoda lui Jacobi.

□ **A6.7** Să se determine polara formei pătratice:

a) $h: R^2 \rightarrow R^2$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$

b) $h: R^2 \rightarrow R^2$, $h(\bar{x}) = (x_1)^2 - 2(x_2)^2 - 4x_1x_2$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$.

Cuprins

7.1	Concepte de optimizare matematică	96
7.2	Probleme de programare liniară	97
7.3	Mulțimi convexe	98
7.4	Soluțiile unei probleme de programare liniară (PPL)	99
7.5	Probleme de programare liniară duale	100

7.1. Concepte de optimizare matematică

□ **Definiția 7.1:** Se spune că este definită o **problemă de optimizare sau de programare matematică** dacă se cere determinarea valorii maxime (sau a valorii minime) a unei funcții de una sau mai multe variabile, care sunt supuse unui anumit număr de condiții sau restricții.

Forma generală a unei probleme de optimizare sau programare matematică este:

$$\begin{cases} [opt]f = f(x) \\ g(x) \leq b \\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D \subseteq \mathbf{R}^n \end{cases} \quad (7.1)$$

unde:

- $[opt] \in \{min; max\}$ reprezintă cerința de optimizare (maximizare sau minimizare) a funcției f ;
- f este o funcție de n variabile și se numește **funcție obiectiv** (sau **funcție cost** sau **funcție profit**, conform tipului de problemă studiat);
- $g = (g_1, g_2, \dots, g_m)$ este un vector de m funcții $g_i: D \rightarrow \mathbf{R}, i = \overline{1, m}$;
- $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ este un vector de m valori reale;
- $g(x) \leq b$ reprezintă **restricțiile** sau **condițiile** problemei de optimizare, (semnul înseamnă semnul $<$, ori $>$, ori \leq , ori \geq);
- Domeniul $D \subseteq \mathbf{R}^n$ (adesea $D \subseteq \mathbf{R}_+^n$, adică $x \geq 0$) reprezintă **restricțiile de semn** ale variabilelor problemei de optimizare și sunt necesare datorită caracterului economic real al variabilelor (d.p.d.v. strict matematic putem rezolva și problemele în care aceste condiții nu apar).

□ **Definiția 7.2:** Orice soluție a sistemului de restricții $g(x) \leq b$ se numește **soluție admisibilă** (sau **soluție posibilă** sau **program**) a(l) problemei de optimizare (7.1).

Mulțimea soluțiilor admisibile sau posibile se notează cu:

$$X_a = \{x \in D: g(x) \leq b\}. \quad (7.2)$$

□ **Definiția 7.3:** Orice soluție admisibilă a problemei de optimizare (7.1), care optimizează (maximizează sau minimizează) funcția obiectiv f se numește **soluție optimă**.

Mulțimea soluțiilor optime se notează cu:

$$X_o = \left\{ x_o \in D: f(x_o) = \underset{x \in X_a}{[opt]f} \right\}. \quad (7.3)$$

□ **Definiția 7.4:** Se spune că mulțimea soluțiilor admisibile X_a (și respectiv mulțimea soluțiilor optime X_o) este:

- (1) **discretă**, dacă este finită sau cel mult numărabilă;
- (2) **continuă** (sau de puterea continuului), dacă nu este numărabilă.

□ **Definiția 7.5:** Se spune că o problemă de programare matematică este:

- (1) **cu variabile discrete**, dacă mulțimea soluțiilor admisibile X_a (și respectiv mulțimea soluțiilor optime X_o) este discretă;
- (2) **cu variabile continue** (sau de puterea continuului), dacă mulțimea soluțiilor admisibile X_a (și respectiv mulțimea soluțiilor optime X_o) este continuă.

Din definițiile anterioare rezultă că:

- problema de programare matematică (7.1) are **optim finit unic**, dacă X_o conține un singur element x^o și dacă $f(x^o)$ este un număr real finit;
- problema de programare matematică (7.1) are **optim finit multiplu**, dacă X_o conține cel puțin două elemente, pentru care f ia valori reale finite.

□ **Definiția 7.6:** Se spune că o problemă de programare matematică este:

- (1) **deterministă**, dacă toate elementele sale (funcția obiectiv și restricțiile) sunt definite în mod determinist, fără a utiliza concepte din teoria probabilităților;
- (2) **probabilistă sau stohastică**, dacă cel puțin unul din elementele sale (funcția obiectiv sau restricțiile) sunt definite utilizându-se concepte din teoria probabilităților.

□ **Definiția 7.7:** Se spune că o problemă de programare matematică este:

- (1) **liniară**, dacă toate elementele sale (funcția obiectiv și restricțiile) sunt definite prin relații liniare;
- (2) **neliniară**, dacă cel puțin unul din elementele sale (funcția obiectiv sau restricțiile) sunt definite prin relații neliniare.

7.2 Probleme de programare liniară

□ **Definiția 7.8:** Se spune că o **problemă de programare liniară** (PPL) este definită sub **formă canonică extinsă**, dacă este scrisă sub forma:

$$\begin{cases} [\max]f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, & i = \overline{1, m} \\ x_j \geq 0 & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (7.4)$$

pentru o **problemă de maxim**, respectiv sub forma:

$$\begin{cases} [\min]f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, & i = \overline{1, m}, \\ x_j \geq 0 & j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (7.5)$$

pentru o **problemă de minim**.

□ **Definiția 7.9:** Se spune că o **problemă de programare liniară** (problemă PPL) este definită sub **formă vectorială**, dacă este scrisă sub forma:

$$\begin{cases} [\min/\max]f = \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j \leq \mathbf{a}_0, & j = \overline{1, n} \\ x_j \geq 0 \end{cases}$$

unde

$$\mathbf{a}_1 = (a_{11} \ a_{21} \ \dots \ a_{m1})^T, \mathbf{a}_2 = (a_{12} \ a_{22} \ \dots \ a_{m2})^T, \dots, \\ \mathbf{a}_n = (a_{1n} \ a_{2n} \ \dots \ a_{mn})^T, \mathbf{a}_0 = \mathbf{b}.$$

□ **Definiția 7.10:** Se spune că o **problemă de programare liniară** (problemă PPL) este definită sub **formă canonică matriceală**, dacă este scrisă sub forma:

$$\begin{cases} [\max]f = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (7.6)$$

pentru o **problemă de maxim**, respectiv sub forma:

$$\begin{cases} [max]f = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ A\bar{\mathbf{x}} \geq \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (7.7)$$

pentru o problemă de minim, unde:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ este vectorul variabilelor a PPL;
- $\mathbf{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ este vectorul coeficienților funcției obiectiv a PPL;
- $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ este vectorul termenilor liberi ai restricțiilor a PPL;
- $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}}$ este matricea coeficienților restricțiilor PPL;
- $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{x}^T$ este vectorul coloană obținut din vectorul \mathbf{x} , transpus.

Din definițiile anterioare se observă că în forma canonică a problemei de programare liniară, restricțiile apar sub formă de inegalități.

□ **Definiția 7.11:** Se spune că o **problemă de programare liniară** (PPL) este definită sub **formă standard**, dacă restricțiile apar sub formă de egalități.

Atunci, forma standard matriceală a PPL va fi:

$$\begin{cases} [max]f = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (7.8)$$

pentru o problemă de maxim, respectiv:

$$\begin{cases} [min]f = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (7.9)$$

pentru o problemă de minim.

□ **Observația 7.1:** Formele (7.6), (7.7), (7.8), (7.9) ale unei probleme de programare liniară sunt echivalente dacă ținem seama de următoarele:

1. Sensul unei inegalități se schimbă prin înmulțirea cu -1 ;
2. O inecuație de forma $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$, poate fi scrisă ca o ecuație $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + x^c_i = b_i$, prin adăugarea unei noi variabile (numită variabilă de compensare), $x^c_i \geq 0$;
3. O inecuație de forma $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i$, poate fi scrisă ca o ecuație $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - x^c_i = b_i$, prin scăderea unei noi variabile de compensare, $x^c_i \geq 0$;
4. O ecuație poate fi scrisă ca două inecuații de semn contrar;
5. Problemele de maxim pentru funcția f pot fi reduse la o problemă de minim pentru funcția $f' = -f$; cu alte cuvinte, în cazul unei funcții (forme) liniare de tipul $f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ are loc egalitatea :

$$(\max)f(\mathbf{x}) = -(\min)(-f(\mathbf{x})) = -(\min)f'(\mathbf{x}) \text{ pentru } (\forall)\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

Având în vedere cele de mai sus, în continuare ne vom ocupa numai de probleme aflate sub forma standard cu cerința de minimă pentru funcția obiectiv.

7.3 Mulțimi convexe

Fie mulțimea (spațiul vectorial) \mathbf{R}^n și M o submulțime nevidă a sa.

□ **Definiția 7.12:** Mulțimea M se numește **convexă** dacă $(\forall) x_1, x_2 \in M$ și $(\forall) \lambda \in (0,1)$ avem:

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in M. \quad (7.10)$$

□ **Definiția 7.13:** Un element (vector) x al mulțimii convexe M se numește **punct extrem** sau **vârf** al mulțimii M , dacă nu există $x_1 \neq x_2 \in M$ și nu există $\lambda \in (0,1)$ astfel încât

$$x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2.$$

În caz contrar, elementul se numește **punct interior**.

□ **Definiția 7.14:** Numim combinație liniară convexă a elementelor (vectorilor) $x_i \in M, i = \overline{1, m}$ o expresia :

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \text{ cu } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, \lambda_i \in [0,1]. \quad (7.11)$$

□ **Observația 7.2:** Se poate demonstra că orice punct interior se poate scrie ca o combinație liniară convexă de punctele extreme ale mulțimii convexe; de asemenea, conform definiției 7.12, un vârf (punct extrem) al unei mulțimi convexe nu poate fi scris ca o combinație liniară convexă de puncte interioare mulțimii.

7.4 Soluțiile unei probleme de programare liniară (PPL)

Pentru a analiza soluțiile PPL, vom considera forma standard matriceală:

$$\begin{cases} [\text{opt}]f = cx \\ A\bar{x} = \bar{b} \\ x \geq 0 \end{cases}, \quad (7.12)$$

□ **Definiția 7.15:** Se numește **soluție admisibilă** (sau **soluție posibilă** sau **program**) a(l) problemei de programare liniară (7.12) orice soluție care satisface sistemul de restricții $A\bar{x} = \bar{b}$, precum și restricțiile de semn $x \geq 0$.

Mulțimea soluțiilor admisibile sau posibile pentru PPL se notează cu:

$$X_a = \{x \in R_+^n \mid A\bar{x} = \bar{b}, x \geq 0\}. \quad (7.13)$$

□ **Teorema 7.1:** Mulțimea X_a este o mulțime convexă.

□ **Definiția 7.16:** O soluție admisibilă a problemei de programare liniară (7.12) se numește **soluție admisibilă de bază** dacă satisface următoarele condiții:

- (1) are cel mult m componente strict pozitive, iar celelalte sunt zero;
- (2) coloanele matricei A corespunzătoare componentelor strict pozitive sunt vectori liniari independenți.

□ **Observația 7.3:** Mulțimea soluțiilor admisibile de bază o vom nota cu X_{ab} și este o mulțime finită deci evident, nu este o mulțime convexă.

□ **Definiția 7.17:** O soluție de bază a problemei de programare liniară (7.12) se numește:

- (1) **nedegenerată**, dacă are exact m componente strict pozitive;
- (2) **degenerată**, dacă are mai puțin de m componente strict pozitive.

□ **Exemplul 7.1:** Fie problema de programare:

$$\begin{cases} (\min f = 2x_1 + x_2 + 2x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 4 \\ x \geq 0. \end{cases}$$

În baza definițiilor 7.15 și 7.16 se constată că:

$$x_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{ este soluție admisibilă}$$

$$x_2 = (0, 1, 0, 5) \text{ este soluție admisibilă de bază nedegenerată}$$

$$x_3 = (0, 0, 2, 0) \text{ este soluție admisibilă de bază degenerată}$$

$$x_4 = (1, 0, 1, 0) \text{ este soluție admisibilă, dar nu este de bază.} \quad \square$$

□ **Teorema 7.1:** Orice soluție admisibilă de bază a unei probleme de programare liniară, este un punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile X_a și reciproc, orice punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile este o soluție de bază a problemei de programare liniară, cu alte cuvinte are loc:

$$\mathbf{x} \in X_{ab} \Leftrightarrow \mathbf{x} \in X_b, \mathbf{x} \text{ punct de extrem.}$$

Vom presupune, în continuare, fără a restrânge generalitatea, că primele m componente ale lui \mathbf{x} sunt componente bazice (B), iar celelalte componente nebazice (S). Rezultă partiționarea matricei A respectiv a vectorilor \mathbf{x} și \mathbf{c} de forma:

$$A = (\mathbf{B}\mathbf{S}), \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}^B, \mathbf{x}^S) \text{ și } \mathbf{c} = (\mathbf{c}^B, \mathbf{c}^S),$$

Atunci problema de programare liniară se va scrie:

$$\begin{cases} [\text{opt}]f = \mathbf{c}^B \mathbf{x}^B + \mathbf{c}^S \mathbf{x}^S \\ \mathbf{B}\bar{\mathbf{x}}^B + \mathbf{S}\bar{\mathbf{x}}^S = \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (7.14)$$

□ **Definiția 7.18:** Orice soluție admisibilă a problemei de programare liniară (7.10), care optimizează (maximizează sau minimizează) funcția obiectiv f se numește **soluție optimă**.

Mulțimea soluțiilor optime pentru PPL se notează cu:

$$X_o = \left\{ \mathbf{x}_o \in X_a : \mathbf{c}\mathbf{x}_o = \underbrace{[\text{opt}] \mathbf{c}\mathbf{x}}_{\mathbf{x} \in X_a} \right\}. \quad (7.15)$$

□ **Teorema 7.2:** Dacă o problemă de programare are o soluție optimă finită, atunci există un punct extrem al mulțimii soluțiilor admisibile X_a în care funcția obiectiv ia aceeași valoare, adică:

$$\min f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \in \mathbb{R} \text{ (finit)} \Rightarrow (\exists) \mathbf{x} \in X_{ab} \text{ a.î. } f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0. \quad (7.16)$$

Vom determina, în temele următoare, optimul *problemei de programare liniară* prin două metode:

- Metoda grafică;
- Metoda simplex.

7.5 Probleme de programare liniară duale

Pentru fiecare problemă de programare liniară vom defini **problema duală** corespunzătoare. Fie \mathbf{x} și \mathbf{c} vectori n -dimensionali, \mathbf{b} și \mathbf{y} vectori m -dimensionali, iar A o matrice $m \times n$.

□ **Definiția 7.19:** Se spune că **problema de programare liniară duală** pentru problema de programare liniară de maximizare:

$$\begin{cases} [\text{max}]f = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ A\bar{\mathbf{x}} \leq \bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{x} \geq 0 \end{cases}, \quad (7.17)$$

este, prin definiție problema de programare liniară de minimizare:

$$\begin{cases} [\text{min}]g = \mathbf{y}\bar{\mathbf{b}} \\ \mathbf{y}A \geq \mathbf{c} \\ \mathbf{y} \geq 0 \end{cases}. \quad (7.18)$$

□ **Definiția 7.20:** Problema de programare liniară (7.17) se numește **primală**, iar problema de programare liniară (7.18) se numește **duală**.

Din definițiile de mai sus, rezultă că duala dualei unei probleme de programare liniară este chiar problema inițială dată, adică duala dualei coincide cu primala.

Pentru a reprezenta problema de programare liniară primală și cea duală, vom utiliza următorul tablou primal-dual:

f	x_1	x_2	...	x_n	g
y_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	$\leq b_1$
y_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	$\leq b_2$
...
y_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	$\leq b_m$
max	$\geq c_1$	$\geq c_2$...	$\geq c_n$	min

Atunci rezultă următorul **algoritm** de lucru pentru a stabili problema duală:

1. Funcția obiectiv a problemei duale se obține din suma algebrică a produselor elementelor y_1, y_2, \dots, y_m din prima și din ultima coloană a tabelului:

$$g(y_1, y_2, \dots, y_m) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \dots + b_m y_m. \quad (7.19)$$

2. Restricțiile problemei duale se obțin din produsele elementelor y_1, y_2, \dots, y_m din prima coloană cu fiecare din coloanele corespunzătoare variabilelor x_1, x_2, \dots, x_n :

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ \dots \\ a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \geq c_n \end{cases}. \quad (7.20)$$

□ **Exemplul 7.2:** Se consideră următoarea problemă de programare liniară de maximizare:

$$\begin{cases} [max] f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

- (a) Să se determine problemă de programare liniară duală;
- (b) Să se determine duala dualei.

