

Ioan Călin ROȘCA

REZISTENȚA MATERIALELOR
Vol. II



Editura
Universității
Transilvania
din Brașov

2025

EDITURA UNIVERSITĂȚII TRANSILVANIA DIN BRAȘOV

Adresa: Str. Iuliu Maniu nr. 41A
500091 Brașov
Tel.: 0268 476 050
Fax: 0268 476 051
E-mail: editura@unitbv.ro

Editură recunoscută CNCSIS, cod 81

ISBN 978-606-19-1334-3 (gen.)
978-606-19-1836-2 (e-book)

Copyright © Autorul, 2025

Lucrarea a fost avizată de Consiliul Departamentului de Inginerie Mecanică, Facultatea de Inginerie mecanică a Universității Transilvania din Brașov.

Cuvânt înainte

Lucrarea se adresează cu precădere studenților din anul II ai facultăților cu profil mecanic sau înrudit cu acesta. Acest volum vine în continuarea primului volum și conține un număr de șapte capitole: tensiuni la solicitarea compusă a barelor drepte, bare curbe plane, calculul deformațiilor grinzilor drepte, metode energetice de calcul a deformațiilor grinzilor drepte, sisteme static nedeterminate, stabilitatea statică a barelor drepte zvelte, solicitări dinamice.

Lucrare cuprinde aspecte teoretice de bază, unele dintre acestea fiind însoțite de aplicații numerice.

Conținutul volumului se bazează pe cursurile predate și tipărite, de-a lungul anilor, în facultățile cu profil ingineresc din țara noastră. De aceea, multe abordări sunt asemănătoare, multe aspecte fiind comune cursurilor de Rezistența materialelor predate în cadrul fostei Catedre de Rezistența materialelor de la Facultatea de Inginerie mecanică din cadrul Universității Transilvania din Brașov.

Cartea, în ansamblul ei, se dorește a fi un omagiu adus colectivului catedrei de Rezistența materialelor, care de-a lungul a peste 70 de ani de activitate au dezvoltat această disciplină la Brașov și care, prin tot ceea ce au realizat, au scris o pagină de istorie în dezvoltarea științelor ingineresti.

Mulțumesc tuturor tuturor profesorilor cu care am colaborat în activitatea mea, din Brașov și din țară, și care au contribuit la formarea mea în domeniul rezistenței materialelor.

Dedic această carte studenților mei pentru a le fi imbold în însușirea disciplinei și în formarea lor ca viitori ingineri.

Brașov, decembrie 2025

Prof.dr.ing. Ioan Călin ROȘCA

CUPRINS

Capitolul 1 - Tensiuni la solicitarea compusă a barelor drepte	6
1.1. Considerații generale	6
1.2. Solicitarea de tracțiune-compresiune cu încovoiere (solicitări $\sigma - \sigma$)	7
1.2.1. Considerații generale	7
1.2.2. Grindă încărcată cu forță înclinată	7
1.2.3. Compresiunea excentrică a barelor de înălțime mică	10
1.2.4. Sâmburele central	20
1.3. Solicitarea cu tensiuni tangențiale (solicitări de tip $\tau - \tau$)	23
1.3.1. Considerații generale	23
1.3.2. Tensiuni tangențiale datorate numai acțiunii forțelor tăietoare	24
1.3.3. Solicitarea compusă de torsiune cu forfecare. Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse	25
1.4. Solicitarea cu tensiuni tangențiale (solicitări de tip $\sigma - \tau$)	29
1.4.1. Considerații generale	29
1.4.2. Cazul unei bare de secțiune circulară încastrată	29
1.4.3. Arbori drepti	33
1.4.4. Calculul pârghiilor drepte spațiale	39
Capitolul 2 – Bare curbe plane	45
2.1. Generalități	45
2.2. Bare curbe plane de curbură mică	46
2.3. Bare curbe plane de curbură mare	47
Capitolul 3 – Calculul deformațiilor grinzilor drepte	61
3.1. Introducere	61
3.2. Metode analitice	61

3.2.1.	Ecuția fibrei medii deformată	61
3.2.2.	Integrarea analitică a ecuației diferențiale a fibrei medii deformată	65
3.3.	Metode grafo-analitice de calcul a deformațiilor la solicitarea simplă de încovoiere	76
3.3.1.	Metoda grinzilor fictive	77
3.3.2.	Ecuția celor două rotiri și ecuația celor două săgeți	85
3.3.3.	Ecuția celor trei săgeți (Ecuția lui Clapeyron)	87
3.3.4.	Principiul suprapunerii de efecte	91
3.3.5.	Deformația grinzilor solicitate la încovoiere oblică sau strâmbă	92
Capitolul 4 - Metode energetice de calcul a deformațiilor grinzilor drepte		94
4.1.	Energia potențială de deformație. Teorema lui Clapeyron	94
4.2.	Teoremele reciprocității	98
4.3.	Teorema lui Castigliano	102
4.4.	Teorema lucrului mecanic minim. Teorema lui Menabrea	111
4.5.	Metoda sarcinii unitare. Relația Mohr-Maxwell	112
4.6.	Metoda lui Mohr-Vereșciaghin	139
Capitolul 5 - Sisteme static nedeterminate		142
5.1.	Introducere	142
5.2.	Metoda forțelor sau a flexibilităților	144
5.2.1.	Considerații teoretice	144
5.2.2.	Sisteme static nedeterminate	146
Capitolul 6 – Stabilitatea statică a barelor drepte zvelte		171
6.1.	Introducere	171
6.2.	Forța critică de flambaj a barei drepte solicitată la compresiune	173
6.2.1.	Considerații generale	173
6.2.2.	Cazul fundamental (cazul II – figura 6.2,b)	175
6.2.3.	Cazul unei bare încastrată la un capăt și liberă la celălalt (cazul I – figura 6.2,a)	178

6.2.4.	Cazul unei bare încastrată la un capăt și articulată la celălalt (cazul III – figura 6.2,c)	179
6.2.5.	Cazul unei bare încastrată la ambele capete (cazul IV – figura 6.2,d)	180
6.2.6.	Concluzii	181
6.3.	Domeniul de valabilitate al relației lui Euler	182
6.4.	Procedura de rezolvare a problemelor de flambaj	184
6.4.1.	Probleme de verificare	184
6.4.2.	Probleme de dimensionare	188
6.5.	Metoda tensiunii admisibile	191
Capitolul 7 - Solicitări dinamice		194
7.1.	Introducere	194
7.2.	Solicitări produse de forțe de inerție	194
7.2.1.	Calculul cablului de ascensor	196
7.2.2.	Calculul volantului	197
7.2.3.	Calculul barei în rotație	201
7.2.4.	Calculul mecanismului bielă-manivelă	204
7.3.	Solicitări produse prin aplicarea bruscă a sarcinilor	206
7.3.1.	Solicitări de întindere cu șoc	207
7.3.2.	Solicitări de compresiune cu șoc	210
7.3.3.	Solicitări de încovoiere cu șoc	212
7.3.4.	Solicitări de torsiune cu șoc	214
7.4.	Calculul la șoc cu ajutorul multiplicatorului dinamic (de impact)	216
Bibliografie		221
Anexa 1		224
Anexa 2		225
Anexa 3		229
Anexa 4		235

TENSIUNI LA SOLICITAREA COMPUSĂ A BARELOR DREPTE

1

1.1. Considerații generale

În cazul în care în secțiunile transversale ale barelor există o singură componentă a eforturilor secționale se spune că barele sunt supuse la solicitări simple (tracțiune-compresiune, forfecare, torsiune, încovoiere). Dacă, din contră, în secțiunile transversale există mai multe componente ale eforturilor secționale bara este supusă la solicitări compuse.

Problema principală care apare în cazul solicitărilor compuse este aceea a determinării tensiunii echivalente σ_{ech} . Astfel, există următoarele două situații generale:

- a) În cazul în care, în secțiunea transversală există eforturi secționale de aceeași natură (întindere-compresiune cu încovoiere sau forfecare cu torsiune) tensiunile care apar sunt de aceeași natură (tensiuni normale σ sau tensiuni tangențiale τ) tensiunea rezultantă fiind obținută prin însumarea algebrică a acestora (aplicarea principiului suprapunerii de efecte);
- b) În cazul în care în secțiunile transversale apar, în același timp, tensiuni de natură diferită, normale σ și tangențiale τ , atunci tensiunea rezultantă (echivalentă) se determină pe baza teoriilor de rezistență.

Problemele se rezolvă pornind de la condiția de rezistență:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a, \quad (1.1)$$

unde tensiunea echivalentă σ_{ech} se determină prin una din variantele mai sus menționate și se compară cu tensiunea admisibilă σ_a corespunzătoare unei stări limită.

1.2. Solicitarea de tracțiune-compresiune cu încovoiere (solicitări $\sigma - \sigma$)

1.2.1. Considerații generale

În cazul solicitărilor de tracțiune-compresiune și de încovoiere apar aceleași tipuri de tensiuni: tensiuni normale σ . Tensiunile normale se calculează conform relațiilor:

a) în cazul solicitării de tracțiune-compresiune $\sigma = \pm \frac{N}{A}$, cu semnul (+) pentru tracțiune și semnul (-) pentru compresiune;

b) în cazul solicitării de încovoiere $\sigma_{iz} = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} y$, pentru cazul în care momentul este pe direcția spațială Oz și $\sigma_{iy} = \pm \frac{M_{iy}}{I_y} z$, pentru cazul în care momentul este pe direcția spațială Oy .

Cele două tensiuni fiind de aceeași natură, se mai spune că solicitarea compusă este de tip $\sigma - \sigma$. În cele ce urmează se prezintă două cazuri, des întâlnite în practică, de solicitare compusă de tip $\sigma - \sigma$.

1.2.2. Grindă încărcată cu forță înclinată

Se consideră o bară încărcată cu forță F înclinată, cu un unghi α , care este aplicată într-un plan principal central de inerție (figura 1.1).

Grinda se consideră a fi dreaptă, de secțiune constantă și ca urmare aria acesteia (A) și momentul de inerție axial (I_z) sunt constante.

Din diagramele de eforturi secționale rezultă existența unei solicitări de compresiune și a unei solicitări de încovoiere.

Tensiunile normale rezultante din aceste solicitări se calculează conform relațiilor cunoscute de la solicitările simple:

- solicitarea de tracțiune:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} = \frac{F \cdot \cos \alpha}{A} \quad (1.1)$$

- solicitarea de încovoiere:

$$\sigma_i = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} y = \pm \frac{Fab \cdot \sin \alpha}{I_z} y. \quad (1.2)$$

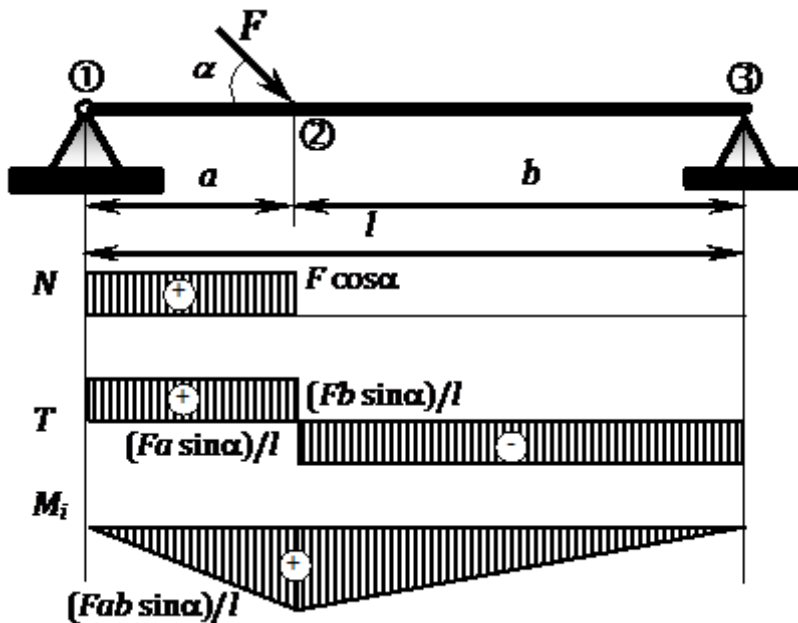


Figura 1.1

Tensiunile date de relațiile (1.1) și (1.2) sunt de aceeași natură și, ca urmare, valoarea rezultantă se obține prin însumarea lor:

$$\sigma_{1,2} = \frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{I_z} y, \quad (1.3)$$

valoarea maximă fiind:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} y. \quad (1.4)$$

Ca urmare a acțiunii forței axiale axa neutră nu va mai trece prin centrul de greutate. Determinarea poziției axei neutre se face prin egalarea valorii tensiunii dată de relația (1.4) cu zero:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} y = 0, \quad (1.5)$$

de unde rezultă poziția axei neutre (figura 1.2):

$$y_{an} = -\frac{N}{M_i} \frac{I_z}{A} = -\frac{N}{A} i_z^2, \quad (1.6)$$

unde i_z este raza de inerție:

$$i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}. \quad (1.7)$$

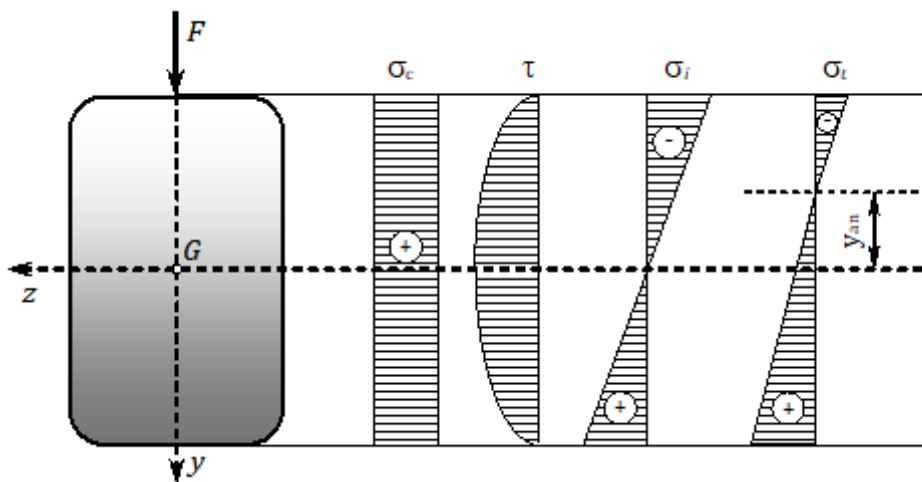


Figura 1.2

Pe baza relațiilor de mai sus, rezultă că axa neutră intersectează secțiune transversală dacă este îndeplinită condiția:

$$\sigma_{i,\max} > \sigma_{t,c}, \quad (1.8)$$

adică, tensiunea maximă rezultată din solicitarea de încovoiere este mai mare ca cea rezultată din solicitarea de tracțiune-compresiune.

1.2.3. Compresiunea excentrică a barelor de înălțime mică

Se consideră bară de secțiune constantă asupra căreia acționează o forță F poziționată într-un punct P diferit de centrul de greutate (figura 1.3,a). Sistemul de coordonate se consideră a fi format din axele principale de inerție Gy și Gz (figura 1.3,a și b).

Cotele punctului P sunt y_p și z_p (figura 1.3,b). Ca urmare a acțiunii forței în punctul indicat, neglijând greutatea proprie a stâlpului, într-o secțiune transversală se vor dezvolta următoarele eforturi secționale:

- o forță axială:

$$N = F ;$$

- un moment de încovoiere orientat de-a lungul axei Gy :

$$M_{iy} = F \cdot z_p ;$$

- un moment de încovoiere orientat de-a lungul axei Gz :

$$M_{iz} = F \cdot y_p .$$

Se consideră un punct oarecare B de coordonate (y_B, z_B) , în cadranul pozitiv (primul cadran – figura 1.3,b).