Rezolvare: (a) Avem $m = 3$ și $n = 2$. Construim tabloul primal-dual:

f	x_1	x_2	max
y_1	1	2	≤ 4
y_2	4	2	≤ 12
y_3	-1	1	≤ 1
g	≥ 1	≥ 1	min

Obținem, aplicând relațiile (7.19) și (7.20), problema duală:

$$\begin{cases} [min] g(y_1, y_2, y_3) = 4y_1 + 12y_2 + y_3 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 1 \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}.$$

(b) Construim tabloul dual-primal, transpunând tabloul primal-dual. Rezultă:

g	y_1	y_2	y_3	f
x_1	1	4	$\square 1$	≥ 1
x_2	2	2	1	≥ 1
min	≤ 4	≤ 12	≤ 1	max

Obținem, aplicând un algoritm similar celui anterior, funcția obiectiv a problemei duală a dualei din suma algebrică a produselor elementelor din prima și din ultima coloană a tabelului, iar restricțiile din produsele elementelor din prima coloană cu fiecare din coloanele corespunzătoare variabilelor y_1, y_2, y_3 :

$$\begin{cases} [\max] f(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} .$$

Am arătat astfel că duala dualei coincide cu primala. □

Unitatea de învățare VIII.

Metode grafice de programare liniară

Cuprins

8.1	Regiunea admisibilă	104
8.2	Algoritm pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemelor de programare liniară	105
	Aplicații propuse	112

8.1. Regiunea admisibilă

Metodele grafice de rezolvare a problemelor de programare liniară sunt aplicabile numai pentru modelele de programare liniară cu două variabile.

În general, soluția grafică a unui sistem liniar de inecuații cu două necunoscute (variabile) este un domeniu de valori (un semiplan) numit **domeniu** (sau **regiune**) **admisibil(ă)** (a se vedea

Exemplul 1.6, respectiv **1.7**).

Astfel, considerând inecuația $ax + by + c \leq 0$, cu restricțiile $x, y \geq 0$, regiunea admisibilă se obține prin metoda grafică reprezentând dreapta asociată de ecuație $ax + by + c = 0$ și considerând punctele situate pe și sub această dreaptă din primul cadran. Dacă inegalitatea este strictă, atunci vom considera numai punctele situate sub dreapta dată. Similare, pentru inecuația $ax + by + c \geq 0$, vom considera punctele situate pe și deasupra dreptei asociate.

□ **Exemplul 8.1:** Să se determine regiunea admisibilă pentru inecuația cu două variabile $2x - 3y - 6 \leq 0$, cu restricțiile $x, y \geq 0$.

Rezolvare: Vom reprezenta grafic dreapta de ecuație (d): $2x - 3y - 6 \leq 0$. Pentru intersecția acesteia cu axele avem:

$$\begin{aligned} (d) \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ 2x - 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2x = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow A(3,0) \\ (d) \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ 3y - 6 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = 0 \\ 3y = 6 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow B(0,2). \end{aligned}$$

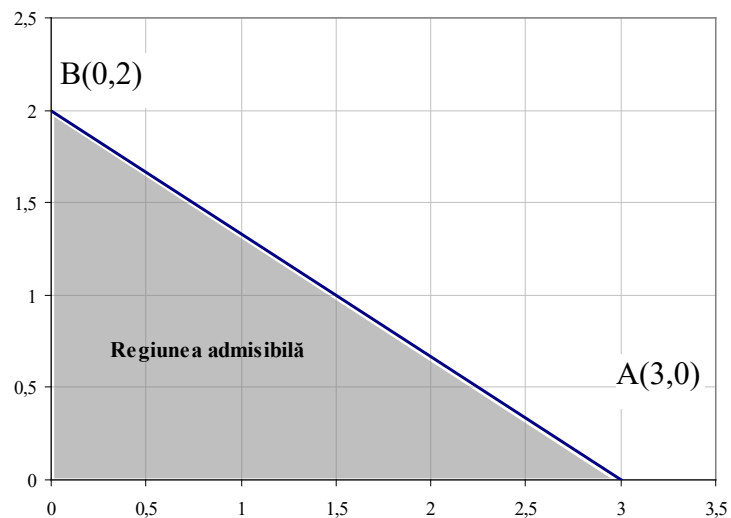


Figura 8.1. Regiunea admisibilă pentru inecuația din Exemplul 8.1

Reprezentarea grafică a regiunii admisibile este redată în Figura 8.1. Orice punct situat pe și sub dreapta (d) din primul cadran va satisface inecuația dată. □

8.2. Algoritm pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemelor de programare liniară

Pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemelor de programare liniară vom aplica următorul algoritm:

Pasul 1: Determinarea funcției obiectiv și a restricțiilor:

(1.1) Determinarea expresiei analitice a funcției obiectiv

$$[opt]f = f(x, y),$$

unde opt este min (minim) sau max (maxim).

(1.2) Determinarea restricțiilor problemei:

$$\begin{cases} f_1(x, y) \leq 0, & (\text{sau } f_1(x, y) \geq 0) \\ f_2(x, y) \leq 0, & (\text{sau } f_2(x, y) \geq 0) \\ \dots \dots \dots \\ f_m(x, y) \leq 0, & (\text{sau } f_m(x, y) \geq 0) \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Pasul 2: Determinarea componentelor regiunii acceptabile:

(2.1) Considerarea dreptelor de ecuații:

$$(d_1): f_1(x, y) = 0,$$

$$(d_2): f_2(x, y) = 0,$$

$$\dots \dots \dots \\ (d_m): f_m(x, y) = 0,$$

(2.2) Determinarea intersecțiilor cu axele ale fiecărei drepte $(d_k): f_k(x, y) = 0, k = \overline{1, m}$:

$$(d_k) \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ f_k(x, 0) = 0 \end{cases}, \quad (d_k) \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ f_k(0, y) = 0 \end{cases};$$

(2.3) Determinarea punctelor de intersecție dintre dreptele $(d_k), k = \overline{1, m}$:

$$(d_1) \cap (d_1) \Rightarrow M_{11}(x_{11}, y_{11}), \dots, (d_i) \cap (d_j) \Rightarrow M_{ij}(x_{ij}, y_{ij}), \dots i = \overline{1, m-1}, j = \overline{2, m}.$$

Pasul 3: Reprezentarea grafică a regiunii admisibile:

(3.1) Reprezentarea grafică a dreptelor $(d_1), (d_2), \dots, (d_m)$;

(3.2) Reprezentarea grafică a regiunii admisibile;

(3.3) Stabilirea punctelor de extrem („vârfurilor”) ale regiunii admisibile:

$$O(0,0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n).$$

Pasul 4: Determinarea valorilor soluțiilor admisibile și a soluției optime:

(4.1) Determinarea valorilor soluțiilor admisibile:

$$O(0,0) \rightarrow f(0,0), M_1(x_1, y_1) \rightarrow f(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n) \rightarrow f(x_n, y_n);$$

(4.2) Determinarea soluției optime:

$$[opt]f = [opt]\{f(0,0), f(x_1, y_1), f(x_n, y_n)\}.$$

□ **Exemplul 8.2:** Să se aplice algoritmul anterior pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} [\max] f(x, y) = 2x + y \\ x + 3y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Rezolvare: Vom aplica algoritmul descris anterior.

Pasul 1: Determinarea funcției obiectiv și a restricțiilor:

(1.1) Determinăm expresia analitică a funcției obiectiv:

$$[\max] f(x, y) = 2x + y;$$

(1.2) Determinăm restricțiile problemei:

$$\begin{cases} x + 3y \leq 6 \\ x + y \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Pasul 2: Determinarea componentelor regiunii acceptabile:

(2.1) Considerăm dreptele de ecuații:

$$(d_1): x + 3y = 6$$

$$(d_2): x + y = 4$$

(2.2) Determinăm intersecțiile fiecărei drepte cu axele de coordonate:

$$(d_1) \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ 3y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(0,2) \quad (d_1) \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow P_2(6,0)$$

$$(d_2) \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow P_3(0,4) \quad (d_2) \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow P_4(4,0).$$

(2.3) Determinăm punctele de intersecție dintre dreptele $(d_1), (d_2)$ rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte:

$$(d_1) \cap (d_2): \begin{cases} x + 3y = 0 \\ x + y = 4 | \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 6 \\ -x - y = -4 \\ 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x + 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow P_5(3,1).$$

Pasul 3: Reprezentarea grafică a regiunii admisibile:

(3.1) Reprezentăm grafic dreptele (d_1) și (d_2) (Figura 8.2);

(3.2) Reprezentăm grafic regiunea admisibilă. Deoarece considerăm semiplanele situate sub cele două drepte, obținem regiunea admisibilă ca fiind aria hașurată din Figura 8.2.

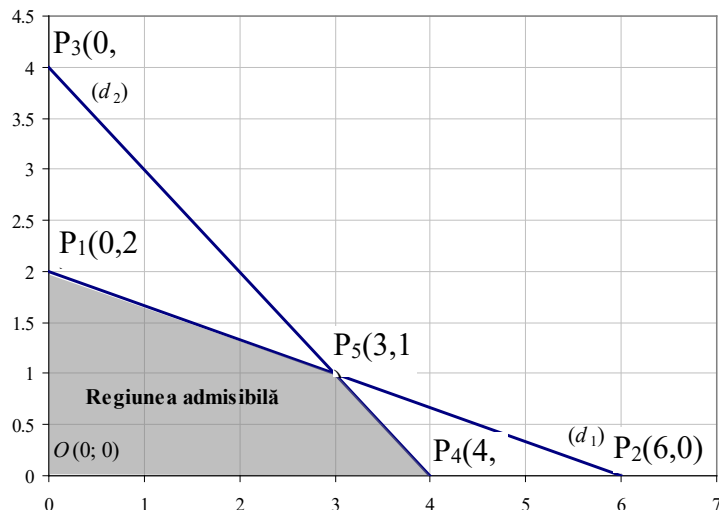


Figura 8.2

(3.3) Stabilim punctele de extrem („vârfurile” sau ” colțurile”) ale regiunii admisibile. Obținem punctele:

$$O(0,0), P_1(0,2), P_5(3,1), P_4(4,0);$$

Pasul 4: Determinarea valorilor soluțiilor admisibile și a soluției optime:

(4.1) Determinăm valorile soluțiilor admisibile:

$$\begin{aligned} O(0,0) &\rightarrow f(0,0) = 2 \cdot 0 + 0 = 0 \\ P_1(0,2) &\rightarrow f(0,2) = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \\ P_5(3,1) &\rightarrow f(3,1) = 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ P_4(4,0) &\rightarrow f(4,0) = 2 \cdot 4 + 0 = 8 \end{aligned}$$

(4.2) Determinăm soluția optimă:

$$[\max]f(x, y) = 2x + y = [\max]\{f(0,0) = 0, f(0,2) = 2, f(3,1) = 7, f(4,0) = 8\} = 8. \quad \square$$

□ Exemplul 8.3: Să se aplice algoritmul anterior pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} [\min]f(x, y) = x + y \\ 3x + 2y \geq 8 \\ x + 3y \geq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Rezolvare: Vom aplica algoritmul descris anterior.

Pasul 1: Determinarea funcției obiectiv și a restricțiilor:

(1.1) Determinăm expresia analitică a funcției obiectiv $[\min]f(x, y) = x + y$;

(1.2) Determinăm restricțiile problemei:

$$\begin{cases} 3x + 2y \geq 8 \\ x + 3y \geq 11 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Pasul 2: Determinarea componentelor regiunii acceptabile:

(2.1) Considerăm dreptele de ecuații:

$$\begin{aligned} (d_1): 3x + 2y &= 8 \\ (d_2): x + 3y &= 11 \end{aligned}$$

(2.2) Determinăm intersecțiile fiecărei drepte cu axele de coordonate:

$$\begin{aligned} (d_1) \cap Oy &: \begin{cases} x = 0 \\ 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 6 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(0,6) \\ (d_1) \cap Ox &: \begin{cases} y = 0 \\ 3x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow P_2(4,0) \\ (d_2) \cap Oy &: \begin{cases} x = 0 \\ 3y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow P_3\left(0, \frac{11}{3}\right) \\ (d_2) \cap Ox &: \begin{cases} y = 0 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow P_4(11,0) \end{aligned}$$

(2.3) Determinăm punctele de intersecție dintre dreptele (d_1) , (d_2) rezolvând sistemul format din ecuațiile celor două drepte:

$$\begin{aligned} (d_1) \cap (d_2) &: \begin{cases} 3x + 2y = 8 \mid \cdot (-1) \\ x + 3y = 11 \mid \cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y = -8 \\ 3x + 9y = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x - 2y = -8 \\ 7y = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x + 3 \cdot 3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow P_5(2,3). \end{aligned}$$

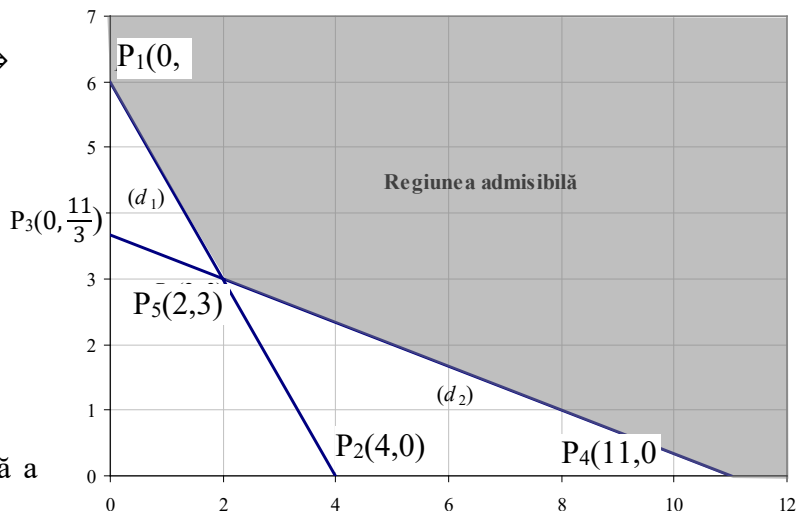


Figura 8.3

Pasul 3: Reprezentarea grafică a regiunii admisibile:

(3.1) Reprezentăm grafic dreptele (d_1) și (d_2) (Figura 8.3);

(3.2) Reprezentăm grafic regiunea admisibilă. Deoarece considerăm semiplanele situate deasupra celor două drepte, obținem regiunea admisibilă ca fiind aria hașurată din Figura 8.3.

(3.3) Stabilim punctele de extrem („vârfurile” sau „colțurile”) ale regiunii admisibile. Obținem punctele:

$$P_1(0,6), P_5(2,3), P_4(11,0);$$

Pasul 4: Determinarea valorilor soluțiilor admisibile și a soluției optime:

(4.1) Determinăm valorile soluțiilor admisibile:

$$\begin{aligned} P_1(0,6) &\rightarrow f(0,6) = 0 + 6 = 6 \\ P_5(2,3) &\rightarrow f(2,3) = 2 + 3 = 5 \quad ; \\ P_4(11,0) &\rightarrow f(11,0) = 11 + 0 = 11 \end{aligned}$$

(4.2) Determinăm soluția optimă:

$$[\min]f(x, y) = x + y = [\min]\{f(0,6) = 6, f(2,3) = 5, f(11,0) = 11\} = 5.$$

□

□ **Exemplul 8.4:** Să se aplice algoritmul anterior pentru rezolvarea prin metoda grafică a problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} [\min]f(x, y) = -2x - y \\ x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases},$$

problemă menționată la pagina 35 în lucrarea lui George B. Dantzig și Mukund N. Thapa „*Linear Programming. 1: Introduction*”, editura Springer, 1997.

Rezolvare: Vom aplica algoritmul descris anterior.

Pasul 1: Determinarea funcției obiectiv și a restricțiilor:

(1.1) Determinăm expresia analitică a funcției obiectiv

$$[\min]f(x, y) = -2x - y;$$

(1.2) Determinăm restricțiile problemei:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 2x + 3y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}.$$

Pasul 2: Determinarea componentelor regiunii acceptabile:

(2.1) Considerăm dreptele de ecuații:

$$(d_1): x + y = 5$$

$$(d_2): 2x + 3y = 8.$$

$$(d_3): x = 4$$

(2.2) Determinăm intersecțiile fiecărei drepte cu axele de coordonate:

$$(d_1) \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow P_1(0,5); \quad (d_1) \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow P_2(5,0)$$

$$(d_2) \cap Oy : \begin{cases} x = 0 \\ 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow P_3(0,4); \quad (d_2) \cap Ox : \begin{cases} y = 0 \\ 2x = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 6 \end{cases} \Leftrightarrow P_4(6,0).$$

Dreapta $(d_3): x = 4$ este o dreaptă paralelă cu Oy , care intersectează Ox în $x = 4$.