Ca urmare a celor trei eforturi secționale, în punctul C se vor dezvolta trei tensiuni normale σ ca urmare a trei solicitări:

- compresiune:

$$\sigma_c = \frac{F}{A}; \quad (1.9)$$

- încovoiere datorată momentului de încovoiere orientat de-a lungul axei Gy :

$$\sigma_{iy} = \pm \frac{M_{iy}}{I_y} z_B = \pm \frac{F \cdot z_p}{I_y} z_B; \quad (1.10)$$

- un moment de încovoiere orientat de-a lungul axei Gz :

$$\sigma_{iz} = \pm \frac{M_{iz}}{I_z} y_B = \pm \frac{F \cdot y_P}{I_y} y_B. \quad (1.11)$$

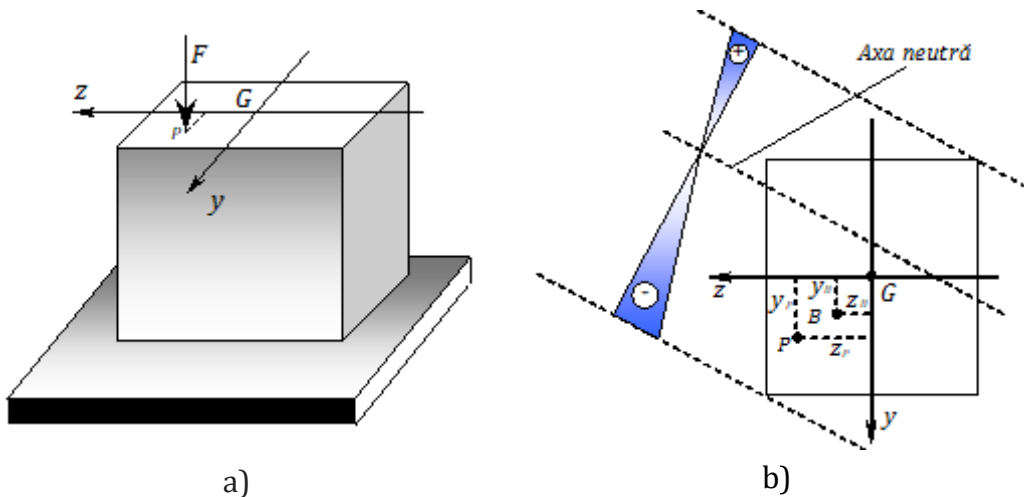


Figura 1.3

În primul cadran, tensiunile dezvoltate de la compresiune și încovoiere au, toate, efect de compresiune. Ca urmare, pe baza relațiilor (1.9) ÷ (1.11) tensiunea normală totală dezvoltată în punctul B este:

$$\sigma_B = -\sigma_c - \sigma_{iy} - \sigma_{iz} = -\frac{F}{A} - \frac{F \cdot z_P}{I_y} z_B - \frac{F \cdot y_P}{I_y} y_B. \quad (1.12)$$

Relația (1.12) poate fi rescrisă, ținând cont și de relația (1.7), sub forma:

$$\sigma_B = -\frac{F}{A} \left(1 + \frac{y_P y_B}{i_z^2} + \frac{z_P z_B}{i_y^2} \right). \quad (1.13)$$

Se pune problema determinării poziției (coordonatelor) axei neutre. Pentru aceasta se consideră că punctul B este situat pe axa neutră ($\sigma_B = 0$) și ca urmare, din (1.13), rezultă ecuația:

$$1 + \frac{y_P y_B}{i_z^2} + \frac{z_P z_B}{i_y^2} = 0. \quad (1.14)$$

Din relația (1.14) rezultă că axa neutră este o dreaptă a cărei puncte de intersecție a celor două axe de coordonate sunt determinate prin considerarea, succesivă, a valorilor $y_B = 0$ și $z_B = 0$:

$$\begin{cases} y_B = 0 \Rightarrow z_B = -\frac{i_y^2}{z_P} = z_{a.n.}; \\ z_B = 0 \Rightarrow y_B = -\frac{i_z^2}{y_P} = y_{a.n.}. \end{cases} \quad (1.15)$$

Așa cum rezultă, axa neutră împarte secțiunea transversală în două părți în care se dezvoltă tensiuni normale pozitive și tensiuni normale negative (figura 1.3,b).

Pe baza relațiilor (1.14) și (1.15) pot fi concluzionate următoarele:

- valoarea tensiunii normale σ dintr-un punct oarecare este proporțională cu distanța de la punctul respectiv la axa neutră;
- în cazul în care axa neutră nu intersectează suprafața secțiunii, atunci tensiunea normală este de compresiune pe întreaga suprafață a secțiunii;
- axa neutră trece prin cadranul opus celui în care se află aplicată forța;
- în cazul în care nu este considerată greutatea proprie a stâlpului, poziția axei neutre depinde numai de coordonatele punctului de aplicare a forței (1.15);
- axa neutră se îndepărtează de centrul de greutate al secțiunii atunci când forța de compresiune se apropie de acesta și invers;
- dacă forța aplicată se deplasează pe o axă care trece prin centru de greutate, atunci axa neutră se deplasează paralel cu ea însăși;
- dacă axa neutră se deplasează de-a lungul uneia dintre axele principale de inerție, atunci axa neutră se deplasează paralel cu cealaltă axă principală de inerție;
- tensiunea produsă într-un punct oarecare B , ca urmare a aplicării unei forțe de compresiune într-un punct P este egală cu

tensiunea produsă în punctul P dacă forța este aplicată în punctul B ;

- i) dacă forța F este aplicată într-un punct oarecare de pe axa neutră rezultă că în punctul P tensiunea este egală cu zero;

Exemplul 1.1

Se consideră stâlpul din figura 1.4 încărcat cu forțele $F_1=3F$, $F_2=6F$ și $F_3=8F$. Cunoscându-se faptul că materialul din care este confecționat stâlpul are $\sigma_a = 120 \text{ MPa}$ și cota $a = 40 \text{ mm}$ se cer:

- a) să se determine forța capabilă F_{cap} din condiția de rezistență $\sigma_{\max} \leq \sigma_a$;
b) să se traseze axa neutră.

Rezolvare:

a) Pentru început, se determină încărcările date de cele trei forțe care acționează asupra stâlpului. Se analizează fiecare forță, în parte, conform tabelului 1.1

Tabelul 1.1

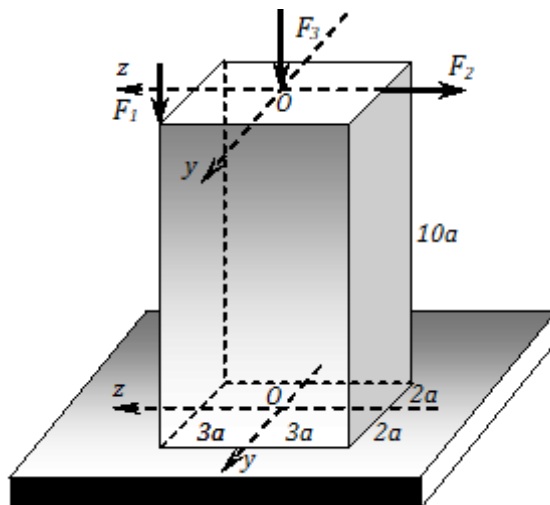
Forța	N	M_{iy}	M_{iz}
F_1	$-3F$	$F_1 \cdot 3a = 3F \cdot 3a = 9Fa$	$-F_1 \cdot 2a = -3F \cdot 2a = -6Fa$
F_2	0	$-F_2 \cdot 10a = -6F \cdot 10a = -60Fa$	0
F_3	$-8F$	0	0
Σ	$-11F$	$-54Fa$	$-6Fa$

Tensiunile care apar sunt:

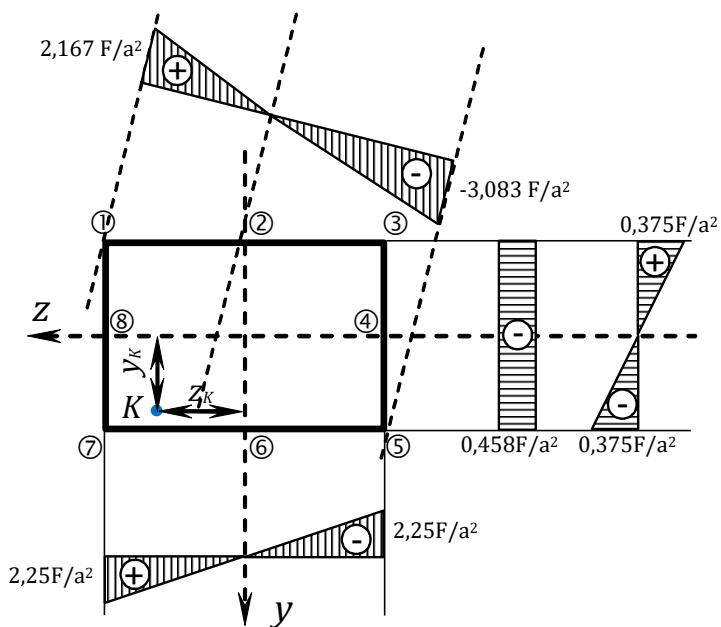
$$\sigma_c = -\frac{11F}{A} = -\frac{11F}{24a^2} = -0,458 \frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_{iy} = \pm \frac{M_{iy}}{W_y} = \pm \frac{54Fa}{\frac{4a \cdot (6a)^2}{6}} = \pm 2,25 \frac{F}{a^2}$$

$$\sigma_{iz} = \pm \frac{M_{iz}}{W_z} = \pm \frac{6Fa}{\frac{6a \cdot (4a)^2}{6}} = \pm 0,375 \frac{F}{a^2}$$



a)



b)

Figura 1.4

Tensiunile normale în cele 8 puncte considerate în figura 1.4,b sunt:

$$\text{Punctul ①: } \sigma_1 = -0,458 \frac{F}{a^2} + 0,375 \frac{F}{a^2} + 2,25 \frac{F}{a^2} = 2,167 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ②: } \sigma_2 = -0,458 \frac{F}{a^2} + 0,375 \frac{F}{a^2} = -0,083 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ③: } \sigma_3 = -0,458 \frac{F}{a^2} + 0,375 \frac{F}{a^2} - 2,25 \frac{F}{a^2} = -2,333 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ④: } \sigma_4 = -0,458 \frac{F}{a^2} - 2,25 \frac{F}{a^2} = -2,708 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ⑤: } \sigma_5 = -0,458 \frac{F}{a^2} - 0,375 \frac{F}{a^2} - 2,25 \frac{F}{a^2} = -3,083 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ⑥: } \sigma_6 = -0,458 \frac{F}{a^2} - 0,375 \frac{F}{a^2} = -0,833 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ⑦: } \sigma_7 = -0,458 \frac{F}{a^2} - 0,375 \frac{F}{a^2} + 2,25 \frac{F}{a^2} = 1,417 \frac{F}{a^2}$$

$$\text{Punctul ⑧: } \sigma_8 = -0,458 \frac{F}{a^2} + 2,25 \frac{F}{a^2} = 1,792 \frac{F}{a^2}$$

Din analiza tensiunilor de mai sus, rezultă că cea mai mare tensiune, în valoare absolută este tensiunea σ_5 .

Punând condiția de rezistență:

$$|\sigma_5| \leq \sigma_a \quad \text{rezultă} \quad 3,083 \frac{F}{a^2} \leq \sigma_a$$

Înlocuind valorile numerice: $\sigma_a = 120 \text{ MPa}$ și cota $a = 40 \text{ mm}$ se obține:

$$F_{cap} \leq \frac{\sigma_a \cdot a^2}{3,083} = \frac{120 \cdot 40^2}{3,083} = 62.277 \text{ (N)}$$

b) pentru determinarea poziției axei neutre se consideră, în primul cadran al secțiunii, un punct oarecare K de coordonate y_K și z_K (figura 1.4,b).

Tensiunea totală în punctul K este formată din:

- tensiunea normală de compresiune:

$$\sigma_c = -\frac{11F}{A} = -\frac{11F}{24a^2} = -0,458 \frac{F}{a^2}$$

- tensiunea normală datorată încovoierii pe direcția Oy :

$$\sigma_{iy} = \frac{M_{iy}}{I_y} z_K = \frac{54Fa}{\frac{4a \cdot (6a)^3}{12}} z_K = 0,75 \frac{F}{a^3} z_K$$

- tensiunea normală datorată încovoierii pe direcția Oz :

$$\sigma_{iz} = -\frac{M_{iz}}{I_z} y_K = -\frac{6Fa}{\frac{6a \cdot (4a)^3}{12}} y_K = -0,1875 \frac{F}{a^3} y_K$$

Ca urmare, tensiunea totală este:

$$\sigma_K = -0,458 \frac{F}{a^2} + 0,75 \frac{F}{a^3} z_K - 0,1875 \frac{F}{a^3} y_K.$$

Punându-se condiția ca punctul K să fie situat pe axa neutră, rezultă condiția:

$$\sigma_K = -0,458 \frac{F}{a^2} + 0,75 \frac{F}{a^3} z_K - 0,1875 \frac{F}{a^3} y_K = 0$$

sau:

$$-0,458 + 0,75 \frac{1}{a} z_K - 0,1875 \frac{1}{a} y_K = 0.$$

Pentru trasarea axei neutre se consideră în ecuația de mai sus, pe rând (Figura 1.4,b):

$$z_K = 0 \Rightarrow -0,458 - 0,1875 \frac{1}{a} y_K = 0 \Rightarrow y_K = -2,442a$$

$$y_K = 0 \Rightarrow -0,458 + 0,75 \frac{1}{a} z_K = 0 \Rightarrow z_K = 0,61a$$

Exemplul 1.2

Se consideră grinda din figura 1.5 încărcată cu o forță distribuită, de intensitate $q = \frac{F}{a}$ și o forță concentrată F .

Considerând: $a = 1\text{m}$ și $F = 30\text{kN}$ se cere să se verifice grinda, la solicitarea compusă de întindere/compresiune cu încovoiere, pentru o valoare a tensiunii admisibile a materialului grinzii $\sigma_a = 140\text{MPa}$. Secțiunea grinzii este de formă pătrată cu latura $b = 200\text{mm}$.

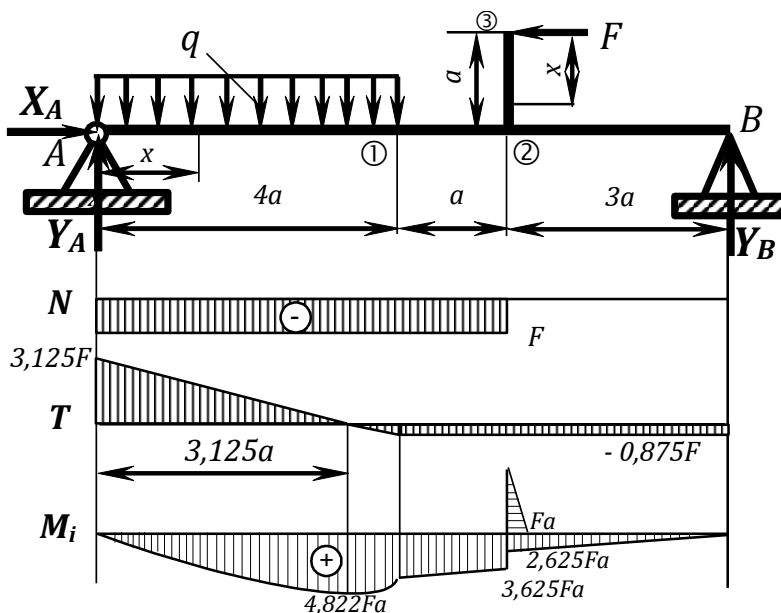


Figura 1.5

Rezolvare:

Pentru calculul de verificare este necesară trasarea diagramei pentru evidențierea locului în care are loc solicitarea cea mai mare. Ca urmare, se determină reacțiunile X_A , Y_A și Y_B :

a) calculul reacțiunilor:

$$\sum X = 0; \quad X_A - F = 0, \text{ de unde rezultă: } X_A = F$$

$$\sum M_B = 0; \quad Y_A \cdot 8a - q \cdot 4a \cdot 6a - Fa = 0 \text{ sau } Y_A \cdot 8a - 25Fa = 0,$$

de unde rezultă: $Y_A = 3,125F$

$$\sum M_A = 0; Y_B \cdot 8a + Fa - q \cdot 4a \cdot 2a = 0 \text{ sau } Y_B \cdot 8a - 7Fa = 0$$

de unde rezultă: $Y_B = 0,875F$

$$\text{Verificare: } \sum Y = Y_A - q \cdot 4a + Y_B = 3,125F - 4F + 0,875F = 0$$

$$\text{b) Diagrama de forțe axiale: } N_{A-2} = -X_A = -F; N_{2-B} = -X_A + F = 0$$

c) diagrama de forțe tăietoare

$$T_{A-1} = Y_A - qx = 3,125F - \frac{F}{a}x = \begin{cases} x=0 & T_A = 3,125F; \\ x=4a & T_1 = -0,875F. \end{cases}$$

$$T_{A-1} = 0 \Rightarrow x = 3,125a$$

$$T_{1-B} = -0,875F$$

d) diagrama de momente încovoietoare:

$$M_{i,A-1} = Y_A x - q \frac{x^2}{2} = 3,125Fx - \frac{Fx^2}{2a} = \begin{cases} x=0 & M_{i,A} = 0 \\ x=3,125a & M_i \cong 4,822Fa \\ x=4a & M_{i,1} = 4,5Fa \end{cases}$$

$$M_{i,1-2} = Y_A(4a+x) - 4qa(2a+x) = 3,125F(4a+x) - 4F(2a+x) = 4,5Fa - 0,875Fx$$

$$M_{i,1-2} = 4,5Fa - 0,875Fx = \begin{cases} x=0 & M_{i,1} = 4,5Fa \\ x=a & M_{i,2} = 3,625Fa \end{cases}$$

$$M_{i,3-2} = Fx = \begin{cases} x=0 & M_{i,3} = 0 \\ x=a & M_{i,2} = Fa \end{cases}$$

$$M_{i,B-2} = Y_B x = 0,875Fx = \begin{cases} x = 0 & M_{i,B} = 0 \\ x = 3a & M_2 = 2,625Fa \end{cases}$$

Din diagramele de eforturi secționale rezultă că cel mai sollicitat punct este punctul în care momentul încovoietor este cel mai mare. În acest punct avem următoarele tensiuni normale:

- de compresiune: $\sigma_c = -\frac{N}{A} = -\frac{F}{A} = -\frac{3 \cdot 10^4}{200^2} = -0,75 \text{ MPa}$
- de încovoiere:

$$\sigma_{iz} = \pm \frac{M_{iz}}{W_z} = \pm \frac{4,822Fa}{\frac{b^3}{6}} = \pm \frac{28,932Fa}{b^3} = \pm \frac{28,932 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{200^3} = \pm 108,495 \text{ MPa}$$

Distribuția tensiunilor este prezentată în figura 1.6. Din această distribuție rezultă că tensiunea maximă este în fibra $b-b$, unde ambele tensiuni normale, de la compresiune și de la încovoiere sunt negative:

$$\sigma_{total} = -\frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{W_z}$$

$$\sigma_{max} = -109,245 \text{ MPa} < \sigma_a$$

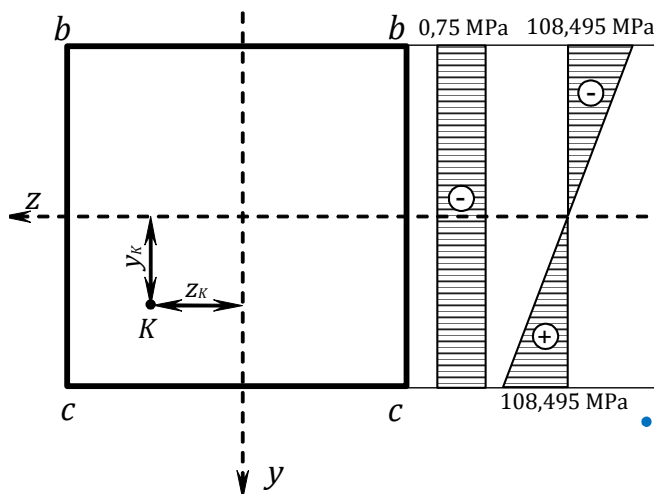


Figura 1.6

Pentru determinarea poziției axei neutre se consideră punctul K și se calculează tensiunea din acest punct:

$$\sigma_K = -\frac{F}{A} + \frac{4,822Fa}{I_z} y_K$$

și se pune condiția ca acest punct să fie situat pe axa neutră: $\sigma_K = 0$, adică

$$\sigma_K = -0,75 + \frac{4,822 \cdot 3 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{\frac{200^4}{12}} y_K = -0,75 + 1,08495 \cdot y_K = 0 \Rightarrow y_K = 0,691$$

1.2.4. Sâmburele central

Din relația (1.13) a tensiunilor normale σ și pe baza figurii 1.3,b se poate afirma că, în funcție de poziția punctului de aplicare a forței excentrice de compresiune F , tensiunile din secțiune vor fi de semne diferite numai dacă axa neutră traversează secțiunea având același semn dacă axa neutră este în afara secțiunii.

Ținând cont de faptul că poziția axei neutre depinde de punctul de aplicare al forței de compresiune F , se pune problema precizării zonei cuprinsă în secțiunea transversală în care se poate aplica forța transversală astfel încât tensiunea normală σ să aibă același semn.

Prin definiție, *domeniul din secțiune din jurul centrului de greutate al acesteia, în interiorul căruia poate fi aplicată o forță normală excentrică, astfel încât tensiunile normale σ să aibă același semn pe întreaga secțiune, se numește sâmbure central.*

În cazul în care, punctul de aplicație B , de coordonate (y_B, z_B) , al forței F , se află în interiorul sâmburelui central, atunci axa neutră este poziționată în afara secțiunii. Limita dintre poziționarea axei neutre în suprafața secțiunii transversale și spațiul din afara acesteia îl reprezintă conturul secțiunii.

Ca urmare, când axa neutră va fi tangentă la conturul secțiunii transversate, punctul de aplicație al forței se va situa pe limita domeniului sâmburelui central.

Se consideră o secțiune oarecare la care se consideră poziția axei neutre ca fiind tangentă la contur (figura 1.7).

Considerându-se o anumită poziție tangentă a axei neutre (a.n.) la contur, poziția punctului P , de aplicare al forței F , de coordonate (y_p, z_p) , va fi determinat pe baza relațiilor (1.15):

$$\begin{cases} z_p = -\frac{i_y^2}{z_{a.n.}}; \\ y_p = -\frac{i_z^2}{y_{a.n.}}. \end{cases} \quad (1.16)$$

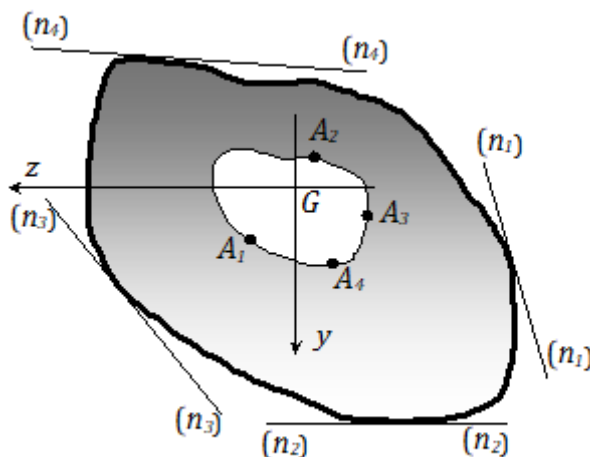


Figura 1.7

Din relațiile (1.16) se poate observa faptul că, în cazul în care secțiunea transversală are forma unui poligon, atunci și sâmburele central va avea o formă de poligon. În cazul secțiunilor transversale curbe și sâmburele central va avea formă curbă. În continuare sunt prezentate metodele de determinare a sâmburelui central pentru o serie de secțiuni transversale uzuale.

a) Determinarea sâmburelui central pentru o secțiune transversală dreptunghiulară

Se consideră o secțiune transversală dreptunghiulară de cote $b \times h$ (lățime $\times$ înălțime) (figura 1.8).

Axele tangente la contur coincid, practic, cu laturile dreptunghiului rezultând 4 axe neutre. Considerând axa neutră n_1-n_1 , tăieturile pe axe

sunt: $y_{a.n.} = \frac{h}{2}$ și $z_{a.n.} = \infty$.

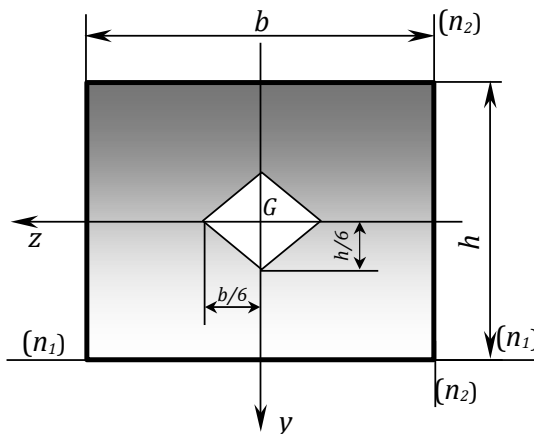


Figura 1.8

Ca urmare, pe baza relațiilor (1.16), punctul de aplicație al forței este:

$$\begin{cases} y_{P1} = -\frac{i_z^2}{y_{a.n.}} = -\frac{h}{6}; \\ z_{P1} = -\frac{i_y^2}{z_{a.n.}} = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0. \end{cases}$$

Pentru axa neutră n_2-n_2 , pe baza aceluiași raționament, dar cu valorile $y_{a.n.} = \infty$ și $z_{a.n.} = \frac{b}{2}$ rezultă cotele:

$$\begin{cases} y_{P2} = -\frac{i_z^2}{y_{a.n.}} = -\frac{i_z^2}{\infty} = 0; \\ z_{P1} = -\frac{i_y^2}{z_{a.n.}} = -\frac{b}{6}. \end{cases}$$

Pentru celelate laturi se repetă calculul rezultând un romb prezentat în figura 1.8.

b) Determinarea sâmburelui central pentru o secțiune transversală circulară

Se consideră o secțiune transversală circulară de rază R (figura 1.9). Secțiunea fiind simetrică se consideră un singur caz, tangența axei neutre la cerc într-un singur punct.

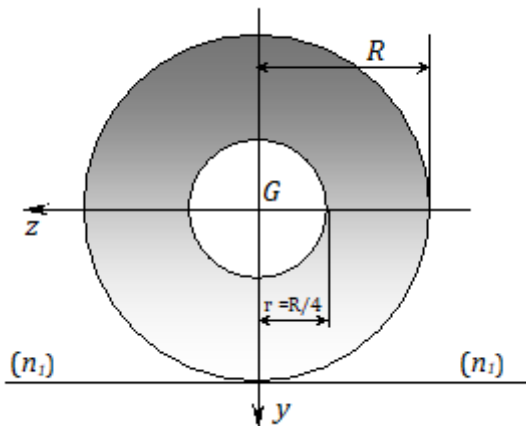


Figura 1.9

Plecând de la relațiile (1.16), considerând $y_{a.n.} = R$, rezultă:

$$y_p = -\frac{i_z^2}{y_{a.n.}} = -\frac{\pi R^4}{4\pi R^2 R} = -\frac{R}{4}$$

Sâmburele central va fi un cerc cu raza egală cu $\frac{R}{4}$.

1.3. Solicitarea cu tensiuni tangențiale (solicitări de tip $\tau - \tau$)

1.3.1. Considerații generale

Acest caz implică fie combinarea solicitărilor de forfecare ca urmare a acțiunii forțelor de forfecare pe cele două direcții, fie combinarea solicitării de forfecare cu solicitarea de torsiune. În ambele situații

tensiunea rezultantă este tot o tensiune tangențială τ . Ceea ce este important de menționat, este faptul că, în general nivelul tensiunii tangențiale determinată de acțiunea unui moment de torsiune este mai mare comparativ cu tensiunea tangențială determinată de acțiunea forțelor tăietoare.

1.3.2. Tensiuni tangențiale datorate numai acțiunii forțelor tăietoare

Se consideră secțiunea din figura 1.10 în care, în centrul de greutate acționează două forțe tăietoare T_y și T_z . Pornind de la relația lui Juravski, tensiunile tangențiale corespunzătoare celor două forțe de forfecare, dezvoltate în punctul P , sunt:

$$\begin{cases} \tau_{xy,P} = \frac{T_y S_z}{b_z I_z} ; \\ \tau_{xz,P} = \frac{T_z S_y}{h_y I_y} . \end{cases} \quad (1.17)$$

unde b_z este lățimea secțiunii în dreptul punctului P , pe direcția Gz , iar h_y este lățimea secțiunii în dreptul punctului P , pe direcția Gy .

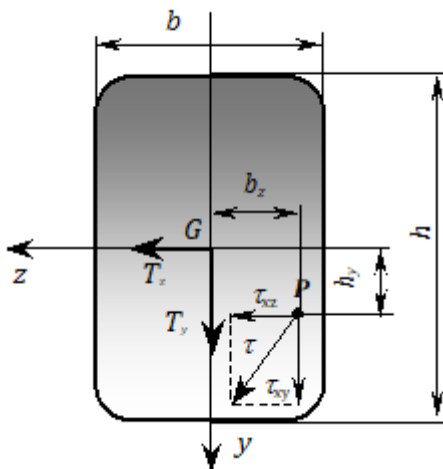


Figura 1.10

Pe baza relațiilor (1.17) tensiunea tangențială totală în punctul considerat P este:

$$\tau_{tot,P} = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} . \quad (1.18)$$

1.3.3. Solicitarea compusă de torsiune cu forfecare. Calculul arcurilor elicoidale cu spire strânse

Unul din elementele cel mai des utilizate în structurile mecanice îl reprezintă arcurile elicoidale cu spire strânse. Principala acțiune a acestora este atenuare a deformațiilor și ca urmare ele au capacitatea de a înmagazina de energie potențială de deformare. Prin acțiunea pe care o au forțele asupra lor, ele sunt comprimate sau întinse.

Se consideră arcul elicoidal din figura 1.11 asupra căruia acționează centric (de-a lungul axei arcului) o forță F . Arcurile elicoidale se definesc prin diametrul de înfășurare al spirelor $D = 2R$, diametrul sârmei din care sunt realizate spirele arcului d , numărul de spire active n și unghiul de înfășurare al arcului α .

În cazul în care, unghiul de înfășurare este mai mic de 10° , atunci arcul elicoidal se spune că este cu spire strânse. Calculul arcurilor se reduce la determinarea solicitărilor care apar în secțiunea transversală a spirelor.

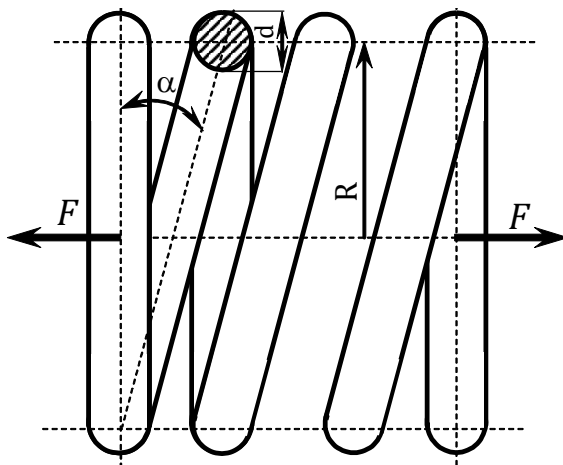


Figura 1.11

Pentru acest calcul, se reduce forța F în centrul de greutate al secțiunii transversal (figura 1.12).

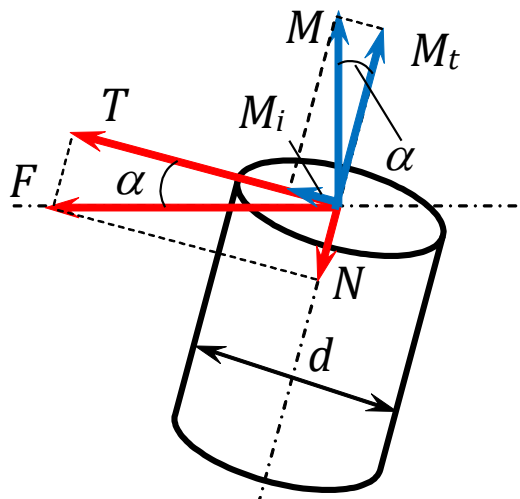


Figura 1.12

Această forță se descompune în două componente:

- o componentă care este perpendiculară pe secțiunea transversal a spirei și care determină apariția forței axiale:

$$N = F \sin \alpha ; \quad (1.19)$$

- o componentă situate în planul secțiunii transversale a spirei și care determină apariția forței tăietoare:

$$T = F \cos \alpha ; \quad (1.20)$$

În același timp, forța F determină apariția în spira arcului a unui moment egal cu:

$$M = F \frac{D}{2} = FR, \quad (1.21)$$

care se descompune în următoarele două componente:

- momentul încovoietor, conținut în planul secțiunii:

$$M_i = M \sin \alpha ; \quad (1.22)$$

- momentul de torsiune, perpendicular pe planul secțiunii:

$$M_t = M \cos \alpha . \quad (1.23)$$

Avându-se în vedere valoarea mică a unghiului α ($\alpha \leq 10^\circ$) se pot face aproximațiile $\sin \alpha \cong 0$ și $\cos \alpha \cong 1$ și, ca urmare, rezultă că principalele eforturi secționale sunt:

- forța tăietoare:

$$T = F \cos \alpha = F ; \quad (1.24)$$

- momentul de torsiune:

$$M_t = M \cos \alpha . \quad (1.25)$$

Ținând cont de relația de calcul a tensiunii tangențiale maxime de forfecare $\tau_{f \max}$ dată de relația lui Juravski și de relația de calcul a tensiunii tangențiale maxime din cazul torsiunii $\tau_{t \max}$, tensiunea totală în spira arcului va fi egală cu:

$$\tau_{tot \max} = \tau_{f \max} + \tau_{t \max} . \quad (1.26)$$

Înlocuind expresiile ariei $A = \frac{\pi d^2}{4}$ și ale modulului $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$, și ținând cont că momentul de torsiune este $M_t = \frac{F D}{2}$ rezultă:

$$\tau_{tot} = \frac{4}{3} \frac{4F}{\pi d^2} + \frac{F D}{2} \frac{16}{\pi d^3} = \frac{16}{3} \frac{F}{\pi d^2} + \frac{16 F R}{\pi d^2} = \frac{16 F}{\pi d^2} \left(\frac{1}{3} + \frac{R}{d} \right), \quad (1.27)$$

unde, prin R s-a notat raza de înfășurare a spirei ($R = D/2$).

Distribuția tensiunii tangențiale la suprafața transversal a spirei este prezentată în figura 1.13, unde s-au făcut notațiile: $\tau_{f, \max}$ - tensiunea

tangențială maximă la forfecare și $\tau_{t,\max}$ - tensiunea tangențială maximă la torsiune.

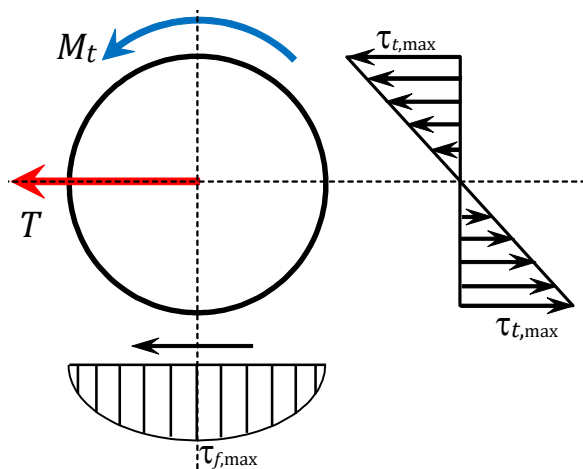


Figura 1.13

Condiția de rezistență a spirei arcului se exprimă prin relația:

$$\tau_{tot\max} = \tau_{f\max} + \tau_{t\max} \leq \tau_a. \quad (1.28)$$

În practică, se consideră că influența efortului dat de forța tăietoare este mult mai mică comparativ cu efectul momentului de torsiune și, ca urmare, relația de calcul folosită în calculul de rezistență este condiția de rezistență de la torsiunea barelor drepte de secțiune circulară:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{t\max}}{W_p} = \frac{16FR}{\pi d^3} \leq \tau_a. \quad (1.29)$$

În practică, relația (1.29) este corectată printr-un coefficient de corecție k_a care ține cont de de influența forfecării cât și de o serie de alți factori care nu sunt luați în considerare, precum: încovoierea, deformațiile longitudinale etc.

Valoarea coeficientului k_a este stabilită în funcție de raportul dintre raza de înfășurare a spirei R și raza secțiunii circulare a spirei r (R/r) (tabelul 1.2).

Tabelul 1.2.

R/r	3	4	5	6	7	8	9	10
k_a	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

Din relația de mai sus rezultă diametrul necesar al sârmei spirei arcului:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{16FR}{\pi \tau_a}}. \quad (1.30)$$

Valoarea coeficientului k este cu atât mai mare cu cât raportul R/r (r – raza sârmei arcului, $r=d/2$) este mai mic, adică cu cât arcul este mai rigid din punct de vedere geometric.