(2.3) Determinăm punctele de intersecție dintre dreptele $(d_1), (d_2), (d_3)$, rezolvând sistemele formate din ecuațiile dreptelor:

$$(d_1) \cap (d_2): \begin{cases} x + y = 5 \mid \cdot (-2) \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2y = -10 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow P_5(3,2).$$

$$(d_1) \cap (d_3): \begin{cases} x + y = 5 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 4 + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow P_6(4,1).$$

$$(d_2) \cap (d_3): \begin{cases} 2x + 3y = 8 \\ x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ 2 \cdot 4 + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow P_7\left(4, \frac{4}{3}\right).$$

Pasul 3: Reprezentarea grafică a regiunii admisibile:

(3.1) Reprezentăm grafic dreptele (d_1) , (d_2) , (d_3) și (d_4) (Figura 8.4);

(3.2) Reprezentăm grafic regiunea admisibilă. Deoarece considerăm semiplanele situate dedesubtul celor trei drepte, obținem regiunea admisibilă ca fiind aria hașurată din Figura 8.4.

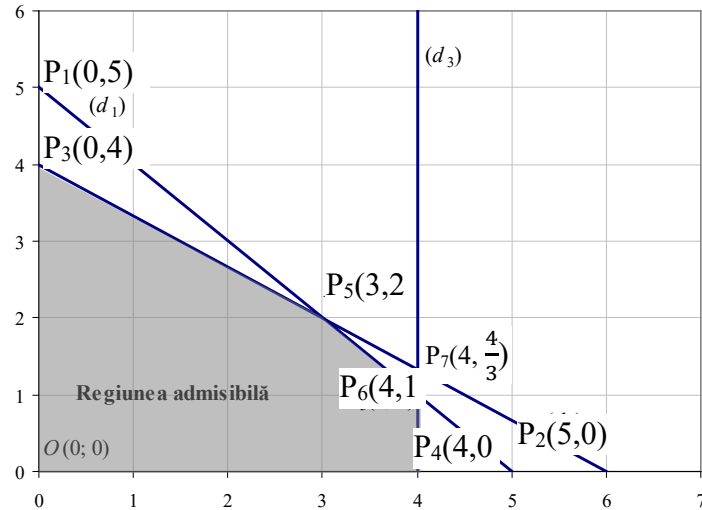


Figura 8.4

(3.3) Stabilim punctele de extrem („vârfurile” sau ”colțurile”) ale regiunii admisibile. Obținem punctele: $(0,0)$, $P_3(0,4)$, $P_5(3,2)$, $P_6(4,1)$, $P_4(4,1)$.

Pasul 4: Determinarea valorilor soluțiilor admisibile și a soluției optime:

(4.1) Determinăm valorile soluțiilor admisibile:

$$\begin{aligned}O(0,0) &\rightarrow f(0,0) = (-2) \cdot 0 - 0 = 0 \\P_3(0,4) &\rightarrow f(0,4) = (-2) \cdot 0 - 4 = -4 \\P_5(3,2) &\rightarrow f(3,2) = (-2) \cdot 3 - 2 = -8; \\P_6(4,1) &\rightarrow f(4,1) = (-2) \cdot 4 - 1 = -9 \\P_4(4,0) &\rightarrow f(4,0) = (-2) \cdot 4 - 1 = -8\end{aligned}$$

(4.2) Determinăm soluția optimă:

$$\begin{aligned}[\min]f(x, y) = x + y &= [\min]\{f(0,0) = 0, f(0,4) = -4, f(3,2) = -8, \\&f(4,1) = -9, f(4,0) = -8\} = f(4,1) = -9\end{aligned}$$

□

Aplicații propuse

□ **A8.1:** Să se rezolve prin metoda grafică problema de maximizare:

$$\begin{cases} [\max]f(x, y) = 3x + 2y \\ x + 2y \leq 48 \\ x + y \leq 30 \\ 2x + y \leq 50 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

□ **A8.2:** Să se rezolve prin metoda grafică problema de minimizare:

$$\begin{cases} [\min]f(x, y) = 12x + 48y \\ x + 3y \geq 3 \\ 2x + 3y \geq 5 \\ 2x + y \geq 3 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

□ **A8.3:** Să se rezolve prin metoda grafică problema de maximizare din Aplicația A11.1.

□ **A8.4:** Să se rezolve prin metoda grafică problema de minimizare din Aplicația A11.2.

□ **A8.5:** Să se rezolve prin metoda grafică problema de maximizare din Aplicația A11.3.

Cuprins

9.1	Concepte generale privind metoda Simplex	113
9.2	Algoritmul Simplex primal	115
9.3	Metoda celor două faze	122
	Aplicații propuse	129

9.1. Concepte generale privind metoda Simplex

Metodele grafice de rezolvare a problemelor de programare liniară sunt aplicabile, după cum am văzut în tema anterioară, numai pentru modelele de programare liniară cu două variabile. Pentru trei sau mai multe variabile, metoda grafică nu mai poate fi aplicată.

Fie problema de programare liniară (pe scurt PPL) de **minim** sub forma standard matricială:

$$\begin{cases} [\min]f = \mathbf{c}\mathbf{x} & (*) \\ A\bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{b}} & (**) \\ \mathbf{x} \geq 0 & (***) \end{cases} \quad (9.1)$$

sau vectorială

$$\begin{cases} [\min]f = \mathbf{c}\mathbf{x} \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j x_j \leq \mathbf{a}_0, \quad j = \overline{1, n}. \\ x_j \geq 0 \end{cases} \quad (9.2)$$

Rezultatele din capitolul precedent oferă un mod simplu și elegant de determinare a soluției optime a unei probleme de programare liniară. Astfel, teoremele 7.1 și 7.2 sugerează căutarea de soluții optime ale PPL în mulțimea soluțiilor admisibile de bază, X_{ab} (aceasta fiind o mulțime finită cu cel mult C_n^m elemente). Cu alte cuvinte, pentru determinarea soluției PPL avem următorul algoritm:

Pas 1. Determinăm (eventual folosind transformări elementare) toate soluțiile de bază ale sistemului (**), acestea fiind cel mult C_n^m , deci un număr finit (și nu infinit);

Pas 2. Se elimină soluțiile cu componente negative (neadmisibile), care nu satisfac condițiile (***) și se obține mulțimea soluțiilor admisibile de bază X_{ab} , printre care se află și soluția optimă căutată (respectiv soluțiile optime);

Pas 3. Se calculează valoarea funcției obiectiv în toate soluțiile admisibile de bază determinate la Pasul 2. Soluția optimă va fi cea în care funcția obiectiv f ia valoarea minimă.

Metoda (algoritm) Simplex de rezolvare a problemelor de programare liniară a fost introdusă în anul 1947 de George B. Dantzig poate fi aplicată pentru trei sau mai multe variabile, fiind în esență o metodă matriceală deoarece utilizează numai transformări elementare. Un alt avantaj al metodei constă în volumul extrem de redus de calcule.

Algoritmul metodei Simplex se finalizează în două situații:

- (1) se obține cea mai bună soluție, și se decide că problema de programare liniară are optim finit unic sau multiplu;
- (2) nu se obține cea mai bună soluție, pentru că această soluție nu există, și se decide că problema de programare liniară nu are optim finit.

Să presupunem fără a restrânge generalitatea că matricea extinsă a sistemului de restricții este de forma:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1m+1} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2m+1} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{mm+1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad (9.3)$$

Vectorii $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m$ formați cu primele m coloane ale matricei A , fiind liniar independenți, formează o bază în spațiul vectorial \mathbb{R}^m . În acest caz un vector oarecare $\mathbf{a}_j, j = \overline{m+1, n}$, se exprimă în mod unic cu ajutorul vectorilor bazei (ca o combinație liniară) astfel:

$$\mathbf{a}_j = a_{1j}\mathbf{a}_1 + a_{2j}\mathbf{a}_2 + \dots + a_{nj}\mathbf{a}_n = \sum_{i=1}^n a_{ij}\mathbf{a}_i.$$

Să notăm cu \mathbf{c}_B vectorul linie format cu primele m componente ale vectorului \mathbf{c} , adică coeficienții variabilelor x_1, x_2, \dots, x_m , din funcția obiectiv și care corespund vectorilor din bază.

Introducem mărimile:

$$z_j = \mathbf{c}_B(\mathbf{a}_j)^t = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, j = \overline{1, n} \quad (9.4)$$

și diferențele

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j, j = \overline{1, n}. \quad (9.5)$$

Presupunem că $b_i > 0, i = \overline{1, m}$ și observăm că vectorul \mathbf{x}_B de componente, $x_i = b_i, i = \overline{1, m}$ respectiv $x_i = 0, i = \overline{m+1, n}$, este o soluție admisibilă de bază a problemei de programare considerată.

□ **Teorema 9.1.**(Criteriul de optim) Dacă diferențele $z_j - c_j, j = \overline{m+1, n}$ îndeplinesc condiția $z_j - c_j \leq 0, j = \overline{m+1, n}$, atunci problema de programare liniară are optim finit și vectorul \mathbf{x} este soluția optimă căutată.

□ Observația 9.1:

a) Diferențele $z_j - c_j$ sunt nule pentru $j = \overline{1, m}$ (adică pentru vectorii care sunt în baza \mathbf{B});

b) În problemele de programare de **maxim**, criteriul de optimalitate va fi:

$$c_j - z_j \leq 0, j = \overline{m+1, n}. \quad (9.6)$$

c) Din demonstrația teoremei rezultă că, în cazul problemelor de minim, dacă există diferențe $z_j - c_j$ strict pozitive ($z_j - c_j > 0$), pot exista soluții de bază admisibile \mathbf{y} pentru care funcția obiectiv să ia o valoare mai mică decât pentru $\mathbf{x}_B, (f(\mathbf{y}) < (f(\mathbf{x}_B)))$, deci soluția admisibilă inițială \mathbf{x}_B nu este optimă.

Dantzig demonstrează că noile soluții admisibile de bază se pot construi din vechea soluție de bază admisibilă \mathbf{x}_B , înlocuind un vector \mathbf{a}_i din bază (adică un vector corespunzător unei variabile principale a soluției \mathbf{x}_B), cu un vector \mathbf{a}_j din afara bazei (adică un vector corespunzător unei variabile secundare a soluției \mathbf{x}_B).

Să notăm cu $y_k, k = 1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, m$ componentele noii soluții de bază \mathbf{y} . Din (2.15) înlocuind \tilde{b}_k cu b_k, \tilde{a}_{kj} cu a_{ij}, x_{j_k} cu y_k , iar x_j cu b_j , obținem

$$\begin{cases} y_k = b_k - a_{kj} \frac{b_i}{a_{ij}}, & a_{ij} \neq 0, k = \overline{1, m}, k \neq i \\ y_j = \frac{b_i}{a_{ij}}, & k = i. \end{cases} \quad (9.7)$$

Vectorul \mathbf{a}_i , respectiv \mathbf{a}_j (cel care iese din bază, respectiv cel care intră în bază) se determină pe baza următoarelor teoreme:

□ **Teorema 9.2.**(Criteriul de ieșire din bază). Condițiile necesare pentru înlocuirea vectorului \mathbf{a}_i cu vectorul \mathbf{a}_j sunt:

$$\theta_i \equiv \frac{b_i}{a_{ij}} = \min \left\{ \theta_k = \frac{b_k}{a_{kj}}, k = \overline{1, m}; a_{kj} > 0 \right\}. \quad (9.8)$$

□ **Teorema 9.3.**(Criteriul de intrare în bază) Condiția pe care trebuie să o îndeplinească un vector $\mathbf{a}_j, j = \overline{m+1, n}$, pentru a intra în bază în locul vectorului \mathbf{a}_i este:

$$z_j - c_j \geq 0 \quad (9.9)$$

Rezultatele enunțate în acest paragraf se pot sintetiza într-un algoritm de lucru, ce va fi prezentat în continuare.

9.2 Algoritmul Simplex primal

O metodă de rezolvare a unei probleme de programare liniară este algoritmul Simplex primal. Acesta constă dintr-o succesiune de iterații, care îmbunătățesc treptat o soluție admisibilă de bază inițială. Pe baza considerațiilor din paragraful anterior putem pune în evidență etapele algoritmului care vor conduce la soluția optimă a problemei, dacă aceasta există.

Pasul 1. Se determină o soluție admisibilă de bază, fie aceasta x ;

Pasul 2. Se construiește tabelul Simplex corespunzător acestei soluții;

Pasul 3. Se calculează diferențele $z_j - c_j, j = \overline{1, n}$ aflate pe ultima linie a tabelului inițial și se aplică *criteriul de optim*. Pot apărea următoarele patru situații:

a) dacă $z_j - c_j < 0, j = \overline{m+1, n}$ atunci soluția admisibilă de bază x este **optimă** (și respectiv **unică**);

b) dacă $z_j - c_j \leq 0, j = \overline{m+1, n}$ (echivalent $\exists z_j - c_j = 0$) iar vectorul corespunzător a_j are și componente strict pozitive, atunci soluția admisibilă de bază x este **optimă** (dar **nu unică**); altfel spus, problema admite o infinitate de soluții optime cu aceeași valoare a funcției obiectiv);

c) dacă există indici j , pentru care $z_j - c_j \geq 0, j = \overline{m+1, n}$, iar toate componentele vectorului corespunzător a_j sunt mai mici sau egale cu zero, atunci problema de programare are **optim infinit**;

d) dacă există indici j , pentru care $z_j - c_j > 0, j = \overline{m+1, n}$, iar nu toate componentele vectorului corespunzător a_j sunt mai mici sau egale cu zero, atunci se trece la etapa următoare (soluția nu este optimă).

Pasul 4. Se aplică *criteriul de intrare*, determinând vectorul a_j care intră în bază ca fiind acel vector pentru care:

$$z_j - c_j = \max_{z_k - c_k > 0} (z_k - c_k)$$

Pasul 5. Se aplică *criteriul de ieșire*. Părăsește baza vectorul a_l pentru care

$$\frac{b_l}{a_{lj}} = \min_{a_{kj} > 0} \left\{ \theta_k = \frac{b_k}{a_{kj}}, k = \overline{1, m} \right\}$$

Pasul 6. Se face schimbarea de bază obținând o nouă soluție admisibilă de bază y , apoi se studiază optimalitatea sa (**Pasul 3**).

Algoritmul prezentat mai sus este sintetizat în următorul **tabel Simplex**:

B	c_B	x_B	c_1	c_2		\dots	c_l	\dots	c_m	\dots	c_j		c_n	θ
			a_1	a_2		\dots	a_i	\dots	a_m	\dots	a_j	\dots	a_n	
a_1	c_1	b_1	1	0		\dots	0	\dots	0	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}	θ_1
a_2	c_2	b_2	0	1		\dots	0	\dots	0	\dots	a_{2j}	\dots	a_{2n}	θ_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
a_i	c_l	b_l	0	0		\dots	1	\dots	0	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}	θ_l
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots		\vdots	\vdots		\vdots		\vdots		\vdots	\vdots
a_m	c_m	b_m	0	0		\dots	0	\dots	1	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}	θ_m
		$f(x)$	\leftarrow	\leftarrow	\dots	\dots		z_k		\dots	\dots	\rightarrow	\rightarrow	
			\leftarrow	\leftarrow	\dots	\dots		$z_k - c_k$		\dots	\dots	\rightarrow	\rightarrow	

□ **Observația 9.2**

a) Valoarea funcției obiectiv pentru soluția admisibilă de bază este dată de:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}_B(\mathbf{x}_B)^t = \sum_{i=1}^m c_i b_i.$$

b) Diferențele $z_j - c_j$ se calculează cu relațiile (3.5):

$$z_j - c_j = \sum_{i=1}^m c_i a_{ij} - c_j, j = \overline{1, n}$$

b_1) Dacă soluția nu este optimă (există $z_j - c_j \geq 0$) alegem diferența pozitivă maximă, determinând în felul acesta vectorul \mathbf{a}_j care intră în bază.

b_1) Dacă există mai multe astfel de diferențe, atunci poate intra în bază oricare dintre vectorii ce corespund acestora.

b_3) Dacă pe coloana vectorului \mathbf{a}_j toate elementele sunt mai mici sau egale cu zero, atunci problema admite optim infinit.

b_3) Dacă există și elemente strict pozitive, considerăm toate rapoartele dintre componentele lui \mathbf{a}_0 și componentele strict pozitive ale vectorului \mathbf{a}_j ,

$$\theta_k = \frac{b_k}{a_{kj}} = \frac{\text{componenta } l \text{ a vectorului } \mathbf{a}_0}{\text{componenta } l \text{ a vectorului } \mathbf{a}_j}, \text{ unde } a_{kj} > 0.$$

Cel mai mic raport θ_k ($\theta_k > 0$) va indica vectorul care părăsește baza. Dacă vectorul \mathbf{a}_l părăsește baza, atunci noua soluție admisibilă de bază se obține cu ajutorul unui pivotaj cu elementul pivot a_{lj} .

c) În cazul problemelor de maxim, se calculează diferențele

$$c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^m c_i a_{ij}, j = \overline{1, n}. \quad (9.5^*)$$

□ **Exemplu 9.1.** Pentru fabricarea a 3 tipuri de produse $P_j, j = \overline{1, 3}$ se utilizează 2 tipuri de resurse R_1 și R_2 . Consumurile specifice, cantitățile de resurse și profiturile unitare sunt date în tabelul:

	P_1	P_2	P_3	Limitări resurse
R_1	1	1	2	30
R_2	2	3	1	57
Profit	4	1	5	

Să se determine cantitățile de produse $P_j, j = \overline{1, 3}$ ce urmează a fi realizate pentru a obține un profit maxim.