1.4. Solicitarea cu tensiuni tangențiale (solicitări de tip $\sigma - \tau$)

1.4.1. Considerații generale

Solicitările compuse de tip $\sigma - \tau$ reprezintă cea mai mare parte a solicitărilor întâlnite în tehnică. În acest caz pot să apară combinații între solicitări simple care generează tensiuni normale σ (întindere/compresiune și/sau încovoiere) cu solicitări care generează tensiuni tangențiale τ (forfecare și/sau torsiune).

În cazul acestor solicitări se determină o tensiune echivalentă σ_{ech} care se compară cu tensiunea admisibilă σ_a . Tensiunea echivalentă σ_{ech} se determină pe baza teoriilor de rezistență, cele mai folosite fiind teoriile III și V.

1.4.2. Cazul unei bare de secțiune circulară încastrată

Se consideră bara din figura 1.14, de secțiune circular de diametru d încărcată cu forțele $F_1 = F_2 = 10F$, $F_3 = 20F$. Materialul din care este

confecționată bara are tensiunea admisibilă la rupere σ_a . Cotele geometrice sunt prezentate în figura 1.14.

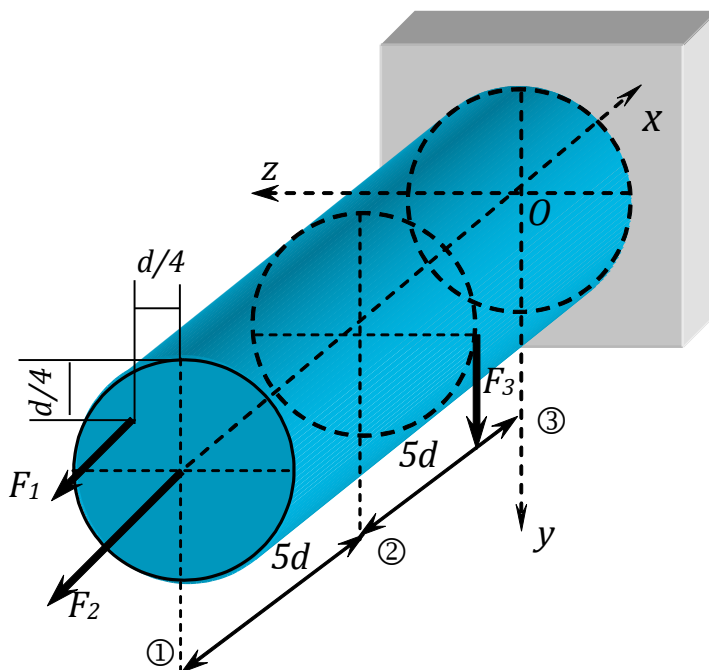


Figura 1.14

Se cer:

- să se traseze diagramele de variație a forței axiale N și de variație a momentelor de încovoiere M_i și de torsiune M_t ;
- să se determine forța capabilă F_{cap} din condiția de rezistență $\sigma_{ech,max} \leq \sigma_a$, folosind ipoteza a III-ia de rupere (se va neglija efectul de forfecare).

Rezolvare:

- a) - forța axială este constantă între punctele ① și ③ fiind egală cu:

$$N_{13} = F_1 + F_2 = 10F + 20F = 30F$$

- momentul încovoietor are următoarele componente:

- de la ① la ② forța F_1 generează momente atât după direcția Oy cât și după direcția Oz . Ambele momente sunt constant și egale în modul cu:

$$M_{iy} = M_{iz} = F_1 \cdot \frac{d}{4} = 10F \cdot \frac{d}{4} = 2,5Fd.$$

Ținând cont de sensurile pozitive ale axelor Oy și Oz se poate constata că ambele sunt negative.

- de la ② la ③, ca urmare a acțiunii forței F_3 apare un moment încovoietor suplimentar, orientat pe direcția Oz , în sens negativ. Momentul suplimentar este variabil având valoarea $M_{iz2} = 0$ în punctul ② și $M_{iz3} = F_3 \cdot 5d = 10F \cdot 5d = 50Fd$, fiind negativ ca sens. Ca urmare, în punctul ② momentul total încovoietor după direcția Oz este: $M_{iz2,tot} = -2,5Fd$, iar în punctul ③ este: $M_{iz3,tot} = -2,5Fd - 50Fd = -52,5Fd$.

- momentul de torsiune M_t se manifestă numai între punctele ② și ③ fiind determinat de forța F_3 și este constant: $M_t = F_3 \cdot \frac{d}{2} = 10F \cdot \frac{d}{2} = 5Fd$.
Momentul rotește în sensul pozitiv al axei Ox .

Diagramele sunt prezentate în figura 1.15.

b) calculul tensiunii echivalente se face pornind de la solicitările simple maxime rezultate din diagramele din figura 1.15.

În cazul solicitărilor de tracțiune tensiunea maxima este de:

$$\sigma_t = \frac{N}{A} = \frac{30F \cdot 4}{\pi d^2} = 38,197 \frac{F}{d^2}$$

În cazul solicitărilor de încovoiere avem momente care se dezvoltă după ambele direcții Oy și Oz . Ca urmare, se calculează un moment încovoietor echivalent:

$$M_i = \sqrt{M_{iy}^2 + M_{iz}^2} = Fd \sqrt{52,5^2 + 2,5^2} = 58,75Fd.$$

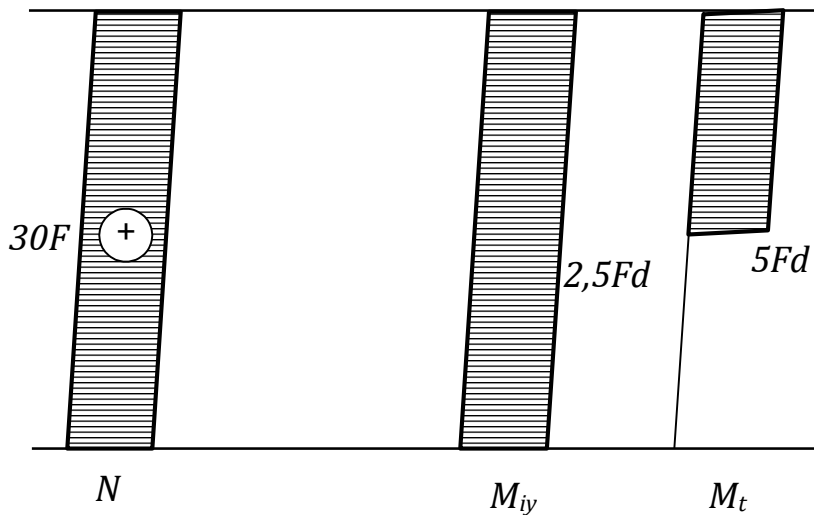


Figura 1.15

Tensiunea normal echivalentă, rezultată din solicitarea de încovoiere, va fi:

$$\sigma_{i,ech} = \frac{M_i}{W_z} = \frac{58,75Fd \cdot 32}{\pi d^3} = 598,422 \frac{F}{d^2}.$$

Tensiunea normal totală va fi:

$$\sigma_{tot} = \sigma_t + \sigma_{i,ech} = (58,75 + 598,422) \frac{F}{d^2} = 657,172 \frac{F}{d^2}.$$

În cazul torsiunii tensiunea dezvoltată este una tangențială calculate cu relația:

$$\tau = \frac{M_t}{W_p} = \frac{5Fd \cdot 16}{\pi d^3} = 25,464 \frac{F}{d^2}.$$

Aplicând ipoteza a III-ia de rupere, tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^4 + 4\tau^2} = \frac{F}{d^2} \sqrt{657,172^2 + 4 \cdot 25,464^2} = 659,142 \frac{F}{d^2}$$

Din condiția de rezistență ($\sigma_{ech,max} \leq \sigma_a$) vom obține:

$$\sigma_{ech,max} \leq \sigma_a \Rightarrow 659,142 \frac{F}{d^2} \leq \sigma_a \text{ din care rezultă } F \leq 0,00151 \sigma_a d^2.$$

1.4.3. Arbori drepți

Se consideră arborele din figura 1.16 pe care sunt montate două roți de curea în punctele ① și ②. Arborele este „rezemat” pe două lagăre de rostogolire, în punctele A și B. Se cunosc următoarele date:

- Distanța $a=100mm$;
- Puterea motorului care antrenează arborele $P = 15 kW$;
- Diametrele $D_1 = 500mm$ și $D_2 = 300mm$;
- Turația motorului $n=1000rot/min$;
- Tensiunea admisibilă a materialului din care este confecționat arborele $\sigma_a = 140 MPa$.

Se cere să se determine diametrul minim al arborelui d astfel încât arborele să nu se rupă. Se va folosi ipoteza a III-ia de rupere.

Rezolvare:

Pentru rezolvare se parcurg următoarele etape:

Etapă 1 – se determină momentul de torsiune transmis la arbore.

Deoarece puterea este dată în kW formula de calcul a momentului de torsiune este:

$$M_t = 9,55 \cdot \frac{P [kW]}{n [rot / min]} = 9,55 \cdot \frac{15}{1000} = 0,14325 [kNm] = 143.250 [Nmm]$$

Etapă 2 – determinarea valorilor forțelor S_1 și S_2 din curele.

Determinarea se face pornind de la calculul momentului de torsiune pentru fiecare roată în parte.

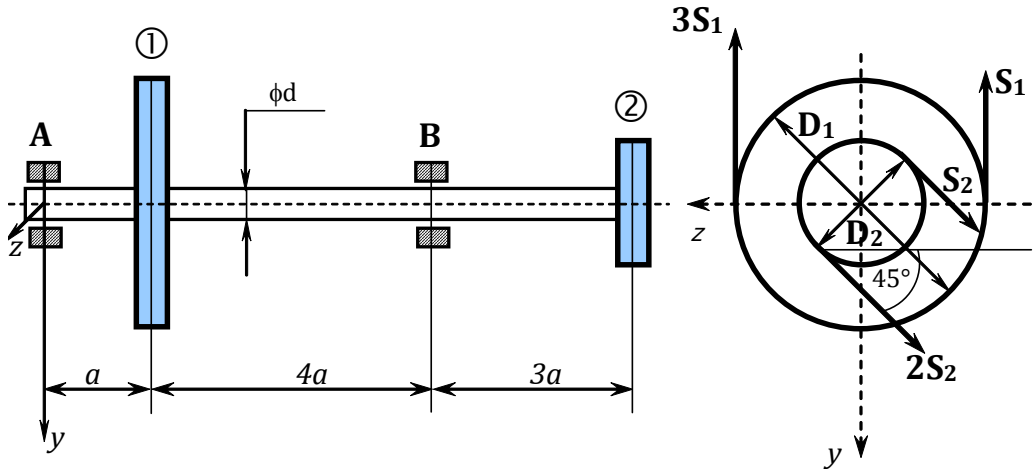


Figura 1.16

Roata ①

$$M_t = 3S_1 \frac{D_1}{2} - S_1 \frac{D_1}{2} = S_1 D_1.$$

Înlocuind valoarea momentului de torsiune M_t și pe cea a diametrului D_1 rezultă pentru forța S_1 valoarea:

$$143.250 [Nmm] = S_1 \cdot 500 [mm] \Rightarrow S_1 = 286,5 [N]$$

Roata ②

$$M_t = 2S_2 \frac{D_2}{2} - S_2 \frac{D_2}{2} = \frac{S_2 D_2}{2}.$$

Înlocuind valoarea momentului de torsiune M_t și pe cea a diametrului D_2 rezultă pentru forța S_2 valoarea:

$$143.250 [Nmm] = S_2 \cdot 150 [mm] \Rightarrow S_2 = 955,0 [N]$$

Etapa 3 – se determină rezultantele forțelor din curele.

- Așa cum rezultă din direcțiile curelelor, forțele S_1 vor avea o rezultantă $R_1 = 3S_1 + S_1 = 4S_1$ care va acționa de-a lungul axei Oy (figura 1.17), în sensul negativ al acesteia, în punctul ①.
- Forțele S_2 vor da o rezultantă $R_2 = 2S_2 + S_2 = 3S_2$ care face cu axa Oz un unghi de 45° (figura 1.17), în punctul ②.

Rezultanta R_2 făcând un unghi de 45° cu axa Oz va avea două proiecții:

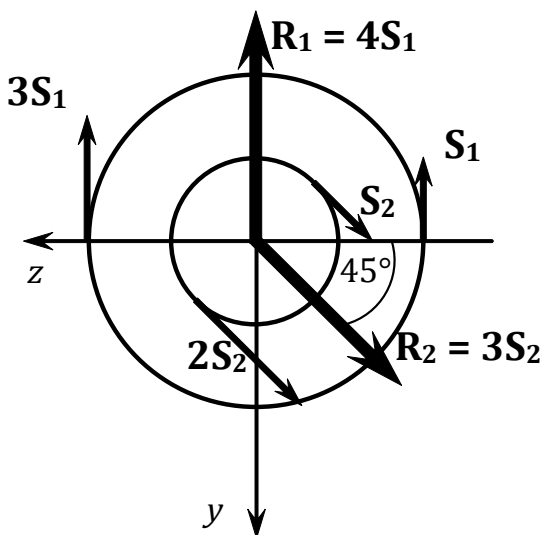


Figura 1.17

- Pe axa Oy : $R_{2y} = R_2 \sin 45^\circ$
- Pe axa Oz : $R_{2z} = R_2 \cos 45^\circ$

Observație:

- Componenta R_{2y} este îndreptată în sensul pozitiv al axei Oy iar componenta R_{2z} este orientată în sensul negativ al axei Oz .

Etapa 4 – se determină schema de încărcare a arborelui și se trasează diagramele.

Pentru această etapă se consideră arborele ca o grindă rezemată în punctele în care sunt rulmenții și se figurează, în ① și ②, proiecțiile forțelor rezultante R_1 și R_2 , pe cele două axe (direcții) Oy și Oz (figura 1.18).

Pentru reprezentarea corectă a direcțiilor de acțiunea forțelor de-a lungul celor două axe se consideră, arbitrar un sens pozitiv (v. Figura 1.15 – direcția „ Oy ” pozitivă și direcția „ Oz ” pozitivă – stânga figurii).

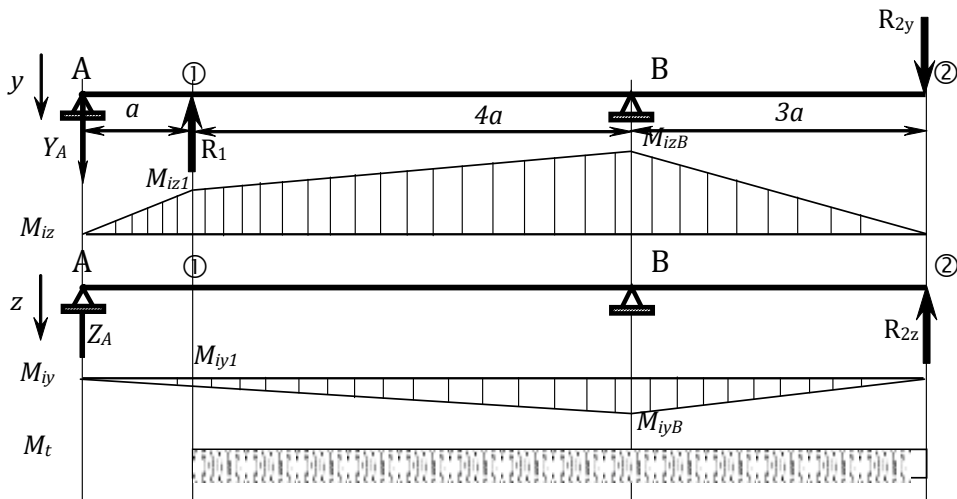


Figura 1.18

- Diagrama de momente de încovoiere după direcția „ Oz ”

Proiecțiile forțelor pe direcția „ Oy ” generează momentele de încovoiere de-a lungul axei „ Oz ”. Pentru început se determină reacțiunile din punctele A și B:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Y_A \cdot 5a - R_1 \cdot 4a - R_{2y} \cdot 3a = 0$$

$$Y_A = \frac{4 \cdot R_1 + 3R_{2y}}{5} = \frac{4 \cdot 1146 + 3 \cdot 2865 \cdot 0,707}{5} = 2132,133 [N]$$

Reacțiune din punctul B este orientată în sus și are valoarea $Y_B = 3011,688 [N]$.

Valorile de moment în punctele ① și B vor fi:

$$M_{iz1} = Y_A \cdot a = 2132,133 \cdot 100 = 0,2132133 \cdot 10^6 [Nmm]$$

$$M_{izB} = R_{2y} \cdot 3a = 2865 \cdot 0,707 \cdot 300 = 0,6076665 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

- Diagrama de momente de încovoiere după direcția „Oy ”

Proiecțiile forțelor pe direcția „Oz” generează momentele de încovoiere de-a lungul axei „Oy”. Pentru început se determină reacțiunile din punctele A și B.

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow Z_A \cdot 5a - R_{2y} \cdot 3a = 0 \quad Z_A = \frac{3R_{2y}}{5} = \frac{3 \cdot 2865 \cdot 0,707}{5} = 1215,333 \text{ [N]}$$

Reacțiune din punctul B este orientată în jos și are valoarea $Z_B = 3240,888 \text{ [N]}$.

Valorile de moment în punctele ① și B vor fi:

$$M_{iyB} = R_{2z} \cdot 3a = 2865 \cdot 0,707 \cdot 300 = 0,6076665 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Pentru determinarea de încovoiere după direcția „Oy ” se determină prin asemănare:

$$\frac{M_{iyB}}{M_{iy1}} = \frac{5a}{a}, \text{ de unde rezultă: } M_{iy1} = \frac{M_{iyB}}{5} = 0,1215333 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}$$

Momentul de torsiune este constant ca valoare și se manifestă între cele două roți de curea:

$$M_t = 0,14325 \cdot 10^6 \text{ [Nmm]}.$$

Etapa 5 – determinarea tensiunii echivalente.