Soluție. Notăm cu x_1, x_2, x_3 cantitățile de produse de tipul P_1, P_2, P_3 ce urmează a fi realizate. Modelul matematic al problemei este:

$$\begin{cases} [\max][f(\mathbf{x}) = 4x_1 + x_2 + 5x_3] \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 57 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Cele două restricții ale problemei sunt de tip inegalitate, prin urmare este necesar ca ele să fie transformate în egalități (echivalent, problema se aduce la forma standard). În acest sens, se introduc două variabile de compensare x^c_4 și x^c_5 . Se obține

$$\begin{cases} [max][f(x) = 4 \cdot x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 + 0 \cdot x^c_4 + 0 \cdot x^c_5] \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x^c_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x^c_5 = 57 \\ x_1, x_2, x_3, x^c_4, x^c_5 \geq 0. \end{cases}$$

Soluția 1. Problema este una de maxim pentru funcția f , prin urmare o vom transforma într-una de minim pentru funcția $-f$:

$$\begin{cases} [min][-f(x) = -4 \cdot x_1 - x_2 - 5 \cdot x_3 - 0 \cdot x^c_4 - 0 \cdot x^c_5] \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x^c_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x^c_5 = 57 \\ x_1, x_2, x_3, x^c_4, x^c_5 \geq 0. \end{cases}$$

Matricea extinsă a restricțiilor este

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 57 \end{array} \right);$$

în plus, avem vectorii:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x^c_4 \quad x^c_5), \mathbf{c} = (-4 \quad -1 \quad -5 \quad 0 \quad 0), \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 30 \\ 57 \end{pmatrix}$$

Deoarece coloanele 3 și 4 ale matricei \bar{A} sunt vectori unitari, rezultă că variabilele de compensare x^c_4, x^c_5 sunt variabile principale (sau bazice), iar variabilele x_1, x_2, x_3 sunt secundare (nebazice). În plus, baza \mathbf{B} este formată din vectorii $\mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5$. Astfel, o soluție admisibilă de bază este

$$\mathbf{x}^0_{\mathbf{B}} = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 30 \quad 57).$$

Tabelul Simplex se prezintă astfel:

ITERAȚIA I.

\mathbf{B}	$\bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}}$	$\bar{\mathbf{x}}_{\mathbf{B}}$	-4	-1	-5	0	0	θ
			\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3 ↓	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	
← \mathbf{a}_4	0	30	1	1	<u>2</u>	1	0	$\theta_1 = 15$ ←
\mathbf{a}_5	0	57	2	3	1	0	1	$\theta_2 = 57$
	0	0	0	0	0	0	0	← $z_j, j = \bar{1}, \bar{5}$
			4	1	<u>5</u> ↑	0	0	← $z_j - c_j$
					<i>maxim</i>			

□ **Observația 9.3:**

1. Folosind formula (9.4) avem cantitățile

$$z_1 = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 0$$

$$z_2 = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_2 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 3 = 0$$

$$z_3 = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_3 = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$z_4 = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$z_5 = \bar{\mathbf{c}}_{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{a}}_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

iar cu formula (9.5) avem diferențele

$$z_1 - c_1 = 0 - (-4) = 4$$

$$z_2 - c_2 = 0 - (-1) = 1$$

$$z_3 - c_3 = 0 - (-5) = 5$$

$$z_4 - c_4 = 0 - 0 = 0$$

$$z_5 - c_5 = 0 - 0 = 0.$$

2. Soluția admisibilă de bază inițială \bar{x}^0_B nu este optimă deoarece există diferențe $z_j - c_j$ pozitive. Valoarea funcției obiectiv este

$$f(\bar{x}^0_B) = (-4) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 57 = 0$$

sau pe scurt, înmulțind vectorii \bar{c}_B și \bar{x}^0_B

$$f(\bar{x}^0_B) = 0 \cdot 30 + 0 \cdot 57 = 0.$$

Astfel, se va determina o nouă soluție admisibilă de bază.

3. Dintre diferențele $z_j - c_j$, cea mai mare este 5, este situată pe a treia coloană, prin urmare pivotul se va situa pe coloana $J = 3$ (fapt marcat prin simbolul \uparrow).

4. Pe coloana $J = 3$ (sau în vectorul \mathbf{a}_3) există două componente pozitive, 2 și 1, prin urmare putem construi rapoartele θ_1 și θ_2 . Astfel:

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a_{13}} = \frac{30}{2} = 15$$

respectiv

$$\theta_2 = \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{57}{1} = 57.$$

5. Deoarece valoarea minimă a cantităților θ_1, θ_2 este $\min(\theta_1, \theta_2) = \min(15, 57) = 15$ și se află pe prima linie, rezultă că linia I a viitorului pivot este 1 (fapt marcat prin simbolul \leftarrow), deci **pivot** este elementul $a_{13} = 2$.

6. Vectorul \mathbf{a}_4 va ieși din baza B (fapt marcat prin simbolul \Leftarrow) în timp ce vectorul \mathbf{a}_3 va intra în bază (fapt marcat prin simbolul \Downarrow).

7. Componenta de pe linia $I = 1$ a vectorului \bar{c}_B devine $c_3 = -5$.

Noua soluție admisibilă de bază se determină printr-un pivotaj de element $a_{13} = 2$. Va rezulta următorul tabel Simplex:

ITERAȚIA II

B	\bar{c}_B	\bar{x}'_B	-4	-1	-5	0	0	θ
			$\mathbf{a}_1 \Downarrow$	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	
\mathbf{a}_3	-5	15	1/2	1/2	1	1/2	0	$\theta_1 = 30$
$\Leftarrow \mathbf{a}_5$	0	42	3/2	5/2	0	-1/2	1	$\theta_2 = 28 \leftarrow$
		-75	-5/2	0	-5	-5/2	0	$\leftarrow z_j, j = \bar{1,5}$
			3/2 \uparrow	1	0	-5/2	0	$\leftarrow z_j - c_j$
			<i>maxim</i>					

□ Observația 9.4:

1. Folosind formula (9.4) avem cantitățile

$$z_1 = \bar{c}_B \bar{a}_1 = (-5) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{3}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$z_2 = \bar{c}_B \bar{a}_2 = (-5) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{5}{2} = 0$$

$$z_3 = \bar{c}_B \bar{a}_3 = (-5) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -5$$

$$z_4 = \bar{c}_B \bar{a}_4 = (-5) \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{2}$$

$$z_5 = \bar{c}_B \bar{a}_5 = (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

iar cu formula (9.5) avem diferențele

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= \left(-\frac{5}{2}\right) - (-4) = -\frac{3}{2} \\ z_2 - c_2 &= 0 - (-1) = 1 \\ z_3 - c_3 &= (-5) - (-5) = 0 \\ z_4 - c_4 &= \left(-\frac{5}{2}\right) - 0 = -\frac{5}{2} \\ z_5 - c_5 &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

2. Noua soluție admisibilă de bază $\mathbf{x}'_B = (0 \ 0 \ 15 \ 0 \ 42)$ nu este optimă deoarece există diferențe $z_j - c_j$ pozitive. Valoarea funcției obiectiv este

$$f(\bar{\mathbf{x}}'_B) = (-4) \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 15 + 0 \cdot 30 + 0 \cdot 42 = -75$$

sau pe scurt, înmulțind vectorii $\bar{\mathbf{c}}_B$ și $\bar{\mathbf{x}}'_B$

$$f(\bar{\mathbf{x}}'_B) = (-5) \cdot 15 + 0 \cdot 42 = -75.$$

Astfel, va fi necesară o nouă soluție admisibilă de bază.

3. Dintre diferențele $z_j - c_j$, cea mai mare este $\frac{3}{2}$, este situată pe prima coloană, prin urmare pivotul se va situa pe coloana $J = 1$.

4. Pe coloana $J = 1$ (sau în vectorul \mathbf{a}_1) există două componente pozitive, $\frac{1}{2}$ și $\frac{3}{2}$, prin urmare putem construi rapoartele θ_1 și θ_2 . Astfel:

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{15}{\frac{1}{2}} = 15 \cdot 2 = 30$$

respectiv

$$\theta_2 = \frac{b_2}{a_{21}} = \frac{42}{\frac{3}{2}} = 42 \cdot \frac{2}{3} = 28.$$

4. Deoarece valoarea minimă a cantităților θ_1, θ_2 este $\min(\theta_1, \theta_2) = \min(30, 28) = 28$ și se află pe a doua linie, rezultă că linia I a viitorului pivot este 2, deci **pivot** este elementul $a_{21} = \frac{3}{2}$.

5. Vectorul \mathbf{a}_5 va ieși din baza \mathbf{B} , în timp ce vectorul \mathbf{a}_1 va intra în bază.

6. Componenta de pe linia $I = 2$ a vectorului $\bar{\mathbf{c}}_B$ devine $c_1 = -4$.

Noua soluție admisibilă de bază se determină printr-un pivotaj de element $a_{21} = \frac{3}{2}$. Va rezulta următorul tabel Simplex:

ITERAȚIA III

\mathbf{B}	$\bar{\mathbf{c}}_B$	$\bar{\mathbf{x}}''_B$	-4	-1	-5	0	0	θ
			\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}_4	\mathbf{a}_5	
\mathbf{a}_3	-5	1	0	-1/3	1	2/3	-1/3	$\theta_1 = 30$
\mathbf{a}_1	-4	28	1	5/3	0	-1/3	2/3	$\theta_2 = 28 \leftarrow$
		-117	-4	-5	-5	-2	-1	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			0	-4	0	-2	-1	$\leftarrow z_j - c_j$

□ **Observația 9.5:**

1. Folosind formula (9.4) avem cantitățile

$$\begin{aligned} z_1 &= \bar{c}_B \bar{a}_1 = (-5) \cdot 0 + (-4) \cdot 1 = -4 \\ z_2 &= c_B \bar{a}_2 = (-5) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-4) \cdot \frac{5}{3} = -5 \\ z_3 &= c_B \bar{a}_3 = (-5) \cdot 1 + (-4) \cdot 0 = -5 \\ z_4 &= c_B \bar{a}_4 = (-5) \cdot \frac{2}{3} + (-4) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -2 \\ z_5 &= c_B \bar{a}_5 = (-5) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (-4) \cdot \frac{2}{3} = -1, \end{aligned}$$

iar cu formula (9.5) avem diferențele

$$\begin{aligned} z_1 - c_1 &= (-4) - (-4) = 0 \\ z_2 - c_2 &= (-5) - (-1) = -4 \\ z_3 - c_3 &= (-5) - (-5) = 0 \\ z_4 - c_4 &= (-2) - 0 = -2 \\ z_5 - c_5 &= (-1) - 0 = -1. \end{aligned}$$

2. Noua soluție admisibilă de bază $x''_B = (28 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$ este optimă deoarece există doar diferențe $z_j - c_j$ negative sau nule. Valoarea funcției obiectiv este

$$f(x''_B) = (-4) \cdot 28 + (-1) \cdot 0 + (-5) \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = -112 - 5 = -117$$

sau pe scurt, înmulțind vectorii \bar{c}_B și x''_B

$$f(x''_B) = (-4) \cdot 28 + (-5) \cdot 1 = -117.$$

De remarcat că, variabilele ai căror vectori corespunzători nu se află în bază sunt nule. Lăsând la o parte variabilele de compensare introduse și ținând cont de cele remarcate anterior, obținem soluția optimă a problemei inițiale: $x_1 = 28, x_2 = 0, x_3 = 1$. D.p.d.v. economic aceasta înseamnă realizarea a 28 unități de produs P_1 și a unei unități de produs P_3 , profitul maxim posibil de realizat fiind de 117 (u.m.).

□ **Observația 9.6.** Pentru o mai bună înțelegere, exercițiul anterior a fost rezolvat prezentând pe larg etapele fiecărei iterații. De fapt, problema de programare liniară se poate rezolva într-un singur tabel, așa după cum se va vedea cele ce urmează.

Soluția 2.

Problema de programare liniară inițială, în forma standard, este

$$\begin{cases} [\max] [f(x) = 4 \cdot x_1 + x_2 + 5 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5] \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_5 = 57 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Matricea extinsă a restricțiilor este

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 30 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 57 \end{array} \right);$$

în plus, avem vectorii:

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5), c = (4 \ 1 \ 5 \ 0 \ 0), \bar{b} = \begin{pmatrix} 30 \\ 57 \end{pmatrix}.$$

Deoarece coloanele 3 și 4 ale matricei \bar{A} sunt vectori unitari, rezultă că variabilele de compensare x_4, x_5 sunt variabile principale (sau bazice), iar variabilele x_1, x_2, x_3 sunt secundare (nebazice). În plus, baza B este formată din vectorii a_4, a_5 . Astfel, o soluție admisibilă de bază este

$$x^0_B = (0 \ 0 \ 0 \ 30 \ 57).$$

Tabelul Simplex se prezintă astfel:

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	4	1	5	0	0	θ
			a_1	a_2	$a_3 \downarrow$	a_4	a_5	
$\leftarrow a_4$	0	30	1	1	2	1	0	$\theta_1 = \frac{30}{2} = 15$ \leftarrow
a_5	0	57	2	3	1	0	1	$\theta_2 = \frac{57}{1} = 57$
		0	0	0	0	0	0	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			4	1	$\overset{5}{\underbrace{\quad}_{\uparrow \text{maxim}}}$	0	0	$\leftarrow c_j - z_j$
B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	4	1	5	0	0	θ
			$a_1 \downarrow$	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_3	5	15	1/2	1/2	1	1/2	0	$\theta_1 = 30$
$\leftarrow a_5$	0	42	3/2	5/2	0	-1/2	1	$\theta_2 = 28 \leftarrow$
		75	5/2	5/2	0	5/2	0	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			$\underbrace{3/2}_{\uparrow \text{maxim}}$	1	0	-5/2	0	$\leftarrow c_j - z_j$
B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	4	1	5	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_3	5	1	0	-1/3	1	2/3	-1/3	$\theta_1 = 30$
a_1	4	28	1	5/3	0	-1/3	2/3	$\theta_2 = 28 \leftarrow$
		75	4	5	5	2	1	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			0	-4	0	-2	-1	$\leftarrow c_j - z_j$

Ultima soluție admisibilă de bază $x^*_B = (28 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0)$ este optimă deoarece există doar diferențe $c_j - z_j$ negative sau nule. Valoarea funcției obiectiv este

$$f(x^*_B) = 4 \cdot 28 + (-1) \cdot 0 + 5 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 112 + 5 = 117. \quad \square$$

Exemplu 9.2. Să se determine soluțiile optime ale următoarei probleme de programare liniară:

$$\begin{cases} [\min][f(x) = -3x_1 - 2x_2 - 4x_3] \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 7 \\ x_1 - 4x_2 + x_3 + x_5 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0. \end{cases}$$

Soluție. Matricea extinsă a restricțiilor este

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 7 \\ 1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right);$$

în plus, avem vectorii:

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5), c = (-3 \ -2 \ -4 \ 0 \ 0), \bar{b} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Deoarece coloanele 3 și 4 ale matricei \bar{A} sunt vectori unitari, nu este necesară introducerea unor variabile de compensare. Variabilele principale (sau bazice) sunt x_4, x_5 , iar variabilele x_1, x_2, x_3 sunt secundare (nebazice). În plus, baza B este formată din vectorii a_4, a_5 . Astfel, o soluție admisibilă de bază este

$$x^0_B = (0 \ 0 \ 0 \ 7 \ 1).$$

Tabelul Simplex se prezintă astfel:

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	-3	-2	-4	0	0	θ
			a_1	a_2	$a_3 \downarrow$	a_4	a_5	
a_4	0	7	1	2	-1	1	0	$\theta_1 < 0$
$\leftarrow a_5$	0	1	1	-4	1	0	1	$\theta_2 = 1 \leftarrow$
		0	0	0	0	0	0	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			3	2	4 \uparrow	0	0	$\leftarrow z_j - c_j$
					<i>maxim</i>			
B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	-3	-2	-4	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	
a_4	0	8	2	-2	0	1	1	$\theta_1 < 0$
a_3	-4	1	1	-4	1	0	1	$\theta_2 < 0$
		-4	-4	16	-4	0	-4	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			-1	18 \uparrow	0	0	-4	$\leftarrow z_j - c_j$
				<i>maxim</i>				

□

□ Observația 9.7:

1. Soluția admisibilă inițială nu este optimă deoarece există diferențe $z_j - c_j$ pozitive, cea maximă fiind situată pe a treia coloană (deci $J = 3$).
2. Pivotalul primei iterații este elementul $a_{23} = 1$ deoarece există un singur raport $\theta_2 = \frac{b_2}{a_{23}} = \frac{1}{1} = 1$ pozitiv (deci $I = 2$).
3. Noua soluție admisibilă de bază este $x'_B = (0 \ 0 \ 1 \ 8 \ 0)$ nu este optimă deoarece există diferențe $z_j - c_j$ pozitive, cea maximă fiind situată pe a doua coloană (deci $J = 3$).
4. Deoarece ambele rapoarte θ_1, θ_2 sunt negative, nu se poate determina un viitor pivot. Mai mult, suntem în cazul c) de la **Pasul 3**, astfel problema de programare liniară considerată admite optim infinit.