Conform ipotezei a III-ia tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Tensiunea normală σ este determinată de solicitarea de încovoiere și, ca urmare, va fi dată de relația: $\sigma = \frac{M_i}{W_z}$, unde W_z este modulul de rezistență la încovoiere.

Observație:

- Fiind o secțiune circulară tensiune poate fi calculată și în funcție de W_y deoarece $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$.

Tensiunea tangențială τ este determinată de solicitarea de torsiune fiind calculată cu relația $\tau = \frac{M_t}{W_p}$, unde W_p este modulul de rezistență la torsiune și se calculează cu relația $W_p = \frac{\pi d^3}{16}$.

Comparând relațiile de calcul ale celor două module rezultă că: $W_p = 2W_z$. Ca urmare, tensiunea echivalentă va fi:

$$\sigma_{ech} = \sqrt{\left(\frac{M_i}{W_z}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{W_p}\right)^2} = \frac{1}{W_z} \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{M_i^2 + M_t^2}$$

În continuare este necesară determinarea valorilor maxime ale momentului de încovoiere și de torsiune.

Analizând cazul momentelor de încovoiere se constată că valorile extreme sunt în punctele ① și B .

În punctul ① momentul încovoiitor resultant va fi egal cu:

$$M_{i1} = \sqrt{M_{iy1}^2 + M_{iz1}^2} = 10^6 \sqrt{0,12115333^2 + 0,2132133^2} = 0,245230586 \cdot 10^6 [Nmm]$$

În punctul B momentul încovoiitor resultant va fi egal cu:

$$M_{iB} = \sqrt{M_{iyB}^2 + M_{izB}^2} = 10^6 \sqrt{0,6076665^2 + 0,6076665^2} = 0,859370205 \cdot 10^6 [Nmm]$$

Comparând valorile momentului din punctele ① și B rezultă că mometul de încovoiere cel mai mare este în punctul B :

$$M_{IB} = 0,859370205 \cdot 10^6 [Nmm].$$

Etapa 6 – Calculul diametrului.

Considerând valorile maxime ale momentelor de încovoiere și torsiune și punând condiția de rezistență:

$$\sigma_{ech} \leq \sigma_a$$

se obține:

$$\sigma_{ech} = \frac{32 \cdot 10^6}{\pi d^3} \sqrt{0,859370205^2 + 0,14325^2} \leq 140,$$

de unde rezultă:

$$d \geq 39,872 \text{ mm}$$

1.4.4. Calculul pârghiilor drepte spațiale

Un caz aparte îl reprezintă pârghiile drepte spațiale, care sunt pârghii folosite în diferite sisteme și dispozitive. Ca urmare a sistemelor de legătură acestea sunt încărcate de diferite forțe și ca urmare a faptului că sunt spațiale apar toate cele patru forme de solicitari simple. Calculul implică determinarea forțelor și a momentelor, calculul realizându-se în punctul de încastrare deoarece față de încastrare brațele forțelor forțelor fiind cele mai mari.

Pentru exemplificare se consideră pârghia din figura 1.19 care are o secțiune dreptunghiulară.

Se consideră că asupra pârghieii acționează trei forțe: $F_1 = 1000 \text{ N}$, $F_2 = 500 \text{ N}$ și $F_3 = 1500 \text{ N}$, iar materialul din care este confecționată pârghia are tensiunea admisibilă $\sigma_a = 120 \text{ MPa}$.

Se pune problema dacă pârghia rezistă sau nu în încastrare. În vederea determinării stării de tensiune se determină componentele eforturilor din încastrare.

Se analizează fiecare încărcare din încastrare ținând cont de următoarele reguli:

- Dacă forțele sunt îndreptate în sensul negativ al axelor Ox , Oy și Oz , atunci acestea se consideră a fi pozitive;
- Dacă momentele sunt îndreptate în sensul pozitiv al axelor acestea se consideră pozitive.

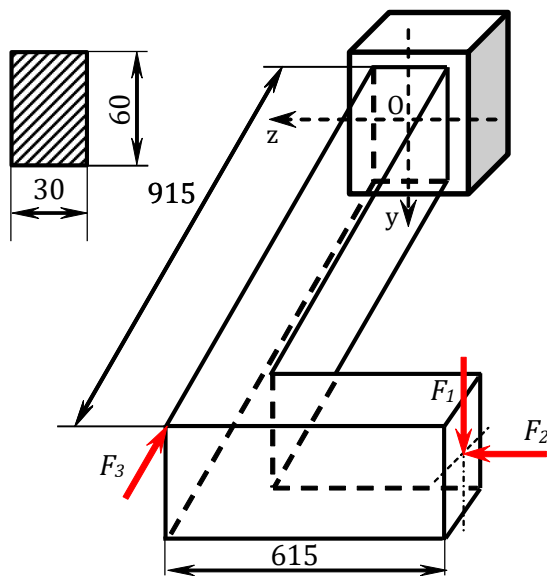


Figura 1.19

Pornind de la sistemul de axe, din încastrare, din figura 1.19 se definește următorul tabel:

Forța	N	T_y	T_z	M_{iy}	M_{iz}	M_t
F_1	0	-1000	0	0	$-F_1(915-15)$	$F_1(615-15)$
F_2	0	0	-500	$F_2(915-15)$	0	0
F_3	-1500	0	0	$F_3 \cdot 15$	$F_3 \cdot 30$	0
Total	-1500	-1000	-500	$0,4725 \cdot 10^6$	$-0,855 \cdot 10^6$	$0,6 \cdot 10^6$

În continuare, ținând cont de relațiile de calcul ale tensiunilor, se determină valorile acestora și se calculează tensiunile echivalente în diferite puncte ale secțiunii (figura 1.20).

- Tensiunile normale σ

- tracțiune/compresiune: $\sigma_c = -\frac{1500}{30 \cdot 60} = -0,833 \text{ MPa}$

- încovoiere după direcția Oz :

$$\sigma_{iz} = \pm \frac{M_{iz}}{W_z} = \pm \frac{0,855 \cdot 10^6}{\frac{30 \cdot 60^2}{6}} = \pm 47,5 \text{ MPa}$$

- încovoiere după direcția Oy :

$$\sigma_{iy} = \pm \frac{M_{iz}}{W_z} = \pm \frac{0,4725 \cdot 10^6}{\frac{30^2 \cdot 60}{6}} = \pm 52,5 \text{ MPa}$$

- Tensiunile tangențiale τ

- forfecare după direcția Oz (relația lui Juravski):

$$\tau_{xz} = \frac{3}{2} \frac{T_z}{A} = \frac{3}{2} \frac{500}{30 \cdot 60} = 0,416 \text{ MPa}$$

- forfecare după direcția Oy (relația lui Juravski):

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2} \frac{T_y}{A} = \frac{3}{2} \frac{1000}{30 \cdot 60} = 0,832 \text{ MPa}$$

- tensiunile tangențiale τ rezultate din forfecare se trec paralele cu axele de-a lungul cărora acționează forțele (se simbolizează direcția de acțiune a tensiunii care este identică cu cea a forței rezultante)

- torsiune – fiind secțiune dreptunghiulară calculul tensiunilor se face cu următoarele relații:

- Tensiunea maximă: $\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{M_t}{k_1 h b^2}$,

unde $k_1=0,246$ este un coeficient care se găsește sub formă tabelară și este determinat în funcție de raportul h/b , iar latura b este latura cea mai mică (tabelul 1.3).

Ca urmare:

$$\tau_{\max} = \frac{0,6 \cdot 10^6}{0,246 \cdot 60 \cdot 30^2} = 45,167 \text{ MPa}$$

și se manifestă pe latura cea mai mare.

- Tensiunea de pe latura mică se calculează cu relația:

$$\tau_2 = k_2 \cdot \tau_{\max} = 0,79 \cdot 45,167 = 35,682 \text{ MPa}$$

Tabelul 1.3

Raportul h/b	Coeficientul k	Coeficientul k_1	Coeficientul k_2
1	0,141	0,208	1,00
1,2	0,166	0,219	0,93
1,5	0,196	0,231	0,859
1,75	0,214	0,239	0,820
2	0,229	0,246	0,79
2,5	0,249	0,258	0,77
3	0,263	0,267	0,766
4	0,281	0,282	0,745

Calculul tensiunilor rezultante:

Observație:

- în colțurile secțiunii există **NUMAI** tensiuni normale σ . Tensiunile din colțurile secțiunii

$$\sigma_1 = \sigma_c + \sigma_{iz} - \sigma_{iy} = -0,833 + 47,50 - 52,5 = -5,833 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2 = \sigma_c + \sigma_{iz} + \sigma_{iy} = -0,833 + 47,50 + 52,5 = 99,167 \text{ MPa}$$

$$\sigma_3 = \sigma_c - \sigma_{iz} + \sigma_{iy} = -0,833 - 47,50 + 52,5 = 4,167 \text{ MPa}$$

$$\sigma_4 = \sigma_c - \sigma_{iz} - \sigma_{iy} = -0,833 - 47,50 - 52,5 = -100,833 \text{ MPa}$$

Tensiunile din mijlocul laturilor

- Punctul ⑤

$$\sigma_5 = \sigma_c + \sigma_{iz} = -0,833 + 47,5 = 46,667 \text{ MPa}$$

$$\tau_5 = \tau_2 - \tau_{xz} = 35,682 - 0,416 = 35,266 \text{ MPa}$$

tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{ech,5} = \sqrt{\sigma_5^2 + 4\tau_5^2} = 84,572 \text{ MPa}$$

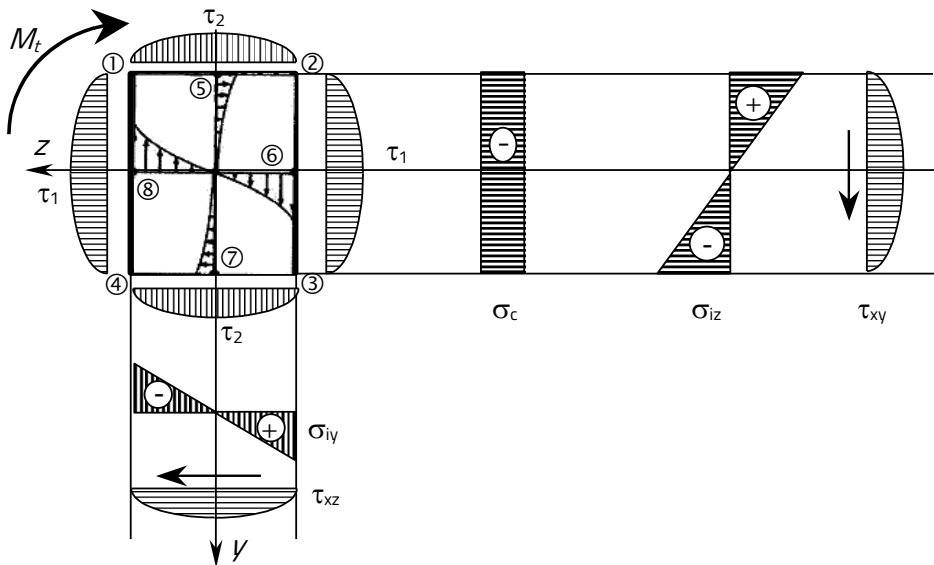


Figura 1.20

Punctul ⑥

$$\sigma_6 = \sigma_c + \sigma_{iy} = -0,833 + 52,5 = 51,667 \text{ MPa}$$

$$\tau_6 = \tau_1 + \tau_{xy} = 45,167 + 0,832 = 45,999 \text{ MPa}$$

tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{ech,6} = \sqrt{\sigma_6^2 + 4\tau_6^2} = 105,513 \text{ MPa}$$

Punctul ⑦

$$\sigma_7 = \sigma_c - \sigma_{iz} = -0,833 - 47,5 = -48,333 \text{ MPa}$$

$$\tau_7 = \tau_2 + \tau_{xz} = 35,682 + 0,416 = 36,098 \text{ MPa}$$

tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{ech,7} = \sqrt{\sigma_7^2 + 4\tau_7^2} = 86,881 \text{ MPa}$$

Punctul ⑧

$$\sigma_8 = \sigma_c - \sigma_{iy} = -0,833 - 52,5 = -53,333 \text{ MPa}$$

$$\tau_8 = \tau_1 - \tau_{xy} = 45,167 - 0,832 = 44,335 \text{ MPa}$$

tensiunea echivalentă este:

$$\sigma_{ech,8} = \sqrt{\sigma_8^2 + 4\tau_8^2} = 103,473 \text{ MPa}$$

Analizând tensiunile din cele 8 puncte, rezultă că tensiunea cea mai mare este în punctul ⑥ $\sigma_{ech,6} = 105,513 \text{ MPa} \leq \sigma_a = 120 \text{ MPa}$.

BARE CURBE PLANE

2

2.1. Generalități

Barele curbe sunt bare care au axa curbă fie în plan, fie în spațiu. Exemple clasice de bare curbe plane sunt cârligele montate la dispozitivele și instalațiile de ridicat, piese inelare sau zalele unui lanț (figura 2.1).

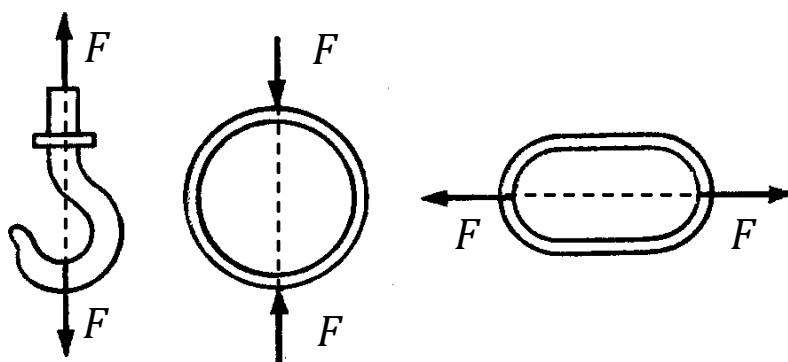


Figura 2.1

Studiul se face ținând cont de următoarele condiții:

- Forțele exterioare acționează în planul care conține axa barei;
- Secțiunea transversală a barei are o axă de simetrie iar planul axei barei este plan de simetrie pentru bară.

Pe baza raportului dintre grosimea secțiunii transversale „ h ” și raza de curbură „ R ” se disting două tipuri de bare curbe:

- în cazul în care raportul $R/h > 5...6$ bara are curbura mică;
- în cazul în care raportul $R/h < 5...6$ bara are curbura mare.

Ținând cont de condițiile mai sus menționate, se poate afirma faptul că deformația unei bare curbe are un caracter plan, axa barei fiind și după deformare o curbă plană.

La calculul barelor curbe, cu secțiune plină, se admite că urmare a deformării modificarea secțiunii transversale este neglijabilă.

2.2. Bare curbe plane de curbură mică

Se consideră bara curbă plană din figura 2.2 asupra căreia acționează un set de încărcări exterioare (forțe și/sau momente) notate la modul general cu F_i ($i=\overline{1,q}$).

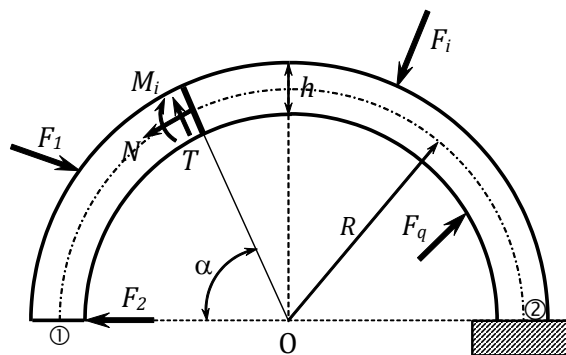


Figura 11.2

Așa cum se cunoaște, ca urmare a acțiunii încărcărilor complexe exterioare coplanare, în orice secțiune transversală se vor dezvolta forțe axiale N , forțe tăietoare T și momente încovoietoare M_i .

În cazul acestui tip de bare se aplică calculul clasic de rezistență, astfel încât tensiunile care apar vor fi:

- tensiunea normală σ , dată de sollicitarea simplă de tracțiune/compresiune:

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad (2.1)$$

unde A este valoarea secțiunii transversale;

- tensiunea tangențială τ dezvoltată de forța tăietoare T calculate cu relația lui Juravski:

$$\tau = \frac{TS_z}{bI_z} \quad (2.2)$$

- c) tensiunea normală σ_i generată de momentul încovoietor M_i , calculată cu relația lui Navier:

$$\sigma_i = \frac{M_i}{I_z} y. \quad (2.3)$$

2.3. Bare curbe plane de curbură mare

În acest caz avem de a face cu bare curbe la care raza de curbură este mică iar calculul tensiunii normale, datorată încovoierii, se calculează cu relația lui Winkler (Emile Winkler). Ca și în cazul încovoierii plane pure, trebuie făcute următoarele observații:

- Fibra situată în axa neutră nu-și modifică lungimea. Axa neutră împarte secțiunea transversală în două părți: una în care tensiunea normală σ este pozitivă (apare fenomenul de întindere al fibrelor) și o a doua parte în care tensiunea normală este negativă (apare fenomenul de compresiune a fibrelor);
- În cazul barelor curbe axa neutră nu coincide cu axa longitudinală (a centrelor de greutate) și, ca urmare, poziția axei neutre trebuie determinată.

Se consideră bara curbă plană din figura 2.3 la care se fac următoarele notații:

- R_1 - raza interioară – raza de la centrul de curbură C la fibra interioară;
- R_2 - raza exterioară – raza de la centrul de curbură C la fibra exterioară;
- R - distanța de la centrul de curbură C la axa centrelor de greutate G (a.c.g.);
- r - distanța de la centrul de curbură C la axa neutră (a.n);
- ρ - raza de curbură a fibrei considerate la distanța y față de axa neutră;
- e - distanța de la axa centrelor de greutate la axa neutral;
- y_1 - distanța de la axa neutral la fibra interioară;

- y_2 - distanța de la axa neutră la fibra exterioră.

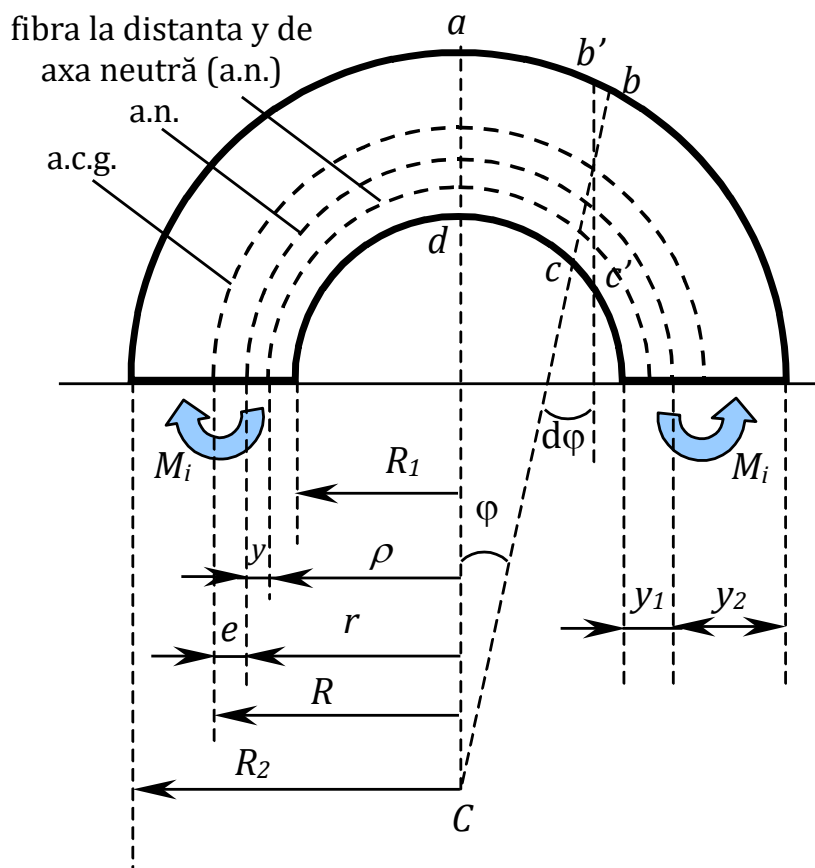


Figura 2.3

Se consideră un segment situate la distanța y față de axa neutră. Segmentul, în faza inițială când nu este aplicat momentul de încovoiere M_i , are o lungine aproximată cu:

$$ds = \rho \cdot \varphi. \quad (2.4)$$

Alungirea segmentului inițial ds , urmare a rotirii și pe baza ipotezei lui Bernoulli, poate fi aproximată cu relația:

$$\Delta ds = y \cdot d\varphi \quad (2.5)$$

Considerând relația geometrică (figura 2.2):

$$y + \rho = r, \quad (2.6)$$

și ținând cont că pentru materialul considerat legea lui Hooke este valabilă, alungirea segmentului de lungime ds considerat inițial este, pe baza relațiilor (2.4), (2.5) și (2.6), egală cu:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y}{\rho} \cdot \frac{d\phi}{\phi} = \frac{r - \rho}{\rho} \cdot \frac{d\phi}{\phi}. \quad (2.7)$$

Pe baza legii lui Hooke și a relației (2.7) tensiunea normal σ este:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{r - \rho}{\rho} \cdot \frac{d\phi}{\phi} = E \frac{d\phi}{\phi} \cdot \frac{y}{r - y}. \quad (2.8)$$

Trebuie făcute o serie de observații:

- din relația (2.8) rezultă faptul că variația tensiunii normale σ în secțiunea transversal este dată de o funcție hiperbolică;
- cea mai mare apare în fibrele situate la extremele secțiunii;
- axa neutră, unde tensiunea este nulă ($\sigma=0$) este poziționată la cotele $\rho=r$ sau $y=0$.

Determinarea tensiunii normale se face pornind de la relațiile de echivalență:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_A \sigma dA = 0; \\ \int_A \sigma y dA = M_i, \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Considerând relația (2.8) și introducând-o în ambele relații de echivalență (2.9) se obțin noile forme:

$$\begin{cases} E \frac{d\phi}{\phi} \int_A \frac{r-\rho}{\rho} dA = 0 ; \\ E \frac{d\phi}{\phi} \int_A \frac{(r-\rho)^2}{\rho} dA = M_i . \end{cases} \quad (2.10)$$

Din prima ecuație din (2.10) se poate calcula poziția axei neutre:

$$\int_A \frac{r-\rho}{\rho} dA = r \int_A \frac{dA}{\rho} - A = 0, \quad (2.11)$$

rezultând:

$$r = \frac{A}{\int_A \frac{dA}{\rho}} . \quad (2.12)$$

Integrala de la numitorul relației (2.12) are diferite valori, în funcție de forma geometrică a secțiunii transversale.

Din cea de-a doua ecuație din (2.10) rezultă:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{M_i}{E \int_A \frac{(r-\rho)^2}{\rho} dA} . \quad (2.13)$$

Integrala de la numitorul relației (2.13) va avea valoarea:

$$\int_A \frac{(r-\rho)^2}{\rho} dA = r^2 \int_A \frac{dA}{\rho} - 2r \int_A dA + \int_A \rho dA = rA - 2rA + RA = Ae . \quad (2.14)$$

Introducând relația (2.14) în relația (2.13) rezultă relația de legătură:

$$\frac{d\phi}{\phi} = \frac{M_i}{EAe}, \quad (2.15)$$

care combinată cu relația (2.8) conduce la determinarea tensiunii normale σ_i rezultate în urma acțiunii momentului de încovoiere M_i :

$$\sigma_i = \frac{M_i}{Ae} \left(\frac{r}{\rho} - 1 \right) \quad (2.16)$$

sau

$$\sigma = \frac{M_b}{Ae} \frac{y}{r - y} . \quad (2.17)$$

Considerând notațiile geometrice, tensiunile din fibrele extreme (interioară σ_1 și exterioară σ_2) pot fi calculate cu relațiile:

$$\text{➤ fibra interioară:} \quad \sigma_1 = \frac{M_i}{Ae} \frac{y_1}{R_1} ; \quad (2.18)$$

$$\text{➤ fibra exterioară:} \quad \sigma_2 = -\frac{M_i}{Ae} \frac{y_2}{R_2} . \quad (2.19)$$

În cazul considerării și a solicitării de tracțiune compresiune, tensiunea normal totală σ se calculează cu relația:

$$\sigma = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_i}{Ae} \frac{y}{r - y} . \quad (2.20)$$

Exemplu de calcul

Pentru bara de curbura mare din figura 2.4 se cunosc: raza de curbura $R=130mm$, secțiunea barei este circulară de diametru $d=80mm$ și faptul că este materialul din care este confecționată are o tensiune admisibilă $\sigma_a = 150 MPa$.

Bara este încărcată în punctul ①, capătul liber, cu două forțe egale cu F și $2F$. În punctul ③ bara este încastrată.

Se cere să se determine forța capabilă F pe care o poate suporta bara fără a se rupe.

Rezolvare:

Pentru determinarea stării de tensiune este necesar să se traseze diagramele de eforturi secționale axiale N , tăietoare T și încovoietoare M_i .

Bara poate fi împărțită în două porțiuni distincte: porțiunea ① - ② și porțiunea ② - ③.

Discuția se va face pe fiecare porțiune în parte. Dacă în cazul barelor drepte discuția era făcută în raport de distanța x , în cazul barelor curbe discuția se face în funcție de poziția unghiulară.

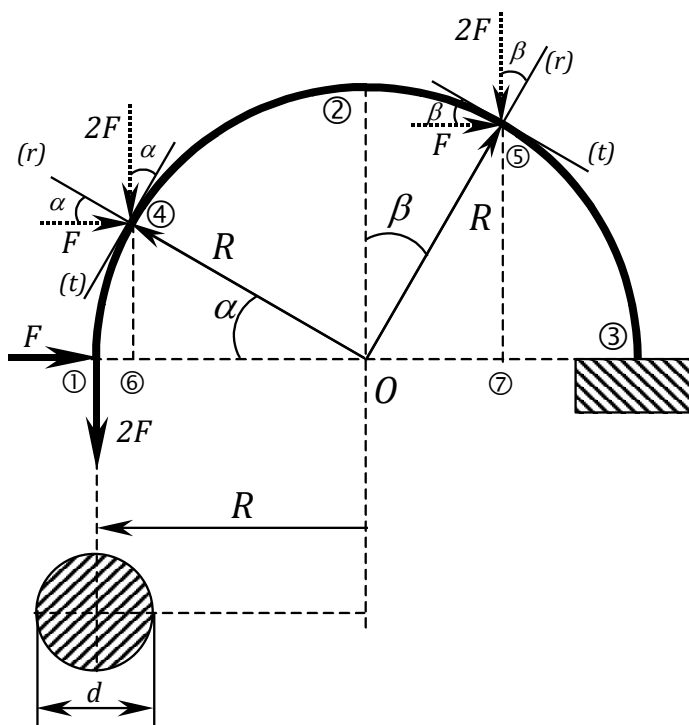


Figura 2.4

Într-un punct oare din cele două porțiuni de bară, eforturile secționale se obțin prin proiecția forțelor, stânga sau din dreapta secțiunii considerate, pe direcția radială (r) și tangențială (t) , la punctul considerat (figura 2.4). Proiecțiile forțelor pe direcție tangențială (t) la bara curbă sunt forțele axiale N iar proiecțiile pe direcția radială (r) la bara curbă sunt forțele tăietoare.

Trebuie specificat faptul că se păstrează reguila semnelor.

Porțiunea ① - ②

Se consideră un punct ④ situat la o deschidere unghiulară oarecare α față de orizontala $O - ①$ ($0 \leq \alpha \leq 90^\circ$). Prin trasarea celor două drepte, una în prelungirea razei R (direcția radială (r)) și cealaltă tangentă la raza R

(direcția tangențială (t)) rezultă, geometric, alte două unghiuri α (figura 2.3).

Pentru determinarea influențelor pe care le au forțele cu F și $2F$ în punctul ④, se „mută” cele două forțe în acest punct (reprezentarea punctată din figură) și se fac proiecțiile cele două direcții (r) și (t). Ca urmare se vor obține:

- forța axială:

$$N_{1-2} = -F \sin \alpha + 2F \cos \alpha ;$$

- forța tăietoare:

$$T_{1-2} = -F \cos \alpha - 2F \sin \alpha ;$$

Observație

- a) Derivând forța axială în funcție de unghiul α obținem:

$$\frac{dN_{1-2}}{d\alpha} = -F \cos \alpha - 2F \sin \alpha = T_{1-2};$$

- b) Derivând forța tăietoare în funcție de unghiul α obținem:

$$\frac{dT_{1-2}}{d\alpha} = F \sin \alpha - 2F \cos \alpha = -N_{1-2}.$$

Cu alte cuvinte forța axială este derivata forței tăietoare și forța tăietoare este derivata, cu semnul (-), a forței axiale. Ca urmare, unde una din aceste forțe este zero, cealaltă va avea o valoare extremă.

Este evident faptul că, dacă una din forțe are semn constant, pozitiv sau negativ, pe intervalul considerat nu trece prin valoarea zero. Dintre cele două forțe N_{1-2} și T_{1-2} numai forța axială N_{1-2} poate fi egală cu zero, ceea ce înseamnă că, forța tăietoare T_{1-2} are o valoare extremă în intervalul considerat.

Se pune condiția $N_{1-2} = 0$, de unde rezultă:

$$-F \sin \alpha + 2F \cos \alpha = 0 \text{ sau } \operatorname{tg} \alpha = 2.$$

Ca urmare, unghiul pentru care forța xială este zero va fi:

$$\alpha = \operatorname{arctg} 2 = 63^{\circ}26'5''.$$

Valorile forțelor axială și tăietoare în capetele intervalului vor fi:

$$N_{1-2} = -F \sin \alpha + 2F \cos \alpha = \begin{cases} \alpha=0^\circ & N_1 = 2F ; \\ \alpha=90^\circ & N_2 = -F . \end{cases}$$

$$T_{1-2} = -F \cos \alpha - 2F \sin \alpha = \begin{cases} \alpha=0^\circ & T_1 = -F ; \\ \alpha=63^\circ 26' 5'' & T_{\max} = -2,236F ; \\ \alpha=90^\circ & T_2 = -2F . \end{cases}$$

Pentru calcul momentului încovoiitor se consideră distanțele de la punctul ① la punctul considerat la unghiul α .

Astfel, pentru forța $2F$ brațul este egal cu distanța dintre punctele ① și ⑥, distanță egală cu $d_1 = R - R \cos \alpha$.

Pentru forța F brațul este egal cu distanța dintre punctele ④ și ⑥, adică $d_2 = R \sin \alpha$

Ca urmare, momentul în punctul ④, dat de forțele din punctul ① este:

$$M_{1-2}(\alpha) = -2Fd_1 - Fd_2 = -2F(R - R \cos \alpha) - FR \sin \alpha .$$

Derivând relația momentului încovoiitor în raport cu unghiul α se obține:

$$\frac{d[M_{1-2}(\alpha)]}{d\alpha} = \frac{d[-2F(R - R \cos \alpha) - FR \sin \alpha]}{d\alpha} = R(-2F \sin \alpha - F \cos \alpha) = RT_{1-2}$$

Rezultă că derivata momentului încovoiitor este egală cu forța tăietoare înmulțită cu o coconstantă (în acest caz raza de curbură R a barei) și ca urmare se păstrează proprietatea de la bare drepte: forța tăietoare este derivata momentului încovoiitor.

Deoarece forța tăietoare nu este egală cu zero în niciun punct, momentul încovoiitor, în intervalul ① - ② nu are nicio valoare extremă.

Momentul de încovoiere va fi:

$$M_{1-2}(\alpha) = -2F(R - R \cos \alpha) - FR \sin \alpha = \begin{cases} \alpha=0^\circ & M_1 = 0 ; \\ \alpha=90^\circ & M_2 = -3FR . \end{cases}$$

Porțiunea ② - ③

Se consideră un punct ⑤ situat la o deschidere unghiulară oarecare β față de orizontala $O - ②$ ($0 \leq \beta \leq 90^\circ$). Prin trasarea celor două drepte, una în prelungirea razei R (drecția radială (r)) și cealaltă tangentă la raza R (drecția tangențială (t)) rezultă, geometric, alte două unghiuri β (figura 2.3).

Pentru determinarea influențelor pe care le au forțele cu F și $2F$ în punctul ⑤, se „mută” cele două forțe în acest punct (reprezentarea punctată din figură) și se fac proiecțiile cele două direcții (r) și (t). Ca urmare se vor obține:

- forța axială

$$N_{2-3} = -F \cos \beta - 2F \sin \beta ;$$

- forța tăietoare

$$T_{2-3} = F \sin \beta - 2F \cos \beta ;$$

Așa cum se poate observa, forța axială N_{2-3} este negativă pe tot intervalul considerat în timp ce, forța tăietoare trece de la o valoare negativă, pentru $\beta=0$. Ca urmare, atât forța axială cât și momentul vor avea valori extreme.

Pentru determinarea unghiului la care acestea au valori extreme se pune condiția: $T_{2-3} = 0$, de unde rezultă:

$$F \sin \beta - 2F \cos \beta = 0 \text{ sau } \operatorname{tg} \beta = 2.$$

Ca urmare, unghiul pentru care forța tăietoare este zero va fi:

$$\beta = \operatorname{arctg} 2 = 63^\circ 26' 5''.$$

Valorile forțelor axială și tăietoare în capetele intervalului vor fi:

$$N_{2-3} = -F \cos \beta - 2F \sin \beta = \begin{cases} \beta=0^\circ & N_2 = -F ; \\ \beta=63^\circ 26' 5'' & N_{\max} = -2,236F ; \\ \beta=90^\circ & N_3 = -2F . \end{cases}$$

$$T_{2-3} = F \sin \beta - 2F \cos \beta = \begin{cases} \beta=0^\circ & T_2 = -2F ; \\ \beta=90^\circ & T_3 = F . \end{cases}$$

Pentru calcul momentului încovoietor se consideră distanțele de la punctul ① la punctul ⑤. Astfel, pentru forța $2F$ brațul este egal cu distanța dintre punctele ① și ⑦, distanță egală cu $d_3 = R + R \sin \beta$.

Pentru forța F brațul este egal cu distanța dintre punctele ⑤ și ⑦, adică $d_4 = R \cos \beta$.

Ca urmare, momentul în punctul ⑤, dat de forțele din punctul ① este:

$$M_{2-3}(\alpha) = -2Fd_3 - Fd_4 = -2F(R + R \sin \beta) - FR \cos \beta.$$

Considerând valorile de capăt ale unghiului β și valoarea de extrem pentru $\beta = 63^\circ 26' 5''$ se obțin următoarele valori:

$$M_{1-2}(\alpha) = -2Fd_3 - Fd_4 = -2F(R + R \sin \beta) - FR \cos \beta = \begin{cases} \beta = 0^\circ; M_2 = -3FR; \\ \beta = 63^\circ 26' 5''; M_{\max} = -4,236FR; \\ \beta = 90^\circ; M_3 = -4FR. \end{cases}$$

Pentru trasarea diagramelor se consideră axa longitudinală a barei curbe și se țin cont de relațiile dependente de funcțiile trigonometrice $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$ și $\cos \beta$.

În figura 2.5 este prezentată diagrama de forțe axiale, în figura 2.6 diagrame de forțe tăietoare iar în figura 2.7 diagrama de momente încovoietoare.