9.3. Metoda celor două faze

Algoritmul Simplex este un algoritm rapid convergent la soluția optimă. Astfel, plecând de la o soluție de bază admisibilă inițială a sistemului în formă standard, cu m ecuații și n necunoscute, după cel mult $m + n$ iterații obținem soluția optimă (dacă există).

Determinarea (eventual prin transformări elementare) a unei soluții de bază pentru un sistem liniar, chiar de dimensiuni mari, este extrem de simplă. Problema care apare este admisibilitatea acesteia, adică se poate întâmpla ca foarte multe dintre soluțiile sistemului sau chiar toate, să fie neadmisibile (deci inutile).

În acest paragraf se va indica o metodă mai ușor de aplicat în practică pentru a obține o soluție admisibilă de bază inițială: metoda celor două faze.

Să considerăm că problema de programare liniară (9.1) este sub formă standard, termenii liberi sunt pozitivi și că matricea A a sistemului de restricții nu conține vectori unitari (nici o coloană a matricei unitate). Vom adăuga la fiecare restricție o variabilă nenegativă, numită **variabilă artificială**. Deoarece există m restricții, vom adăuga m variabile artificiale $x_k^a, k = \overline{n+1, n+m}$ și considerăm o nouă problemă de programare liniară, numită **problema artificială** atașată problemei inițiale, de forma:

$$\begin{cases} [\min] g(x^a) = \sum_{k=n+1}^{n+m} x_k^a \\ \sum_{j=1}^{n+m} a_j x_j \leq a_0, \\ x_j, x_k^a \geq 0 \end{cases} \quad j = \overline{1, n}, k = \overline{n+1, n+m} \quad (9.10)$$

unde $x^a = (x_{n+1}^a \ x_{n+2}^a \ \dots \ x_{n+m}^a)$ este vectorul variabilelor artificiale.

Se constată că orice soluție admisibilă a problemei (9.10), în care variabilele artificiale sunt nule, după înlăturarea acestora, devine o soluție admisibilă de bază a problemei inițiale.

Metoda celor două faze constă în:

Faza întâi.

Se determină soluția optimă a problemei (9.10) folosind algoritmul Simplex. Soluția de bază admisibilă inițială artificială, se determină direct din sistemul artificial, considerând ca variabile principale pe cele artificiale.

Se disting următoarele situații:

- $[\min]g(x^a) = 0$ iar în bază nu există nici un vector corespunzător variabilelor artificiale.
- $[\min]g(x^a) = 0$ și în bază rămân și vectori corespunzători variabilelor artificiale.
- $[\min]g(x^a) \neq 0$.

Faza a doua.

În situația **a**) soluția optimă a problemei (9.10), abstracție făcând de variabilele artificiale, reprezintă o soluție de bază admisibilă, inițială, nedegenerată pentru problema (9.1). Cu această soluție inițială, se aplică algoritmul Simplex primal în vederea găsirii soluției optime a problemei inițiale. Din tabelul final al fazei întâi se elimină coloanele variabilelor artificiale, se modifică coeficienții funcției obiectiv și se calculează noile diferențe $z_j - c_j$, obținându-se primul tabel Simplex al fazei a doua.

Situația **b**) conduce la o soluție admisibilă de bază degenerată pentru problema inițială. Considerațiile anterioare rămân valabile, însă din tabel nu vor fi eliminate coloanele ce corespund variabilelor artificiale ai căror vectori au rămas în bază.

În situația **c**) problema inițială nu admite soluții admisibile.

□ **Exemplu 9.3.** Să se determine soluțiile optime ale problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} [\min][f(x) = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3] \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \geq 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

Soluție. De remarcat că restricțiile problemei sunt de tipul ” \geq ”, prin urmare ele se vor transforma în egalități prin scăderea unor variabile de compensare. Astfel, se obține forma standard a problemei:

$$\begin{cases} [\min][f(x) = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3] \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x^c_4 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x^c_5 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x^c_4, x^c_5 \geq 0. \end{cases}$$

Matricea extinsă a restricțiilor este

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array} \right);$$

în plus, avem vectorii:

$$\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x^c_4 \quad x^c_5), \mathbf{c} = (3 \quad -4 \quad 2 \quad 0 \quad 0), \bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Deoarece printre coloanele matricei \bar{A} nu se află vectori unitari, pentru rezolvarea problemei va fi necesară metoda celor două faze.

În **prima fază** căutăm soluția optimă a problemei (artificiale):

$$\begin{cases} [\min][g(\mathbf{x}^a) = x^a_6 + x^a_7] \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x^c_4 + x^a_6 = 3 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x^c_5 + x^a_7 = 4 \\ x_1, x_2, x_3, x^c_4, x^c_5, x^a_6, x^a_7 \geq 0. \end{cases}$$

O soluție admisibilă de bază este

$$\mathbf{x}^{a0}_B = (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad 4).$$

Tabelul Simplex se prezintă astfel:

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	0	0	0	0	0	1	1	θ
			\mathbf{a}_1	$\mathbf{a}_2 \downarrow$	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}^c_4	\mathbf{a}^c_5	\mathbf{a}^a_6	\mathbf{a}^a_7	
$\leftarrow \mathbf{a}^a_6$	1	3	1	3	2	-1	0	1	0	$\theta_1 = 1 \leftarrow$
\mathbf{a}^a_7	1	4	3	3	1	0	-1	0	1	$\theta_2 = 4/3$
		7	4	6	3	-1	-1	1	1	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			4	6 \uparrow	3	-1	-1	0	0	$\leftarrow z_j - c_j$
				<i>maxim</i>						
B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	0	0	0	0	0	1	1	θ
			$\mathbf{a}_1 \downarrow$	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}^c_4	\mathbf{a}^c_5	\mathbf{a}^a_6	\mathbf{a}^a_7	
\mathbf{a}_2	0	1	1/3	1	2/3	-1/3	0	1/3	0	$\theta_1 = 3$
$\leftarrow \mathbf{a}^a_7$	1	1	2	0	-1	1	-1	-1	1	$\theta_2 = 1/2 \leftarrow$
		1	2	0	-1	1	-1	-1	1	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			2 \uparrow	0	-1	1	-1	-2	0	$\leftarrow z_j - c_j$
			<i>maxim</i>							
B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	0	0	0	0	0	1	1	θ
			\mathbf{a}_1	\mathbf{a}_2	\mathbf{a}_3	\mathbf{a}^c_4	\mathbf{a}^c_5	\mathbf{a}^a_6	\mathbf{a}^a_7	
\mathbf{a}_2	0	5/6	0	1	1/2	-1/2	1/6	1/2	-1/6	$\theta_1 = 3$
\mathbf{a}_1	0	1/2	1	0	-1/2	1/2	-1/2	-1/2	1/2	$\theta_2 = 1/2 \leftarrow$
		0	0	0	0	0	0	0	0	$\leftarrow z_j, j = \overline{1,5}$
			0	0	0	0	0	-1	-1	$\leftarrow z_j - c_j$

Deoarece diferențele $z_j - c_j$ sunt negative sau nule, algoritmul se oprește, iar soluția problemei artificiale

$$x^a_B = (1/2 \quad 5/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

este optimă. Din aceasta se obține soluția admisibilă de bază pentru problema inițială:

$$x^0_B = (1/2 \quad 5/6 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$$

iar sistemul de restricții este cel ce rezultă din ultima etapă a algoritmului Simplex pentru problema artificială.

Tabelul Simplex corespunzător **fazei a doua** are forma:

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	3	-4	2	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	$a^c_4 \downarrow$	a^c_5	
a_2	-4	5/6	0	1	5/2	-1/2	1/6	$\theta_1 < 0$
$\leftarrow a_1$	3	1/2	1	0	-1/2	1/2	-1/2	$\theta_2 = 1 \leftarrow$
		$-\frac{11}{6}$	3	-4	-41/6	7/2	-9/6	$\leftarrow z_j, j = 1,5$
			0	0	-11/2	$\frac{7}{2} \uparrow$ <i>maxim</i>	-9/6	$\leftarrow z_j - c_j$

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	3	-4	2	0	0	θ
			a_1	a_2	a_3	a^c_4	a^c_5	
a_2	-4	4/3	1	1	2	0	-1/3	$\theta_1 < 0$
a^c_4	0	1	2	0	-1	1	-1	$\theta_2 < 0 \leftarrow$
		-16/3	-4	-4	-8	0	4/3	$\leftarrow z_j, j = 1,5$
			-7	0	-10	0	$\frac{4}{3} \uparrow$ <i>maxim</i>	$\leftarrow z_j - c_j$

Deoarece vectorul a^c_5 nu are elemente strict pozitive, rezultă că problema admite optim infinit. \square

\square **Exemplu 9.4.** Să se determine soluțiile optime ale problemei de programare liniară:

$$\begin{cases} [\min][f(x) = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 + 8x_6] \\ x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 - 8x_6 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0. \end{cases}$$

Soluție. De remarcat că restricțiile problemei sunt de tipul " = ", prin urmare problema de programare liniară este în forma standard. Matricea extinsă a restricțiilor este

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & -1 & 1 & -8 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 \end{array} \right);$$

în plus, avem vectorii:

$$x = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6), c = (-2 \ -3 \ -1 \ 4 \ 5 \ 8), \bar{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Se observă că prima și a treia coloană a matricei \bar{A} sunt coloane ale matricei unitate de ordinul trei și atunci vom adăuga o variabilă artificială x^a_7 în cea de-a doua restricție.

Vom căuta în **prima fază** soluția optimă a problemei (artificiale):

$$\begin{cases} [\min][g(x^a) = x^a_7] \\ x_1 - 2x_4 + x_5 + 2x_6 = 4 \\ 3x_2 - x_4 + x_5 - 8x_6 = 3 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 - 3x_6 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x^a_7 \geq 0. \end{cases}$$

O soluție admisibilă de bază este

$$x^{a^0}_B = (4 \ 0 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3).$$

Tabelul Simplex se prezintă astfel:

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	0	0	0	0	0	0	1	θ
			a_1	$a_2 \downarrow$	a_3	a^c_4	a^c_5	a^a_6	a^a_7	
a_1	0	4	1	0	0	-2	1	2	0	$\theta_1 = 0$
$\leftarrow a^a_7$	1	3	0	3	0	-1	1	-8	1	$\theta_2 = 1 \leftarrow$
a_3	0	2	0	1	1	1	-1	-3	0	$\theta_3 = 2$
		3	0	3	0	-1	1	-8	1	$\leftarrow z_j, j$ $= 1,5$
			0	$\underbrace{3}_{\text{maxim}} \uparrow$	0	-1	1	-8	0	$\leftarrow z_j - c_j$

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	0	0	0	0	0	1	1	θ
			$a_1 \downarrow$	a_2	a_3	a^c_4	a^c_5	a^a_6	a^a_7	
a_1	0	4	1	0	0	-2	1	2	1	$\theta_1 = 0$
a_2	0	1	0	1	0	-1/3	1/3	-8/3	1/3	$\theta_2 = 1 \leftarrow$
a_3	0	1	0	0	1	4/3	-4/3	-1/3	-1/3	$\theta_3 = 2$
		0	0	0	0	0	0	0	0	$\leftarrow z_j, j$ $= 1,5$
			0	0	0	0	0	0	-1	$\leftarrow z_j - c_j$

Deoarece diferențele $z_j - c_j$ sunt negative sau nule, algoritmul se oprește, iar soluția problemei artificiale

$$x^{a''}_B = (4 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)$$

este optimă. Din aceasta se obține soluția admisibilă de bază pentru problema inițială:

$$x^0_B = (4 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$$

iar sistemul de restricții este cel ce rezultă din ultima etapă a algoritmului Simplex pentru problema artificială.

Tabelul Simplex corespunzător **fazei a doua** are forma:

B	\bar{c}_B	\bar{x}_B	-2	-3	-1	4	5	8	θ
			$a_1 \downarrow$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	
a_1	-2	4	1	0	0	-2	1	2	$\theta_1 = 0$
a_2	-3	1	0	1	0	-1/3	1/3	-8/3	$\theta_2 = 1 \leftarrow$
a_3	-1	1	0	0	1	4/3	-4/3	-1/3	$\theta_3 = 2$
		-12	-2	-3	-1	11/3	-5/3	9/3	$\leftarrow z_j, j$ $= 1,5$
			0	0	0	-1/3	-20/3	-11/3	$\leftarrow z_j - c_j$

Soluția optimă a problemei este $x^{opt}_B = (4 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)$, iar optimul problemei este $\min(f(x)) = -12$. □

Aplicații propuse

Să se determine optimul și valoarea optimă ale următoarelor probleme de programare liniară:

$$[\max]f = 3x_1 + 4x_2$$

$$\square \text{ A9.1} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 4; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$[\max]f = 2x_1 + 5x_2$$

$$\square \text{ A9.2} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 4x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$[\min]f = 5x_1 + 2x_2$$

$$\square \text{ A9.3} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 + 4x_2 \leq 8; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$[\min]f = 4x_1 + 3x_2$$

$$\square \text{ A9.4} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 6; \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

$$[\max]f = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\square \text{ A9.5} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6; \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Unitatea de învățare X.
Problema transporturilor

Cuprins

10.1. Soluții admisibile de bază pentru o problemă de transport	130
10.2. Soluții optime pentru o problemă de transport	135
Aplicații propuse	148

Să considerăm că un anumit produs este stocat în m depozite (furnizori) D_i în cantitățile $a_i, i = \overline{1, m}$. Produsul este solicitat de n centre de consum (beneficiari) C_j în cantitățile $b_j, j = \overline{1, n}$. Costul transportului unei unități de produs de la depozitul D_i la centrul C_j este a_{ij} u.m. Se cere a se determina cantitățile de produs a_{ij} care urmează a fi transportate de la depozite la centrele de consum astfel ca disponibilul din fiecare depozit să fie epuizat, cererea din fiecare centru de consum să fie satisfăcută exact, iar costul total al transportului produsului să fie minim. Se presupune că $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, adică disponibilul din depozite este egal cu cererea totală a centrelor de consum. O astfel de problemă este denumită **problemă de transport echilibrată**.

Restricțiile problemei sunt din nou de trei tipuri: restricții asupra disponibilului și cererii, restricțiile datorate sensului economic al variabilelor și restricția de minimizare a costului.