Așa cum rezultă din calculele de mai sus, pe porțiunea ② - ③, pentru un unghi $\beta = 63^\circ 26' 5''$ se obțin valori maxime pentru forța axială $N_{\max} = -2,236F$ și pentru momentul încovoietor $M_{\max} = -4,236FR$.

Pentru determinarea tensiunii maxime normale σ se iau în considerare ambele solicitări simple, de compresiune și de încovoiere:

a) solicitarea de compresiune - determinarea tensiunii normale maxime de compresiune σ_c se face pe baza relației clasice:

$$\sigma_c = -\frac{N_{\max}}{A} = -\frac{2,236F}{\frac{\pi d^2}{4}} = -\frac{8,944F}{\pi \cdot 80^2} = -4,448 \cdot 10^{-4} F;$$

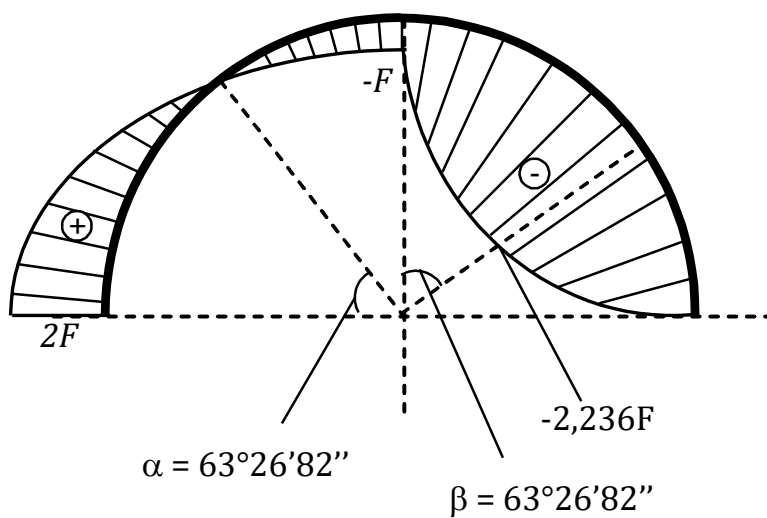


Figura 2.5

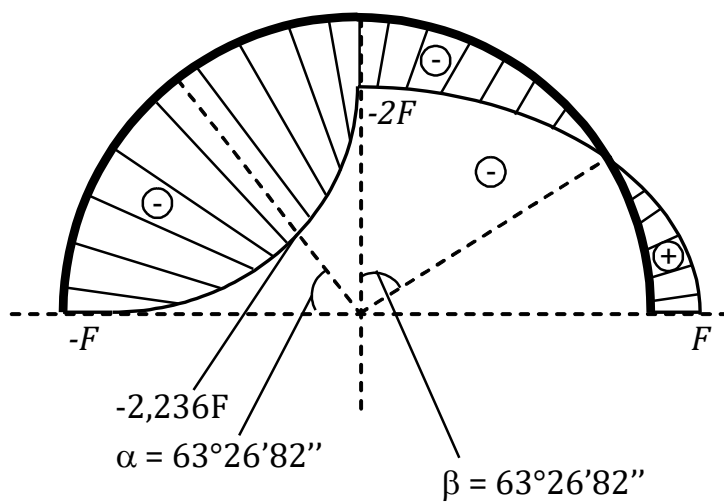


Figura 2.6

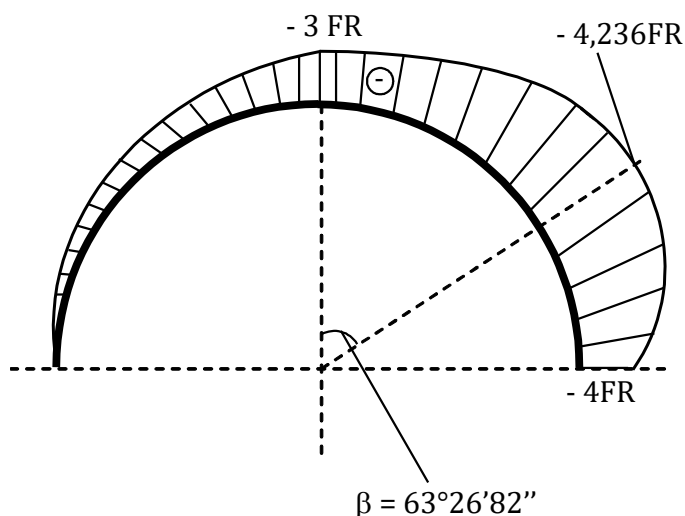


Figura 2.7

b) solicitarea de încovoiere – determinarea tensiunilor rezultate la încovoiere se realizează pe baza relațiilor lui Winkler. Pentru început se determină raza axei neutre conform relației:

$$r = \frac{1}{2} \left(R + \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \right),$$

relație pentru secțiunile circulare, în care R este raza de curbură ($R=130mm$) iar d este diametrul secțiunii transversale a barei ($d=80mm$).

Înlocuind obținem (figura 2.8):

$$r = \frac{1}{2} \left(130 + \sqrt{130^2 - \frac{80^2}{4}} \right) = 126,846(mm).$$

Ca urmare, distanța dintre raza de curbură a barei și raza axei neutre este (figura 2.7):

$$e = 130 - 126,846 = 3,154(mm)$$

Pe baza cotelor geometrice din figura 2.8, rezultă:

$$y_1 = \frac{d}{2} - e = 40 - 3,154 = 36,846 \text{ (mm)}$$

și

$$y_2 = \frac{d}{2} + e = 40 + 3,154 = 43,154 \text{ (mm)},$$

iar razele care sunt situate fibrele sunt:

- pentru interior: $R_1 = R - \frac{d}{2} = 130 - \frac{80}{2} = 90 \text{ (mm)}$
- pentru exterior: $R_2 = R + \frac{d}{2} = 130 + \frac{80}{2} = 170 \text{ (mm)}$

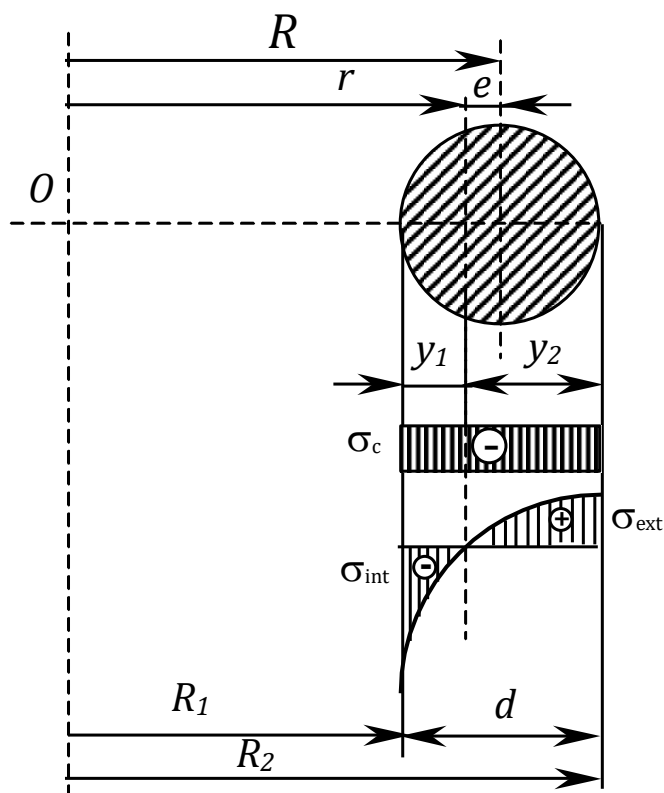


Figura 2.8

Aplicând relația lui Winkler și ținând cont că diagrama de momente este de partea fibrei întinse, obținem:

- pentru fibra din interior, situată la raza R_1 :

$$\sigma_{\text{int}} = -\frac{M_{\text{max}}}{eA} \frac{y_1}{R_1} = -\frac{4,236FR}{eA} \frac{y_1}{R_1} = -\frac{4,236 \cdot 130 \cdot F}{3,154 \cdot \frac{\pi \cdot 80^2}{4}} \cdot \frac{36,846}{90} = -0,01422F ;$$

- Pentru fibra din exterior, situată la raza R_2 :

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{M_{\text{max}}}{eA} \frac{y_2}{R_2} = \frac{4,236FR}{eA} \frac{y_2}{R_2} = \frac{4,236 \cdot 130 \cdot F}{3,154 \cdot \frac{\pi \cdot 80^2}{4}} \cdot \frac{43,154}{170} = 0,00881F .$$

Ca urmare, tensiunea maximă datorată încovoierii este la interior fiind egală cu:

$$\sigma_{\text{int}} = -0,01422F .$$

Ținând cont și de tensiunea determinată de solicitarea de compresiune, se obține o tensiune totală de:

$$\sigma_{\text{total,max}} = \sigma_c + \sigma_{\text{int}} = -4,448 \cdot 10^{-4} F - 0,01422F = -0,0137752F .$$

Punând condiția de rezistență:

$$|\sigma_{\text{total,max}}| \leq \sigma_a ,$$

obținem inegalitatea:

$$0,0137752F \leq 150 ,$$

de unde rezultă forța capabilă:

$$F \leq 10.889,13 \text{ N} .$$

CALCULUL DEFORMAȚIILOR GRINZILOR DREPTE

3

3.1 Introducere

Un aspect important îl constituie calculul deformațiilor acestora, deformații care se pot grupa în două categorii:

- Deformații/deplasări după o direcție din spațiu;
- Rotiri în jurul unei direcții din spațiu.

Pentru calcul deformațiilor au fost dezvoltate numeroase metode, unele pur analitice sau grafo-analitice – bazate pe aspectul geometric al deformării, altele energetice - bazate pe energia internă de deformare generate de lucrul mecanic al încărcărilor exterioare.

Indiferent de metoda adoptată calculul urmărește determinarea formei deformată a structurilor mecanice precum și valoarea deformării într-un punct oarecare.

Metodele analitice și grafo-analitice, spre deosebire de cele energetice, au o serie de limitări, care vor fi evidențiate în cele ce urmează.

3.2. Metode analitice

3.2.1. Ecuația fibrei medii deformată

O metodă fundamentală, analitică, de calcul a deformațiilor unei grinzi drepte este cea de rezolvare a ecuației fibrei medii deformată a grinzilor (barelor) drepte. Pentru aceasta se consideră o grindă, prin fibra ei medie, raportată la un sistem de axe ortogonal xOy (figura 3.1).

Grinda se consideră supusă unei solicitări simple de încovoiere pură-plană prin acțiunea momentelor de încovoiere M_i .

Originea sistemului de coordonate în reazemul din punctul O . Pentru calcul se alege o secțiune în punctul ①, la o distanță oarecare x de origine. În punctul considerat, grinda are o deformare caracterizată de deplasarea verticală, definită și sub denumirea de săgeată, v și de rotirea φ , ambele fiind dependente de poziția punctului considerat ①.

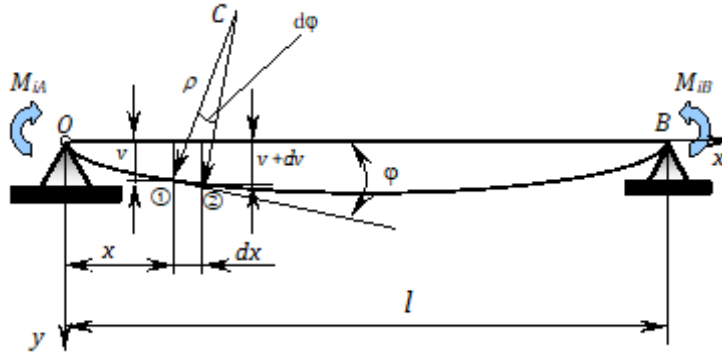


Figura 3.1

Astfel, cele două deformări pot fi exprimate de dependențele:

$$v = v(x) \quad \text{și} \quad \varphi = \varphi(x). \quad (3.1)$$

În sistemul de coordonate prezentat mai sus, săgeata se va fi pozitivă dacă este orientată în jos, iar rotirea se va considera pozitivă dacă determină o rotație în sens orar.

În același timp, în punctul considerat, deformarea grinzii este definită de o rază de curbură ρ . Conform celor cunoscute de la matematică, între deplasarea verticală v și raza de curbură ρ există relația de legătură:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{v''}{\left[1 + (v')^2\right]^{\frac{3}{2}}}, \quad (3.2)$$

unde prin v'' s-a notat derivata ordinară de ordinul doi a săgeții în raport cu distanța x :

$$v'' = \frac{d^2 v(x)}{dx^2}. \quad (3.3)$$

În ipoteza micilor deformații, se poate face aproximarea:

$$1 + (v')^2 \cong 1, \quad (3.4)$$

relația (3.2) devenind:

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2 v(x)}{dx^2}. \quad (3.5)$$

Pornind de la forma deformată a grinzii se consideră un al doilea punct ② situat la o distanță foarte mică (infinitesimală) dx de punctul ①. În punctul ② are loc o creștere a săgeții cu valoarea dv , valoarea totală fiind $v+dv$.

În ipoteza micilor deformații, segmentul de grindă ds între punctele ① și ② poate fi aproximat cu o linie dreaptă de lungime dx .

Ca urmare, în triunghiul cuprins între punctele ① și ② se poate scrie relația trigonometrică:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dv}{dx}. \quad (3.6)$$

și ținând cont și de ipoteza micilor deformații se poate face aproximația:

$$\frac{dv}{dx} \cong \varphi. \quad (3.7)$$

Pe baza relațiilor (3.5) și (3.7) se poate scrie egalitatea:

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = \frac{d\varphi}{dx}. \quad (3.8)$$

Determinarea relațiilor de calcul pentru săgeată și rotire pornește de la egalitatea:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_i}{EI_z}, \quad (3.9)$$

determinată în calculul relației lui Navier, cu observația că momentul de încovoiere este dependent de distanța x , $M_i = M_i(x)$.

Produsul EI_z este definit a fi modul de rigiditate la încovoiere al secțiunii transversale omogene. În cazul grinzilor cu secțiune neomogenă modulul se determină ca sumă de module ale fiecărei componente neomogene

calculată față de axa neutră: $\sum_{i=1}^n E_i I_{zi}$.

Din relația (3.9) rezultă că, în cazul în care atât momentul încovoiator M_i cât și modulul de rigiditate EI_z sunt constante pe toată lungimea grinzii, raza de curbură este constantă și, ca urmare, deformarea grinzii va fi de forma unui arc de cerc.

Avându-se în vedere faptul real că deformarea dată de forțele de tăiere sunt mai mici comparativ cu cele generate de momentul de încovoiere, relația (3.9) este considerată și în cazul încovoierii simple și, ca urmare, relațiile de calcul determinate în continuare sunt valabile și pentru această formă de încovoiere.

Prin combinarea relațiilor (3.5) cu (3.9) rezultă egalitatea:

$$\frac{1}{\rho} \cong \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \cong \frac{M_i}{EI_z}. \quad (3.10)$$

Pentru sistemul de axe considerat în figura 3.1, axa Oy are sensul pozitiv orientat în jos și pentru un moment pozitiv de încovoiere (așa cum este considerat în figură) se poate observa că, odată cu creșterea distanței x de la punctul O , are loc o micșorare a valorii unghiului de rotire φ , de la valoarea maximă ($\varphi_{\max}$ în punctul O) la valoarea 0, în punctul în care săgeata v este maximă (tangenta la forma deformată a grinzii în punctul de deformare maximă devine orizontală și unghiul $\varphi = 0$).

Ca urmare, din punct de vedere matematic, funcția dată de relația (3.7), $\varphi(x) = v'(x)$, scade și $\varphi'(x) = v''(x) < 0$, aspect care este contrar ecuației (3.10).

Pentru a exista corelare între fenomenul fizic și relația de calcul (3.10) se va considera în aceasta semnul negativ:

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} \cong - \frac{M_i}{EI_z}. \quad (3.11)$$

Așa cum se știe, între eforturile secționale există o serie de relații de legătură:

$$\frac{d^2 M_i(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x). \quad (3.12)$$

Ținând cont de acestea și de relațiile (3.11) și (3.7) rezultă următoarele egalități:

$$\frac{d^3 v(x)}{dx^3} \cong -\frac{T(x)}{EI_z}, \quad (3.15)$$

$$\frac{d^4 v(x)}{dx^4} \cong \frac{q(x)}{EI_z}. \quad (3.14)$$

3.2.2. Integrarea analitică a ecuației diferențiale a fibrei medii deformată

Pentru determinarea săgeții și rotirii într-un punct oarecăr, de-a lungul unei grinzi drepte, pe porțiuni de secțiune constantă și care este realizată dintr-un material cu modulul de elasticitate cunoscut și constant, este necesar să se integreze relațiile (3.11), (3.15) și (3.14):

- rotirea:
$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = \int -\frac{M_b}{EI_z} dx, \quad (3.15)$$

- săgeata:
$$y(x) = v = \int \varphi(x) dx. \quad (3.16)$$

Prin integrarea relațiilor (3.15) și (3.16) rezultă două constante de integrare C_1 și C_2 , care se determină din condițiile de legătură și din condițiile de continuitate ale grinzilor.

Condițiile de legătură se referă la valorile pe care le au deformațiile și/sau rotirile în dreptul lor, ținând cont de faptul că legăturile blochează grade de libertate.

Astfel, în cazul reazemelor, articulațiilor și încastrărilor deplasările sunt egale cu zero, iar în cazul încastrării apare, în plus, rotirea egală cu zero (figura 3.2).

Condițiile de continuitate ale fibrei medii deformate se referă la faptul că grinzile ca urmare a deformării lor **nu se rup**. Cu alte cuvinte, fibra este o curbă continuă, în punctele în care are loc o modificare fie a secțiunii fie a încărcării nu are loc ruperea acestora.

Condițiile care se iau în considerare în calcul se referă la egalitatea săgeților și rotirilor, în stânga și în dreapta punctelor în care au loc aceste modificări (figura 3.3).