Datele modelului economic le prezentăm într-un tabel de forma:

$C \backslash D$	C_1	C_2	...	C_j	...	C_n	a_i
D_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1j} x_{1j}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
D_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2j} x_{2j}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}	...	c_{ij} x_{ij}	...	c_{in} x_{in}	a_i
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
D_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mj} x_{mj}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	...	b_j	...	b_n	$\sum_{i=1}^m a_i$ $\sum_{j=1}^n b_j$

Traducerea algebrică a celor trei tipuri de restricții conduce la următorul sistem:

$$\begin{cases} [\min][f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}] \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n} \\ x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n} \end{cases} \quad (10.1)$$

unde $\mathbf{x} = (x_{11} \ x_{12} \ \dots \ x_{1n} \ x_{21} \ x_{22} \ \dots \ x_{mn})$.

□ **Observația 10.1** Dacă disponibilul este diferit de cerere, pentru a echilibra problema se introduce un depozit sau un centru fictiv cu cantitatea (fictivă) existentă sau cerută astfel încât problema să devină echilibrată (respectiv disponibilul și cererea să devină egale). Costurile unitare de transport pentru depozitul/ centrul fictiv se consideră nule.

□ **Teorema 10.1** Problema de transport echilibrată (4.1) admite cel puțin o soluție admisibilă, iar o soluție de bază admisibilă de bază are cel mult $m + n - 1$ componente diferite de zero.

10.1. Soluții admisibile de bază pentru o problemă de transport

Soluțiile optime pentru o problemă de transport vor fi căutate în mulțimea soluțiilor admisibile de bază și din acest motiv vom pune în evidență mai multe metode prin care putem găsi aceste soluții. Convenim ca o pereche de indici (i, j) să o numim **celulă**. Astfel tabelul inițial asociat unei probleme de transport va avea $m \times n$ celule, fiecărei celule corespunzându-i un cost c_{ij} și o cantitate transportată x_{ij} . Mai mult, o **celulă nebazică (liberă)** este o celulă având $x_{ij} = 0$ (echivalent, x_{ij} componentă nebazică (secundară), adică nu se găsește printre cele $m + n - 1$. **Celule bazice (ocupate)** vor fi cele care au având $x_{ij} \neq 0$ (echivalent, x_{ij} sunt componente bazice (principale).

a) Metoda colțului N-V (sau a diagonalei).

Se începe cu determinarea componentei bazice ce corespunde celulei (căsuței) din colțul de poziție N-V a tabelului (respectiv stânga sus), deci cu x_{11} .

Pasul 1. Vom avea

$$x_{11} = m = \min(a_1, b_1) \quad (10.2)$$

și vom întâlni următoarele situații:

1. $a_1 < b_1 \rightarrow x_{11} = a_1, x_{1j} = 0, j = \overline{2, n}$
2. $b_1 < a_1 \rightarrow x_{11} = b_1, x_{i1} = 0, i = \overline{2, m}$
3. $a_1 = b_1 \rightarrow x_{11} = a_1 (= b_1), x_{1j} = 0, j = \overline{2, n}, x_{i1} = 0, i = \overline{2, m}$.

□ **Observația 10.2** În cea de-a treia situație, elementele de pe prima linie și prima coloană diferite de x_{11} sunt nule, fapt ce va conduce la soluții admisibile degenerate.

Pasul 2. Se modifică valorile a_1, b_1 astfel:

$$a_1 = a_1 - \theta \quad (10.3)$$

$$b_1 = b_1 - \theta$$

și se continuă completarea celulelor folosind formula

$$x_{ij} = \theta = \min(a_i, b_j) \quad (10.2^*)$$

și respectiv

$$a_i = a_i - \theta \quad (10.3^*)$$

$$b_j = b_j - \theta$$

pentru restul elementelor, păstrând regula alegerii celulei NV în vederea completării.

Procesul se termină în cel mult $m + n - 1$ pași, la fiecare pas determinându-se complet o linie (situația 1), o coloană (situația 2), sau o linie și o coloană (situația 3). La fiecare pas se determină o singură componentă nenulă. Componentele nebazice nu se completează în tabel, căsuțele corespunzătoare rămânând libere pentru a nu se confunda componentele nebazice cu eventualele componente bazice nule.

b) **Metoda costului minim pe linie (cml)** Această metodă este asemănătoare metodei colțului NV cu deosebirea că, pentru fiecare linie, se completează valorile x_{ij} alegând celulele în funcție de valorile costurilor în ordine crescătoare. Astfel, prima celulă va fi cea care va avea costul minim din acea linie.

c) **Metoda costului minim pe coloana (cmc)** Metoda este asemănătoare celei anterioare cu mențiunea că acest process va avea loc pentru fiecare coloană. Astfel, prima celulă va fi cea care va avea costul minim din acea coloană.

d) **Metoda costului minim din table (cmt)** Metoda este asemănătoare celor anterioare singura diferență fiind aceea că se va completa mai întâi celula care va avea costul minim din tabel.

□ **Exemplul 10.1** Să se determine o soluție admisibilă de bază pentru problema de transport

C \ D	C_1	C_2	C_3	C_4	a_i
D_1	4	2	2	3	35
D_2	2	2	4	5	40
D_3	3	4	2	3	20
b_j	50	10	25	10	95
					95

Deoarece

$$\sum_{i=1}^m a_i = 35 + 40 + 20 = 95$$

$$\sum_{j=1}^n b_j = 50 + 10 + 25 + 10 = 95$$

avem $\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j$, adică problema este echilibrată.

a) **Metoda colțului NV.** Deoarece $\theta = \min(a_1, b_1) = \min(35, 50) = 35$, pe prima linie avem:

$$\begin{aligned} x_{11} &= 35, x_{12} = x_{13} = x_{14} = 0 \\ a_1 &= 35 - \theta = 0 \\ b_1 &= 50 - \theta = 15. \end{aligned}$$

Următoarele celule se completează după cum urmează:

$$\begin{array}{ll}
 a_{21}: \theta = \min(a_2, b_1) = \min(40, 15) = 15 & a_{22}: \theta = \min(a_2, b_2) = \min(25, 10) = 10 \\
 x_{21} = 15, & x_{22} = 10, \\
 a_2 = 40 - \theta = 25 & \rightarrow \rightarrow a_2 = 25 - \theta = 15 \\
 b_1 = 15 - \theta = 0 & b_2 = 10 - \theta = 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a_{31}: \theta = \min(a_3, b_1) = \min(20, 0) = 0 & \\
 x_{31} = 0, & \\
 \rightarrow \rightarrow a_3 = 20 - \theta = 20 & \rightarrow \\
 b_1 = 0 - \theta = 0 & \\
 a_{23}: \theta = \min(a_2, b_3) = \min(15, 25) = 15 & \\
 x_{23} = 15, & \\
 \rightarrow a_2 = 15 - \theta = 0 & \\
 b_3 = 25 - \theta = 10 &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a_{32}: \theta = \min(a_3, b_2) = \min(20, 0) = 0 & a_{24}: \theta = \min(a_2, b_4) = \min(0, 10) = 0 \\
 x_{32} = 10, & x_{24} = 0, \\
 \rightarrow \rightarrow a_3 = 20 - \theta = 20 & \rightarrow \rightarrow a_2 = 20 - \theta = 20 \\
 b_2 = 0 - \theta = 0 & b_4 = 10 - \theta = 10
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 a_{33}: \theta = \min(a_3, b_3) = \min(20, 10) = 10 & \\
 x_{33} = 10, & \\
 \rightarrow a_3 = 20 - \theta = 10 & \rightarrow \\
 b_3 = 0 - \theta = 0 & \\
 a_{34}: \theta = \min(a_3, b_4) = \min(10, 10) = 10 & \\
 x_{34} = 10, & \\
 \rightarrow a_3 = 10 - \theta = 0 & \\
 b_4 = 10 - \theta = 0. &
 \end{array}$$

S-a obținut o soluție admisibilă de bază:

$$X = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 10 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

costul total al transportului fiind

$$c_{total} = 4 \cdot 35 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 15 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 15 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 300 \text{ u.m.} \quad \square$$

□ Observația 10.3

1. Ca și "cheie de control" pentru corectitudinea calculelor, ultimele cantități a_i, b_j trebuie să fie egale.
2. Există 6 elemente nule, deci nebazice respectiv 6 elemente nenule, bazice. Mai mult, deoarece $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ rezultă că soluția admisibilă este nedegenerată.

3. Operațiunile efectuate anterior se cuprind în următorul tabel:

C \ D	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄					
D ₁	4	2	2	3	35	0			
D ₂	2	2	4	5	40	25	25	15	0
D ₃	3	4	2	3	20	10	0		
	50	10	25	10					
	15	0	10	0					
	0		0						

b) **Metoda costului minim din table (cmt).** Vom considera din nou tabelul simplificat:

C \ D	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄				
D ₁	4	2	2	3	35	10	0	
D ₂	2	2	4	5	40	30	0	
D ₃	3	4	2	3	20	0		
	50	10	25	10				
	20	0	0	0				
	0							

De remarcat faptul că $\min(c_{ij}) = c_{12} = c_{13} = c_{21} = c_{22} = c_{33} = 2$. Putem determina oricare din componentele $x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{33}$. De exemplu, vom alege ordinea $x_{22}, x_{21}, x_{13}, x_{31}, x_{11} \dots$:

$$\begin{aligned}
 a_{22}: \theta &= \min(a_2, b_2) = \min(40, 10) = 10 & a_{21}: \theta &= \min(a_2, b_1) = \min(30, 50) = 30 \\
 x_{22} &= 10, & x_{21} &= 30, \\
 a_2 &= 40 - \theta = 30 & a_2 &= 30 - \theta = 0 \\
 b_2 &= 10 - \theta = 0 & b_1 &= 50 - \theta = 20
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{13}: \theta &= \min(a_1, b_3) = \min(35, 25) = 25 & a_{31}: \theta &= \min(a_3, b_1) = \min(20, 20) = 20 \\
 x_{13} &= 25, & x_{31} &= 20, \\
 a_1 &= 35 - \theta = 10 & a_3 &= 20 - \theta = 0 \\
 b_2 &= 25 - \theta = 0 & b_1 &= 20 - \theta = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{11}: \theta &= \min(a_1, b_1) = \min(10, 10) = 10 \\
 x_{11} &= 10, \\
 a_3 &= 10 - \theta = 0 \\
 b_1 &= 10 - \theta = 0.
 \end{aligned}$$

Restul elementelor sunt nule, prin urmare s-a obținut o soluție admisibilă de bază

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 25 & 10 \\ 30 & 10 & 0 & 0 \\ 20 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

costul total al transportului fiind

$$c_{total} = 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 10 + 2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot 20 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 220 \text{ u.m.}$$

□ Observația 10.4

1. Există 6 elemente nule, deci nebazice respectiv 5 elemente nenule, bazice. Mai mult, deoarece $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6 \neq 5$ rezultă că soluția admisibilă este degenerată.

2. Metoda costului minim ne conduce de cele mai multe ori la o soluție admisibilă de bază mai bună decât metoda diagonalei, în sensul că realizează o valoare a cheltuielilor de transport mai mică.

c) Metoda costului minim pe linie (cml).

Pentru prima linie avem $\min(c_{ij}) = c_{12} = c_{13} = 2$. Putem determina oricare din componentele x_{12}, x_{13} . De exemplu, vom alege ordinea $x_{22}, x_{21}, x_{13}, x_{11}$.

Pentru a doua linie avem $\min(c_{ij}) = c_{21} = c_{22} = 2$. Putem determina oricare din componentele x_{21}, x_{22} . De exemplu, vom alege ordinea $x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}$.

Pentru a treia linie avem $\min(c_{ij}) = c_{31} = 2$. Apoi avem $\min(c_{ij}) = x_{31} = x_{34} = 3$, prin urmare putem alege celula a_{31} sau celula a_{34} . De exemplu, ordinea va fi $x_{33}, x_{31}, x_{34}, x_{32}$.

d) Metoda costului minim pe coloană (cmc).

Pentru prima coloană avem $\min(c_{ij}) = c_{21} = 2$, apoi urmează, în ordine crescătoare, $c_{31} = 3, c_{11} = 4$. Vom alege astfel ordinea x_{21}, x_{31}, x_{11} .

Pentru a doua coloană avem $\min(c_{ij}) = c_{12} = c_{22} = 2$, apoi urmează $c_{32} = 4$. De exemplu, vom alege ordinea x_{12}, x_{22}, x_{32} .

Pentru a treia coloană avem $\min(c_{ij}) = c_{13} = c_{33} = 2$, apoi urmează $c_{23} = 4$. De exemplu, vom alege ordinea x_{13}, x_{33}, x_{23} .

Pentru a patra coloană avem $\min(c_{ij}) = c_{14} = c_{34} = 3$, apoi urmează $c_{24} = 5$. De exemplu, vom alege ordinea x_{14}, x_{34}, x_{24} .

Propunem cititorului determinarea soluțiilor admisibile de bază aferente ultimelor două metode precum calcularea valorii costului total asociat.

10.2. Soluții optime pentru o problemă de transport

Soluțiile optime ale unei probleme de transport le vom căuta în mulțimea soluțiilor admisibile de bază nedegenerate. Să considerăm că am determinat pentru problemă o soluție admisibilă de bază nedegenerată:

$$\mathbf{x} = (x_{11} \quad x_{12} \quad \cdots \quad x_{1n} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad \cdots \quad x_{mn}).$$

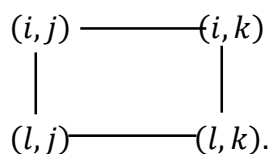
Fie celula nebazică (i, j) .

□ **Definiția 10.1** Un șir de celule care începe și se termină cu celula nebazică (i, j) , conținând în rest numai celule bazice alese mergând doar pe verticală sau orizontală se numește **circuitul** celulei nebazice (i, j) .

□ **Observația 10.5**

1. Pe o linie sau coloană a circuitului există cel puțin două celule.
2. S-a demonstrat că există un singur circuit cu aceste proprietăți și se poate demonstra ușor că un circuit conține un număr par de celule.

Cel mai simplu circuit al unei celule nebazice (i, j) se prezintă sub forma de mai jos:



În cele ce urmează se vor prezenta două metode pentru studierea optimalității unei soluții admisibile a unei probleme de transport.

METODA I

Să atribuim componentei x_{ij} (celulă nebazică), o valoare $\theta > 0$. Se obține atunci un vector care are $m + n$ componente diferite de zero, acesta trebuind să verifice sistemul de restricții. Acestea sunt verificate dacă vom scădea și aduna succesiv valoarea θ la componentele care au intrat în circuitul celulei nebazice (i, j) :

$$\begin{array}{ccc} x_{ij} = \theta & \text{-----} & x_{ik} = x_{ik} - \theta \\ | & & | \\ x_{lj} = x_{lj} - \theta & \text{-----} & x_{lk} = x_{lk} + \theta \end{array}$$

Pentru a fi verificate condițiile de nenegativitate va trebui ca θ să fie luat astfel încât $x_{ik} - \theta \geq 0$, $x_{lj} - \theta \geq 0$. Odată îndeplinite aceste condiții, putem spune că am obținut o nouă soluție admisibilă

$$\mathbf{x}' = (x'_{11} \quad x'_{12} \quad \cdots \quad x'_{1n} \quad x'_{21} \quad x'_{22} \quad \cdots \quad x'_{mn})$$

unde:

$$\begin{aligned}
x'_{ij} &= \theta, \text{ pentru } (i, j) - \text{ celula start a circuitului} \\
x'_{ij} &= x_{ij} + \theta, \text{ pentru } (i, j) \text{ celulă de poziție impară în circuit} \\
x'_{ij} &= x_{ij} - \theta, \text{ pentru } (i, j) \text{ celulă de poziție pară în circuit}
\end{aligned} \tag{10.4}$$

$$x'_{ij} = x_{ij}, \text{ pentru } (i, j) \text{ celulă din afara circuitului}$$

Dorind acum ca noua soluție admisibilă să fie și admisibilă de bază este suficient să considerăm:

$$\theta = \min_{(i,j)} \{x_{ij} : (i, j) \text{ celulă de poziție pară în circuit}\}. \tag{10.5}$$

În acest fel se determină care componentă bazică devine nebazică. Relația (10.5) reprezintă **criteriul de ieșire** din algoritmul pentru găsirea soluțiilor optime a unei probleme de transport. Este necesar însă determinarea condiției ca o soluția admisibilă de bază x' să fie soluție optimă. În acest sens, evaluăm diferența $f(x) - f(x')$. Vom avea:

$$f(x) - f(x') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}(x_{ij} - x'_{ij}) = \sum_{(i,j) \text{ celulă de poziție } k \text{ în circuit}} (-1)^k c_{ij} \theta \tag{10.6}$$

sau

$$f(x) - f(x') = \theta \delta_{ij}$$

unde

$$\theta = \sum_{(i,j) \text{ celulă de poziție } k \text{ în circuit}} (-1)^k c_{ij} \tag{10.7}$$

care reprezintă suma algebrică cu semn alternat a costurilor celulelor ce au intrat în circuit și care începe cu $-c_{ij}$.

Din (10.7) se observă că dacă pentru toate celulele nebazice (i, j) vom avea $\delta_{ij} \leq 0$, deoarece $\theta > 0$, soluția admisibilă de bază $x'(x'_{ij})$ considerată reprezintă soluția optimă a problemei de transport. Rezultă astfel că **criteriul de optimalitate** este

$$\delta_{ij} \leq 0 \tag{10.8}$$

pentru toate celule nebazice (i, j) . De asemenea, din (10.6) se constată că dacă există $\delta_{ij} \geq 0$, soluția $x'(x'_{ij})$ nu este optimă, putând fi îmbunătățită. Pentru aceasta fie:

$$\delta_{IJ} = \max_{\delta_{ij} \geq 0} \delta_{ij}. \tag{10.9}$$

Atunci componentei nebazice x'_{IJ} îi vom atribui o valoare $\theta > 0$. Relația (10.9) reprezintă forma criteriului de intrare în algoritm. Mărimile δ_{ij} joacă rolul diferențelor $z_j - c_j$ din problemele de programare liniară.

Sintetizând cele de mai sus, în practică procedăm în felul următor:

ALGORITM

Pasul 1. Se determină o soluție admisibilă de bază nedegenerată prin una din metodele prezentate.

Pasul 2. Pentru toate celulele nebazice se determină un circuit și se calculează cantitățile δ_{ij} aferente acestuia:

Pasul 3. (optimalitatea) Se analizează δ_{ij} astfel determinate

- dacă toate cantitățile δ_{ij} sunt mai mici sau egale cu zero, atunci soluția este optimă → STOP;

- dacă există $\delta_{ij} > 0$ se trece la pasul următor.

Pasul 4. Se determină valoarea lui θ după relația (10.5) și celula corespunzătoare (I, J) ;

Pasul 5. Se introduce θ în circuitul celulei (I, J) , conform relațiilor (10.4) obținându-se o nouă soluție admisibilă de bază și se revine la **Pasul 2**.

□ Observația 10.6:

a) Prezența semnului de egal în criteriul de optim și de intrare în bază, indică existența mai multor soluții optime ;

b) Dacă la aplicarea criteriului de intrare sunt mai multe mărimi δ_{ij} pozitive maxime egale putem lua oricare dintre acestea.

□ **Exemplul 10.2** Să se determine soluțiile optime ale problemei de transport:

$C \backslash D$	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1	2	3	50
D_2	3	4	1	25
b_j	40	20	30	$\begin{matrix} 75 \\ 90 \end{matrix}$

Problema nu este echilibrată. Vom adăuga un depozit cu costuri zero. Vom avea deci:

$C \backslash D$	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1	2	3	50
D_2	3	4	1	25
D_3	0	0	0	15
b_j	40	20	30	$\begin{matrix} 90 \\ 90 \end{matrix}$

ITERAȚIA 1

O soluție admisibilă de bază determinată prin metoda costului minim din tabel (cmt) este prezentată în continuare:

$C \backslash D$	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 25	2 20	3 5	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0 15	0	0	15
b_j	40	20	30	$\begin{matrix} 90 \\ 90 \end{matrix}$

componentele soluției fiind determinate în ordinea: (3,1), (1,1), (2,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,2), (3,3). Astfel, soluția admisibilă este $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Pentru celulele nebazice avem următoarele circuite și respectiv cantități δ_{ij} (a se vedea (10.7):

Celula nebazică	Circuitul	δ_{ij} :
(2,1)	(2,1) – (1,1) – (1,3) – (2,3) – (2,1)	$\delta_{21} = -c_{21} + c_{11} - c_{13} + c_{23}$ $= -3 + 1 - 3 + 1 = -4$
(2,2)	(2,2) – (1,2) – (1,3) – (2,3) – (2,2)	$\delta_{22} = -c_{22} + c_{12} - c_{13} + c_{23}$ $= -4 + 2 - 1 + 0 = -4$
(3,2)	(3,2) – (1,2) – (1,1) – (3,1) – (3,2)	$\delta_{32} = -c_{32} + c_{12} - c_{11} + c_{31}$ $= -0 + 2 - 1 + 0 = 1$
(3,3)	(3,3) – (1,3) – (1,1) – (3,1) – (3,3)	$\delta_{33} = -c_{33} + c_{13} - c_{11} + c_{31}$ $= -0 + 3 - 1 + 0 = \underline{2}$.

Cele patru circuite sunt reprezentate mai jos, celulele bazice fiind marcate cu diagonală:

(2,1)	(2,2)
(3,2)	(3,3)

Deoarece există cantități $\delta_{ij} > 0$ rezultă că soluția nu este optimă. Mai mult, avem

$$\max_{\delta_{ij} > 0} \delta_{ij} = \delta_{33}$$

prin urmare, se va putea determina o nouă soluție introducând în circuitul celulei (3,3) valoarea $\theta = \min(x_{13}, x_{31}) = \min(5, 15) = 5$:

$$\begin{aligned} x_{33} &= x_{33} + \theta = 0 + 5 = 5 - \text{celula start a circuitului} \\ x_{13} &= x_{13} - \theta = 5 - 5 = 0 - \text{celulă de poziție pară în circuit} \\ x_{11} &= x_{11} + \theta = 25 + 5 = 30 - \text{celulă de poziție impară în circuit} \\ x_{31} &= x_{31} - \theta = 15 - 5 = 10 - \text{celulă de poziție pară în circuit.} \end{aligned}$$

Astfel, noua soluție admisibilă este $\begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, iar tabelul asociat acesteia împreună cu celule baze:

$\begin{matrix} C \\ D \end{matrix}$	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 30	2 20	3	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0 10	0	0 5	15
b_j	40	20	30	90 90

ITERAȚIA 2

Pentru celulele nebazice avem următoarele circuite și respectiv cantități δ_{ij} (a se vedea (10.7)):

Celula nebazică	Circuitul	δ_{ij} :
(1,3)	(1,3) - (3,3) - (3,1) - (1,1) - (1,3)	$\delta_{13} = -c_{13} + c_{33} - c_{31} + c_{11}$ $= -3 + 0 - 0 + 1 = -2$
(2,1)	(2,1) - (2,3) - (3,3) - (3,1) - (2,1)	$\delta_{21} = -c_{21} + c_{23} - c_{33} + c_{31}$ $= -3 + 1 - 0 + 0 = -2$
(2,2)	(2,2) - (1,2) - (1,1) - (3,1) - (3,3) - (3,2) - (2,2)	$\delta_{22} = -c_{22} + c_{12} - c_{11} + c_{31}$ $- c_{33} + c_{32}$ $= -4 + 2 - 1 + 0 - 0 + 1 = -2$
(3,2)	(3,2) - (1,2) - (1,1) - (3,1) - (3,2)	$\delta_{32} = -c_{32} + c_{12} - c_{11} + c_{31}$ $= -0 + 2 - 1 + 0 = \boxed{1}$

Cele patru circuite sunt reprezentate în cele ce urmează:

<p>(1,3)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">30</td><td style="text-align: center;">20</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td></td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	1	2	3	30	20	1	3	4	25	0	0	0	10		5	<p>(2,1)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">30</td><td style="text-align: center;">20</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td></td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	1	2	3	30	20	1	3	4	25	0	0	0	10		5
1	2	3																													
30	20	1																													
3	4	25																													
0	0	0																													
10		5																													
1	2	3																													
30	20	1																													
3	4	25																													
0	0	0																													
10		5																													
<p>(2,2)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">30</td><td style="text-align: center;">20</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td></td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	1	2	3	30	20	1	3	4	25	0	0	0	10		5	<p>(3,2)</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <tr><td style="text-align: center;">1</td><td style="text-align: center;">2</td><td style="text-align: center;">3</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">30</td><td style="text-align: center;">20</td><td style="text-align: center;">1</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">3</td><td style="text-align: center;">4</td><td style="text-align: center;">25</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td><td style="text-align: center;">0</td></tr> <tr><td style="text-align: center;">10</td><td></td><td style="text-align: center;">5</td></tr> </table>	1	2	3	30	20	1	3	4	25	0	0	0	10		5
1	2	3																													
30	20	1																													
3	4	25																													
0	0	0																													
10		5																													
1	2	3																													
30	20	1																													
3	4	25																													
0	0	0																													
10		5																													

Deoarece există cantități $\delta_{ij} > 0$ rezultă că soluția nu este optimă. Mai mult, avem

$$\max_{\delta_{ij} > 0} \delta_{ij} = \delta_{32}$$

prin urmare, se va putea determina o nouă soluție introducând în circuitul celulei (3,2) valoarea $\theta = \min(x_{31}, x_{12}) = \min(10, 20) = 10$:

$$\begin{aligned} x_{32} &= x_{32} + \theta = 0 + 10 = 10 - \text{celula start a circuitului} \\ x_{12} &= x_{12} - \theta = 20 - 10 = 10 - \text{celulă de poziție pară în circuit} \\ x_{11} &= x_{11} + \theta = 30 + 10 = 40 - \text{celulă de poziție impară în circuit} \\ x_{31} &= x_{31} - \theta = 10 - 10 = 0 - \text{celulă de poziție pară în circuit.} \end{aligned}$$

Astfel, noua soluție admisibilă este $\begin{pmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ iar tabelul asociat acestuia împreună cu celule baze:

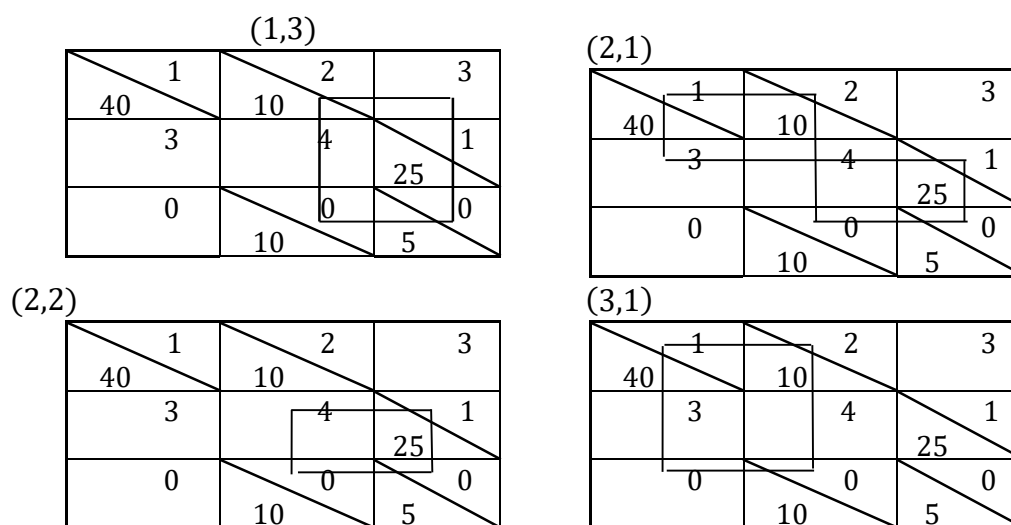
C D	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 40	2 10	3	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0	0 10	0 5	15
b_j	40	20	30	90 90

ITERAȚIA 3

Pentru celulele nebazice avem următoarele circuite și respectiv cantități δ_{ij} (a se vedea (10.7)):

Celula nebazică	Circuitul	δ_{ij} :
(1,3)	(1,3) – (3,3) – (3,2) – (1,2) – (1,3)	$\delta_{13} = -c_{13} + c_{33} - c_{32} + c_{12}$ $= -3 + 0 - 0 + 2 = -1$
(2,1)	(2,1) – (1,1) – (1,2) – (3,2) – (3,3) – (2,3) – (2,1)	$\delta_{21} = -c_{21} + c_{11} - c_{12} + c_{32}$ $-c_{33} + c_{23}$ $= -3 + 1 - 2 + 0 - 0 + 1 = -3$
(2,2)	(2,2) – (2,3) – (3,3) – (3,2) – (2,2)	$\delta_{22} = -c_{22} + c_{23} - c_{33} + c_{32}$ $= -4 + 2 - 3 + 1 = -4$
(3,1)	(3,1) – (1,1) – (1,2) – (3,2) – (3,1)	$\delta_{31} = -c_{31} + c_{11} - c_{12} + c_{32}$ $= -0 + 1 - 2 + 0 = -1.$

Cele patru circuite sunt reprezentate mai jos:



Deoarece există doar cantități $\delta_{ij} < 0$ rezultă că soluția este optimă, optimul problemei fiind $\min(f(\mathbf{x})) = 1 \cdot 40 + 2 \cdot 10 + 1 \cdot 25 + 0 \cdot 10 + 0 \cdot 5 = 85.$

□

METODA II

Algoritmul care urmează reprezintă algoritmul simplex pentru o problemă de minim, aplicat în cazul particular al problemei de transport.

Pasul 1. Fiecărui furnizor/depozit F_i , respectiv fiecărui consumator/beneficiar C_j i se asociază o variabilă u_i și respectiv v_j , $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$;

Pasul 2. Fiecărei celule (i, j) bazice i se asociază ecuația $u_i + v_j = c_{ij}$, rezultând un sistem cu $m + n$ necunoscute (m de u_i și n de v_j) și $m + n - 1$ ecuații;

Pasul 3. Se determină o soluție particulară a acestui sistem, egalând una din necunoscute cu 0 (de preferat pe cea care apare de cele mai multe ori);

Pasul 4. Se calculează costurile "secundare" $c'_{ij} = u_i + v_j$ pentru toate celulele;

Pasul 5. Se calculează diferențele $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$ pentru toate celulele;

Pasul 6. Se analizează cantitățile Δ_{ij} astfel determinate.

- dacă toți sunt mai mici sau egali cu 0 soluția găsită este optimă → STOP
- dacă există Δ_{ij} strict pozitivi atunci soluția actuală nu este optimă și se trece la pasul următor.

Pasul 7. Se determină celula (I, J) corespunzătoare lui Δ_{ij} maxim. Ea va fi cea care va intra în bază apoi se construiește circuitul aferent;

Pasul 8. Se determină θ conform relației (10.5)

Pasul 9. Se introduce θ în circuitul celulei (I, J) , conform relațiilor (10.4) obținându-se o nouă soluție admisibilă de bază și se revine la **Pasul 2**.

Rezolvarea sistemului de ecuații $u_i + v_j = c_{ij}$, determinarea costurilor "secundare" $c'_{ij} = u_i + v_j$ precum și a diferențelor $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$ se poate face direct în următorul tabel:

			v_j	$v_1 =$	\dots	$v_n =$	
			u_i				
c_{11}	\dots	c_{1n}	$u_1 =$	c'_{ij}			Δ_{ij}
x_{11}		x_{1n}	\vdots				
\vdots	\vdots	\vdots					
c_{m1}	\dots	c_{mn}	$u_m =$				
x_{m1}		x_{mn}					

Pe parcursul aplicării algoritmului pot să apară soluții admisibile degenerate care pot conduce la un fenomen numit fenomen de **ciclaj**. Pentru evitarea acestei situații se întrebunțează **metoda perturbării**. Aceasta constă în înlocuirea cantităților a_i cu $a_i + \varepsilon$, și cantității b_n cu $b_n + m\varepsilon$ (unde ε reprezintă o cantitate foarte mică, strict pozitivă). La finalul algoritmului, după determinarea soluției optime a problemei perturbate, se pune $\varepsilon = 0$, obținându-se soluția optimă a problemei inițiale.

Să considerăm acum problema de transport din **Exemplul 10.2** și să o rezolvăm folosind cea de-a doua metodă.

□ **Exemplul 10.3** Să se determine soluțiile optime ale problemei de transport:

$C \backslash D$	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1	2	3	50
D_2	3	4	1	25
b_j	40	20	30	$\begin{matrix} 75 \\ 90 \end{matrix}$

Așa după cum s-a văzut, în vederea echilibrării s-a adăugat un depozit cu costuri zero rezultând un nou tabel:

$C \backslash D$	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1	2	3	50
D_2	3	4	1	25
D_3	0	0	0	15
b_j	40	20	30	$\begin{matrix} 90 \\ 90 \end{matrix}$

ITERAȚIA 1

O soluție admisibilă de bază determinată prin metoda costului minim din tabel (cmt) este:

C \ D	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 25	2 20	3 5	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0 15	0	0	15
b_j	40	20	30	90 90

astfel, soluția admisibilă este $\begin{pmatrix} 25 & 20 & 5 \\ 0 & 0 & 25 \\ 15 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Optimalitatea acestei soluții presupune rezolvarea sistemului de ecuații

$$u_i + v_j = c_{ij} \quad (10.10)$$

folosind celulele bazice:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = c_{11} & u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_2 = c_{12} & u_1 + v_2 = 2 \\ u_1 + v_3 = c_{13} & u_1 + v_3 = 3 \\ u_2 + v_3 = c_{23} & \text{sau } u_2 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_1 = c_{31} & u_3 + v_1 = 0 \\ u_1 = 0. & u_1 = 0. \end{array}$$

□

□ **Observația 10.7** Se remarcă faptul că u_1 apare de trei ori în cadrul sistemului, motiv pentru care i s-a dat valoarea inițială $u_1 = 0$.

Soluția sistemului este:

$$u_1 = 0, v_1 = 1, v_2 = 2, v_3 = 3, u_2 = -2, u_3 = -1,$$

unde ordinea alegerii celulelor în vederea determinării necunoscutelor u_i, v_j este: (1,1), (1,2), (1,3), (2,3), (3,1).

Costurile "secundare" $c'_{ij} = u_i + v_j$ vor fi:

$$\begin{array}{lll} c'_{11} = u_1 + v_1 & c'_{12} = u_1 + v_2 & c'_{13} = u_1 + v_3 \\ c'_{21} = u_2 + v_1 & c'_{22} = u_2 + v_2 & c'_{23} = u_2 + v_3 \\ c'_{31} = u_3 + v_1 & c'_{32} = u_3 + v_2 & c'_{33} = u_3 + v_3 \end{array}$$

respectiv

$$\begin{array}{lll} c'_{11} = 0 + 1 = 1 & c'_{12} = 0 + 2 = 2 & c'_{13} = 0 + 3 = 3 \\ c'_{21} = -2 + 1 = -1 & c'_{22} = -2 + 2 = 0 & c'_{23} = -2 + 3 = 1 \\ c'_{31} = -1 + 1 = 0 & c'_{32} = -1 + 2 = 1 & c'_{33} = -1 + 3 = 2 \end{array}$$

Diferențele $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$ vor deveni:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1 - 1 = 0 & \Delta_{12} &= 2 - 2 = 0 & \Delta_{13} &= 3 - 3 = 0 \\ \Delta_{21} &= -1 - 3 = -4 & \Delta_{22} &= 0 - 4 = -4 & \Delta_{23} &= 1 - 1 = 0 \\ \Delta_{31} &= 0 - 0 = 0 & \Delta_{32} &= 1 - 0 = 1 & \Delta_{33} &= 2 - 0 = \boxed{2}. \end{aligned}$$

Deoarece există $\Delta_{ij} > 0$ atunci soluția actuală nu este optimă. Mai mult, avem

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{33}$$

prin urmare, se va putea determina o nouă soluție admisibilă.

Celulei (3,3) i se asociază circuitul: (3,3) – (1,3) – (1,1) – (3,1) – (3,3), prin urmare se va introduce în acest circuit valoarea $\theta = \min(x_{13}, x_{31}) = \min(5, 15) = 5$:

$$\begin{aligned} x_{33} &= x_{33} + \theta = 0 + 5 = 5 - \text{celula start a circuitului} \\ x_{13} &= x_{13} - \theta = 5 - 5 = 0 - \text{celulă de poziție pară în circuit} \\ x_{11} &= x_{11} + \theta = 25 + 5 = 30 - \text{celulă de poziție impară în circuit} \\ x_{31} &= x_{31} - \theta = 15 - 5 = 10 - \text{celulă de poziție pară în circuit.} \end{aligned}$$

Astfel, noua soluție admisibilă este $\begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 10 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ iar tabelul asociat acesteia împreună cu celule baze:

C \ D	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 30	2 20	3	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0 10	0	0 5	15
b_j	40	20	30	90 90

□

□ **Observația 10.8** Rezolvarea sistemului de ecuații (10.10) $u_i + v_j = c_{ij}$, determinarea costurilor "secundare" $c'_{ij} = u_i + v_j$ precum și a diferențelor se poate face direct în următorul tabel:

			v_j	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 3$			
			u_i						
1 25	2 20	3 5	$u_1 = 0$	1	2	3	0	0	0
3	4	1 25	$u_2 = -2$	-1	0	1	-4	-4	0
0 15	0	0	$u_3 = -1$	0	1	2	0	1	$\boxed{2}$

ITERAȚIA 2

Optimalitatea noii soluții admisibile presupune rezolvarea sistemului de ecuații

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

folosind celulele bazice:

$$\begin{array}{ll} u_1 + v_1 = c_{11} & u_1 + v_1 = 1 \\ u_1 + v_2 = c_{12} & u_1 + v_2 = 2 \\ u_2 + v_3 = c_{23} & u_2 + v_3 = 1 \\ u_3 + v_1 = c_{31} & \text{sau } u_3 + v_1 = 0 \\ u_3 + v_3 = c_{33} & u_3 + v_3 = 0 \\ u_1 = 0. & u_1 = 0. \end{array}$$

□ **Observația 10.9** Chiar dacă u_1 nu apare de cele mai multe ori, îi vom da valoarea inițială $u_1 = 0$.

Soluția sistemului este:

$$u_1 = 0, v_1 = 1, v_2 = 2, u_3 = -1, v_3 = 1, u_2 = 0,$$

unde ordinea alegerii celulelor în vederea determinării necunoscutelor u_i, v_j este: (1,1), (1,2), (3,1), (3,3), (2,3).

Costurile "secundare" $c'_{ij} = u_i + v_j$ vor fi:

$$\begin{array}{lll} c'_{11} = u_1 + v_1 & c'_{12} = u_1 + v_2 & c'_{13} = u_1 + v_3 \\ c'_{21} = u_2 + v_1 & c'_{22} = u_2 + v_2 & c'_{23} = u_2 + v_3 \\ c'_{31} = u_3 + v_1 & c'_{32} = u_3 + v_2 & c'_{33} = u_3 + v_3 \end{array}$$

respectiv

$$\begin{array}{lll} c'_{11} = 0 + 1 = 1 & c'_{12} = 0 + 2 = 2 & c'_{13} = 0 + 1 = 1 \\ c'_{21} = 0 + 1 = 1 & c'_{22} = 0 + 2 = 2 & c'_{23} = 0 + 1 = 1 \\ c'_{31} = -1 + 1 = 0 & c'_{32} = -1 + 2 = 1 & c'_{33} = -1 + 1 = 0 \end{array}$$

Diferențele $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$ vor deveni:

$$\begin{array}{lll} \Delta_{11} = 1 - 1 = 0 & \Delta_{12} = 2 - 2 = 0 & \Delta_{13} = 1 - 3 = -2 \\ \Delta_{21} = 1 - 3 = -2 & \Delta_{22} = 2 - 4 = -4 & \Delta_{23} = 1 - 1 = 0 \\ \Delta_{31} = 0 - 0 = 0 & \Delta_{32} = 1 - 0 = \boxed{1} & \Delta_{33} = 0 - 0 = 0. \end{array}$$

Deoarece există $\Delta_{ij} > 0$ atunci soluția actuală nu este optimă. Mai mult, avem

$$\max_{\Delta_{ij} > 0} \Delta_{ij} = \Delta_{32}$$

prin urmare, se va putea determina o nouă soluție admisibilă.

Celulei (3,2) i se asociază circuitul: (3,2) – (1,2) – (1,1) – (3,1) – (3,2), prin urmare se va introduce în acest circuit valoarea $\theta = \min(x_{12}, x_{31}) = \min(20, 10) = 10$:

$$\begin{aligned}
 x_{32} &= x_3 + \theta = 0 + 10 = 10 - \text{celula start a circuitului} \\
 x_{12} &= x_{12} - \theta = 20 - 10 = 10 - \text{celulă de poziție pară în circuit} \\
 x_{11} &= x_{11} + \theta = 30 + 10 = 40 - \text{celulă de poziție impară în circuit} \\
 x_{31} &= x_{31} - \theta = 10 - 10 = 0 - \text{celulă de poziție pară în circuit.}
 \end{aligned}$$

Astfel, noua soluție admisibilă este $\begin{pmatrix} 40 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 25 \\ 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$ iar tabelul asociat acesteia împreună cu celule bazice este :

C \ D	C_1	C_2	C_3	a_i
D_1	1 40	2 10	3	50
D_2	3	4	1 25	25
D_3	0	0 10	0 5	15
b_j	40	20	30	90 90

□ **Observația 10.10** Operațiile Iterației 2 se pot face direct în următorul tabel:

			v_j	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 1$			
			u_i						
1 30	2 20	3	$u_1 = 0$	1	2	1	0	0	-2
3	4	1 25	$u_2 = 0$	1	2	1	-2	-2	0
0 10	0	0 5	$u_3 = -1$	0	1	0	0	1	0

ITERAȚIA 3

Optimalitatea noii soluții admisibile presupune rezolvarea sistemului de ecuații $u_i + v_j = c_{ij}$

folosind celulele bazice:

$$\begin{aligned}
 u_1 + v_1 &= c_{11} & u_1 + v_1 &= 1 \\
 u_1 + v_2 &= c_{12} & u_1 + v_2 &= 2 \\
 u_2 + v_3 &= c_{23} & u_2 + v_3 &= 1 \\
 u_3 + v_2 &= c_{32} & \text{sau } u_3 + v_2 &= 0 \\
 u_3 + v_3 &= c_{33} & u_3 + v_3 &= 0 \\
 u_1 &= 0. & u_1 &= 0.
 \end{aligned}$$

□ **Observația 10.11** Chiar dacă u_1 nu apare de cele mai multe ori, îi vom da valoarea inițială $u_1 = 0$.

Soluția sistemului este:

$$u_1 = 0, v_1 = 1, v_2 = 2, u_3 = -2, v_3 = 2, u_2 = -1,$$

unde ordinea alegerii celulelor în vederea determinării necunoscutelor u_i, v_j este: (1,1), (1,2), (2,3), (3,3), (2,3).

Costurile "secundare" $c'_{ij} = u_i + v_j$ vor fi:

$$\begin{aligned} c'_{11} &= u_1 + v_1 & c'_{12} &= u_1 + v_2 & c'_{13} &= u_1 + v_3 \\ c'_{21} &= u_2 + v_1 & c'_{22} &= u_2 + v_2 & c'_{23} &= u_2 + v_3 \\ c'_{31} &= u_3 + v_1 & c'_{32} &= u_3 + v_2 & c'_{33} &= u_3 + v_3 \end{aligned}$$

respectiv

$$\begin{aligned} c'_{11} &= 0 + 1 = 1 & c'_{12} &= 0 + 2 = 2 & c'_{13} &= 0 + 2 = 2 \\ c'_{21} &= -1 + 1 = 0 & c'_{22} &= -1 + 2 = 1 & c'_{23} &= -1 + 2 = 1 \\ c'_{31} &= -2 + 1 = -1 & c'_{32} &= -2 + 2 = 0 & c'_{33} &= -2 + 2 = 0 \end{aligned}$$

Diferențele $\Delta_{ij} = c'_{ij} - c_{ij}$ vor deveni:

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= 1 - 1 = 0 & \Delta_{12} &= 2 - 2 = 0 & \Delta_{13} &= 2 - 3 = -1 \\ \Delta_{21} &= 0 - 3 = -3 & \Delta_{22} &= 1 - 4 = -3 & \Delta_{23} &= 1 - 1 = 0 \\ \Delta_{31} &= -1 - 0 = -1 & \Delta_{32} &= 0 - 0 = 0 & \Delta_{33} &= 0 - 0 = 0. \end{aligned}$$

Deoarece toți Δ_{ij} sunt negative, rezultă că soluția actuală este optimă, iar optimul este $\min(f(x)) = 85$.

□ **Observația 10.12** Operațiile Iterației 3 se pot face direct în următorul tabel:

			v_j	$v_1 = 1$	$v_2 = 2$	$v_3 = 2$				
			u_i							
40	1	2	3	$u_1 = 0$	1	2	2	0	0	-1
	3	4	1	$u_2 = -1$	0	1	1	-3	-3	0
	0	0	0	$u_3 = -2$	-1	0	0	-1	0	0
		10	5							

Aplicații propuse

Să se determine soluțiile următoarelor probleme de transport:

□ A10.1

	B ₁	B ₂	Disponibil
D ₁	4	2	25
D ₂	3	1	35
Necesar	20	40	

□ A10.5

	B ₁	B ₂	Disponibil
D ₁	2	3	45
D ₂	5	4	35
Necesar	20	40	

□ A10.2

	B ₁	B ₂	B ₃	Disponibil
D ₁	3	4	1	35
D ₂	2	5	6	25
Necesar	20	25	15	

□ A10.6

	B ₁	B ₂	B ₃	Disponibil
D ₁	6	2	4	35
D ₂	3	5	1	25
Necesar	20	35	15	

□ A10.3

	B ₁	B ₂	Disponibil
D ₁	4	1	25
D ₂	2	3	35
D ₃	6	5	20
Necesar	55	25	

□ A10.7

	B ₁	B ₂	Disponibil
D ₁	4	5	25
D ₂	2	3	35

□ A10.4

	B ₁	B ₂	Disponibil
D ₁	2	3	25
D ₂	1	4	35
Necesar	30	50	

Bibliografie

1. Anderson D. R., Sweeney D. J., et al. 2011. *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making*. South-Western/Cengage Learning.
2. Bârsan-Pipu N. 2003. *Matematici aplicate în economiei*. Braşov: Editura Universităţii „Transilvania” din Braşov.
3. Bârsan-Pipu N. 2009. *Matematici financiare și actuariale*. Braşov: Editura Infomarket Braşov.
4. Cenuşă Gh., Raischi C., et al. 2002. *Matematici pentru economişti*. Bucureşti: Editura CISON.
5. Chiruţă C. 2014. *Matematică. Programare liniară, Teoria Probabilităţilor și Statistică matematică*. Iași: Univ. de Șt. Agr. și Med. Vet. „Ion Ionescu de la Brad”.
6. Duda I., Trandafir R., Baci A., Ioan R., Barza S. 2007. *Matematici pentru economişti*. Editura FRM.
7. Ganga M. 2001. *Matematică. Manual pentru clasa a XI-a*. Volumul 2. Editura Mathpress.
8. Ganga M. 2002. *Matematică. Manual pentru clasa a XII-a*. Volumul 1. Editura Mathpress.
9. Ion D.I., Angelescu N. 1999. *Matematică. Manual pentru clasa a IX-a*. Bucureşti: Editura Teora.
10. Munteanu Gh. 2007. *Matematică aplicată în economie*. Braşov: Editura Universităţii „Transilvania” din Braşov.
11. Năstăsescu C., Niță C. 2000. *Matematică. Manual pentru clasa a X-a*. Bucureşti: Editura didactică și pedagogică.
12. Neagu M. 2012. *Geometria spațiilor vectoriale. Teorie și aplicații*. Bucureşti: Editura MatrixRom.
13. Purcaru M.A.P., Oana A. 2023. *Algebră liniară. Geometrie analitică. Geometrie diferențială*. Braşov: Editura Universităţii „Transilvania” din Braşov.
14. Radomir I., Popescu O. 2002. *Matematici pentru economişti*. Cluj–Napoca: Ed. Albastră.
15. Rusu Gh., Spînu M. 2008. *Matematici aplicate în economie*. Iași: Ed. Sedcom Libris.
16. Septimiu M. *Matematici aplicate în economie, Suport de curs* (https://www.academia.edu/36502542/MATEMATICI_APLICATE_IN_ECONOMIE)
17. Șerban F., Dedu S. 2009. *Matematici aplicate în economie, suport curs pentru ID* (https://else.fcim.utm.md/pluginfile.php/80343/mod_resource/content/1/fdocumente.com_matematica-aplicata-in-economie-56893605eb6f4.pdf)
18. Tomiță V., Stuparu D., Bălă D. 2009. *Matematici aplicate în economie, Curs universitar pentru învățământ la distanță*. Craiova: Editura Universitaria.
19. Țigănescu E., Mitruț D. 2003. *Bazele cercetării operaționale*. Bucureşti: Editura ASE.
20. Ungureanu V. M., Buneci M. R. 2004. *Algebră liniară. Teorie și aplicații (curs)*. Timișoara: Editura Mirton.

Link-uri utile

<https://www.studocu.com/ro/course/universitatea-alexandru-ioan-cuza-din-iasi/matematici-aplicate-in-economie/3127391>

<http://www.beacom.ro/demo/dorin/exemple/>