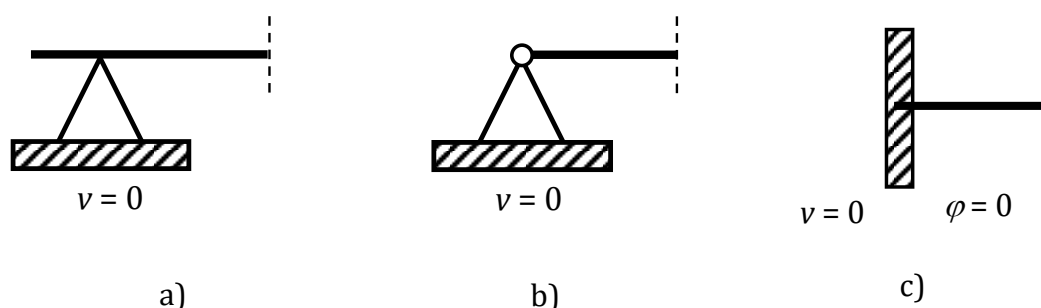


Figura 3.2 a) reazem simplu $v = 0$; b) articulația $v = 0$; c) încastrarea $v = 0$; $\varphi = 0$

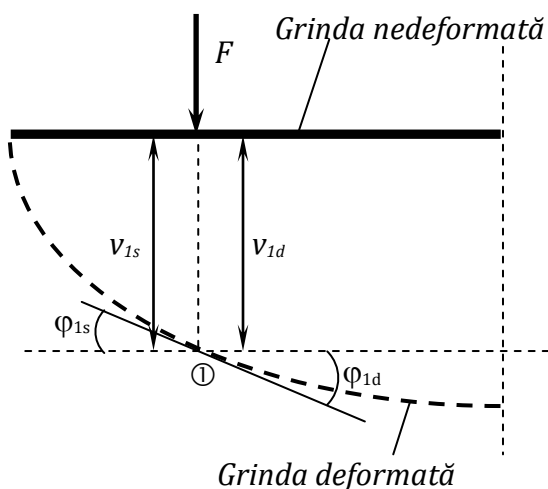


Figura 3.3

Pe baza figurii 3.3, condițiile de continuitate pentru punctual ① sunt:

- pentru săgeată - săgeata din stînga punctului trebuie să fie egală cu cea din dreapta punctului

$$v_{1s} = v_{1d} \quad (3.17)$$

- pentru rotire - rotirea din stînga punctului trebuie să fie egală cu cea din dreapta punctului

$$\varphi_{1s} = \varphi_{1d} \quad (3.18)$$

Pentru rezolvarea problemelor se parcurg următoarele etape:

- a) după determinarea reacțiunilor se scrie relația de calcul a momentului încovoietor pe fiecare porțiune;
- b) se scrie pe fiecare porțiune se calculează, cu relațiile (3.16) săgeata și (3.15) rotirea obținându-se, pentru fiecare interval câte două constante de integrare;
- c) se determină, pe baza condițiilor (3.17) și (3.18), constantele de integrare.

De notat faptul că, în cazul în care există un număr „ q ” de intervale vor exista un număr „ $2q$ ” de constante de integrare. Pentru determinarea constantelor va rezulta un system de ecuații algebrice format din „ $2q$ ” ecuații.

Această metodă analitică aproximativă, a fibrei medii deformate, poate fi aplicată în cazul calculului deplasărilor și rotirilor elastice grinzilor drepte, pe porțiuni cu caracteristici mecanice și geometrice constante.

Având în vedere existența pe fiecare zonă a două constante de integrare este de preferat ca să fie aplicată pentru grinzi cu încărcare simpă și cu puține zone.

Aplicația 3.1.

Grindă dreaptă încastrată la un capăt și liberă la celălalt, încărcată cu o forță concentrată F . Se consideră grinda cu modul de rigiditate constant și de lungime L (Figure 3.4).

Rezolvare:

Momentul de încovoiere la o distanță oarecare x , de încastrarea din punctual ①, este dat de relația:

$$M_{ix} = -F(L-x).$$

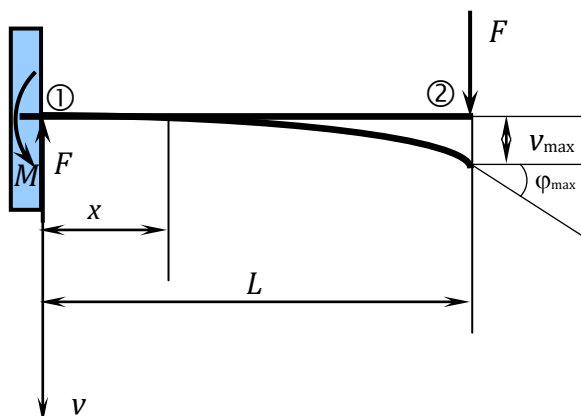


Figura 3.4

Conform relațiilor (3.15) și (3.16) avem:

$$\varphi(x) = \int -\frac{M_i}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int F(L-x) dx = \frac{F}{EI_z} \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1$$

$$v(x) = \int \left[F \left(Lx - \frac{x^2}{2} \right) + C_1 \right] dx = \frac{F}{EI_z} \left(L \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + C_1 x + C_2.$$

Așa cum rezultă din relațiile de integrare se obțin două constante C_1 și C_2 care se calculează ținând cont de condițiile din încastrare. Astfel, în punctual ① avem:

$$\begin{cases} \varphi_{x=0} = 0; \\ v_{x=0} = 0. \end{cases}$$

iar din calcule rezultă:

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Introducând constantele C_1 și C_2 în relațiile de calcul ale săgeții și rotirii, valorile maxime ale deformațiilor vor fi calculate pentru $x=L$:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_{x=L} = \frac{FL^2}{2EI_z}; \\ v_1 = v_{x=L} = \frac{FL^3}{3EI_z}. \end{cases}$$

Observație:

- pentru un punct situat între ① și ② săgeata și rotirea se obțin introducând valoarea distanței x , considerată din punctual ①.

Aplicația 3.2.

Grindă dreaptă încastrată la un capăt și liberă la celălalt, încărcată cu o forță distribuită de intensitate q . Se consideră grinda cu modul de rigiditate constant și de lungime L (figura 3.5).

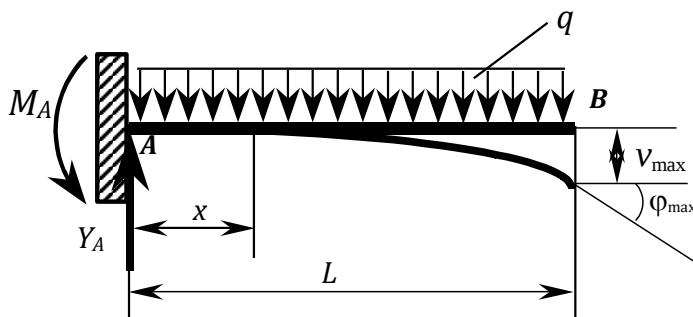


Figura 3.5

Rezolvare:

Momentul încovoietor M_i , la o distanță x față de punctual A, este:

$$M_{ix} = -M_A + Y_A x - \frac{qx^2}{2} = -\frac{qL^2}{2} + qLx - \frac{qx^2}{2} = -\frac{q}{2}(L^2 - 2Lx + x^2).$$

Conform relațiilor (3.15) și (3.16) avem:

$$\varphi(x) = \int -\frac{M_{ix}}{EI_z} dx = \frac{q}{2EI_z} \int (L^2 - 2Lx + x^2) dx = \frac{q}{2EI_z} \left(L^2x - 2\frac{Lx^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) + C_1.$$

$$v(x) = \int \left[\frac{q}{2EI_z} \left(L^2x - Lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C_1 \right] dx = \frac{q}{2EI_z} \left(L^2\frac{x^2}{2} - L\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{12} \right) + C_1x + C_2.$$

Originea sistemului de referință, în cazul acesta, este considerată în punctul A , iar condițiile de legătură sunt:

$$\begin{cases} \varphi_{x=0} = 0; \\ v_{x=0} = 0. \end{cases}$$

Pe baza relațiilor de mai sus, avem:

$$\begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

Introducând constantele C_1 și C_2 în relațiile de calcul ale săgeții și rotirii rezultă:

$$\begin{cases} \varphi_B = \varphi_{x=L} = \frac{qL^3}{6EI_z}; \\ v_B = v_{x=L} = \frac{qL^4}{8EI_z}. \end{cases}$$

Aplicația 3.3

Grindă dreaptă articulată la un capăt (în punctul A) și rezemată la celălalt capăt (în punctul B), încărcată cu o forță distribuită de intensitate q . Se consideră grinda cu modul de rigiditate constant și de lungime L (figura 3.6).

Rezolvare:

Momentul de încovoiere M_{ix} , la o distanță oarecare x față de punctul A (originea sistemului de referință) este:

$$M_{ix} = Y_A x - \frac{qx^2}{2} = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

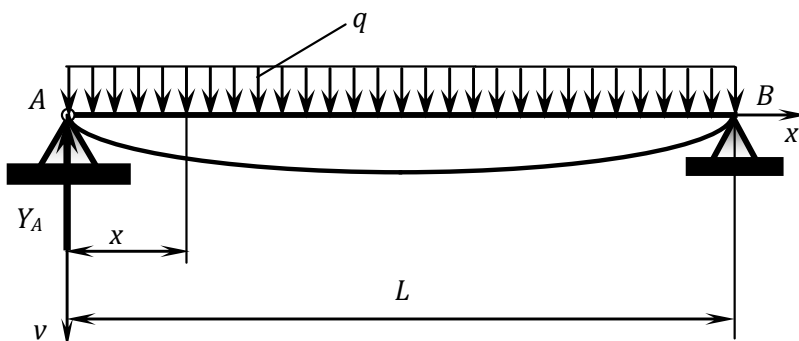


Figura 3.6

Conform relațiilor (3.15) și (3.16) avem:

$$\varphi = \int -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) dx = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} \right) + C_1.$$

$$v = \int \left[\frac{1}{EI_z} \left(-\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} \right) + C_1 \right] dx = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} \right) + C_1 x + C_2.$$

Deplasările pe verticală în legăturile A și B sunt egale cu zero:

$$\begin{cases} v_A = v_{x=0} = 0; \\ v_B = v_{x=L} = 0. \end{cases}$$

Pe baza condițiilor de legătură rezultă:

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ \left(-\frac{qL^4}{12} + \frac{qL^4}{24} \right) + C_1 L = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{qL^3}{24EI_z}. \end{cases}$$

Introducând constantele C_1 și C_2 în relațiile de calcul ale rotirii și deplasării se obțin relațiile:

$$\begin{cases} \varphi_x = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{qLx^2}{4} + \frac{qx^3}{6} \right) + \frac{qL^3}{24EI_z}; \\ v_x = \frac{1}{EI_z} \left(-\frac{qLx^3}{12} + \frac{qx^4}{24} \right) + \frac{qL^3}{24EI_z} x. \end{cases}$$

Valoarea maximă a deformației are loc la jumătatea deschiderii grinzii, pentru $x = \frac{L}{2}$. Înlocuind această valoare în relația de calcul a săgeții rezultă:

$$v_{\max} = \frac{5qL^4}{384EI_z},$$

unde rotirea este egală cu zero.

Rotirea este maximă în legături A și B , pentru $x=0$ sau $x=L$. Valorile acestora sunt aceleași, dar de semn contrare $\varphi_A = -\varphi_B$. Introducând una din aceste valori în relația de calcul a rotirii se obține:

$$\varphi_A = -\varphi_B = \frac{qL^3}{24EI_z}.$$

Aplicația 3.4

Grindă dreaptă articulată la un capăt (în punctual ①) și rezemată la celălalt capăt (în punctual ③), încărcată cu o forță concentrată de intensitate F , la mijlocul deschiderii ei. Se consideră grinda cu modul de rigiditate constant și de lungime L (figura 3.7).

Rezolvare:

Așa cum se poate observa, grinda este divizată în două regiuni: ① - ② și ② - ③. Ca urmare, analiza se va face pe fiecare prîtiune în parte. Momentul de încovoiere între punctele ① și ②, la o distanță oarecare x este:

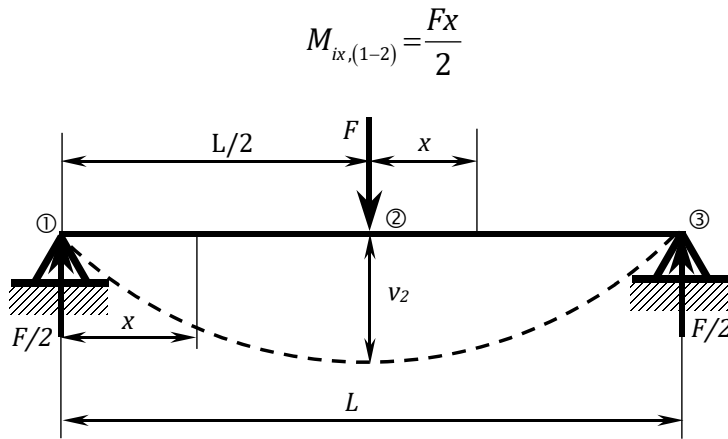


Figura 3.7

Conform relațiilor (3.15) și (3.16) avem:

$$\varphi_{1-2} = \int -\frac{1}{EI_z} \frac{Fx}{2} dx = -\frac{1}{EI_z} \frac{Fx^2}{4} + C_1$$

$$v_{1-2} = \int \left(-\frac{1}{EI_z} \frac{Fx^2}{4} + C_1 \right) dx = -\frac{1}{EI_z} \frac{Fx^3}{12} + C_1 x + C_2.$$

Pe intervalul ② - ③, momentul de încovoiere este:

$$M_{bx,(2-3)} = \frac{F}{2} \left(\frac{L}{2} + x \right) - Fx = \frac{FL}{4} - \frac{Fx}{2} = \frac{F}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right).$$

Pe baza relațiilor (3.15) și (3.16) rezultă:

$$\varphi_{2-3} = \int -\frac{1}{EI_z} \frac{F}{2} \left(\frac{L}{2} - x \right) dx = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{FLx}{4} - \frac{Fx^2}{4} \right) + C_3,$$

$$v_{2-3} = \int \left[-\frac{1}{EI_z} \left(\frac{FLx}{4} - \frac{Fx^2}{4} \right) + C_3 \right] dx = -\frac{1}{EI_z} \left(\frac{FLx^2}{8} - \frac{Fx^3}{12} \right) + C_3 x + C_4.$$

Așa cum se poate observa, rezultă un număr de patru constante de integrare C_1 , C_2 , C_3 și C_4 . Valorile acestor constante se obțin punând condițiile de legătură și continuitate

Condițiile de legătură se referă la legăturile grinzii din punctele ① și ③. În aceste puncte grinda este rezemată și ca urmare deplasările sunt nule. Din relațiile de calcul ale deplasărilor $v(x)$, pentru fiecare porțiune în parte, rezultă:

$$v_1 = v_{(1-2),x=0} = C_2 = 0.$$

$$v_3 = v_{(2-3),x=\frac{L}{2}} = -\frac{F}{2EI} \left(\frac{L}{2} \frac{L^2}{4} - \frac{L^3}{8 \cdot 6} \right) + C_3 \frac{L}{2} + C_4 = -\frac{FL^3}{48EI} + C_3 \frac{L}{2} + C_4 = 0.$$

Condițiile de continuitate se referă la faptul că în punctul ② grinda nu se rupe. Ca urmare atât rotirea cât și deplasarea punctului ② au aceeași valoare în stânga (stg.) și dreapta (dr.) acestui punct:

$$v_{2,stg} = v_{2,dr} \quad \Rightarrow \quad v_{(1-2),x=\frac{L}{2}} = v_{(2-3),x=0} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{EI_z} \frac{F}{12} \frac{L^3}{8} + C_1 \frac{L}{2} = C_4$$

$$\varphi_{2,stg} = \varphi_{2,dr} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{(1-2),x=\frac{L}{2}} = \varphi_{(2-3),x=0} \quad \Rightarrow \quad -\frac{1}{EI_z} \frac{F}{4} \frac{L^2}{4} + C_1 = C_3$$

Ca urmare, rezultă un sistem cu patru ecuații și patru necunoscute, constantele de integrare C_1 , C_2 , C_3 și C_4 :

$$\begin{cases} C_2 = 0; \\ -\frac{FL^3}{48EI} + C_3 \frac{L}{2} + C_4 = 0; \\ -\frac{1}{EI_z} \frac{FL^3}{96} + C_1 \frac{L}{2} = C_4; \\ -\frac{1}{EI_z} \frac{FL^2}{16} + C_1 = C_3. \end{cases}$$

Sistemul are soluțiile:

$$C_1 = \frac{FL^2}{16EI}, \quad C_2 = C_3 = 0, \quad \text{și} \quad C_4 = \frac{FL^3}{48EI}.$$

Pentru determinarea săgeții în punctul ② se consideră fie relația de calcul a săgeții pentru intervalul ① - ② pentru o valoare $x=L/2$, fie relația de calcul a săgeții pentru intervalul ② - ③ pentru o valoare $x=0$.

Rotirile sunt maxime în punctele ① și ③. Pentru determinarea rotirii în punctul ① se consideră fie relația de calcul a rotirii în intervalul ① - ② pentru o valoare $x=0$, fie relația de calcul a rotirii în intervalul ② - ③ pentru o valoare $x=L/2$. Rotirea în punctul ② este nulă, indiferent de intervalul considerat.

Aplicația 3.5

Grindă dreaptă articulată la un capăt (în punctual ①) și rezemată la celălalt capăt (în punctual ③), încărcată cu o forță concentrată de intensitate F , la o distanță a față de punctul ①. Se consideră grinda cu modul de rigiditate constant și de lungime L (figura 3.8).

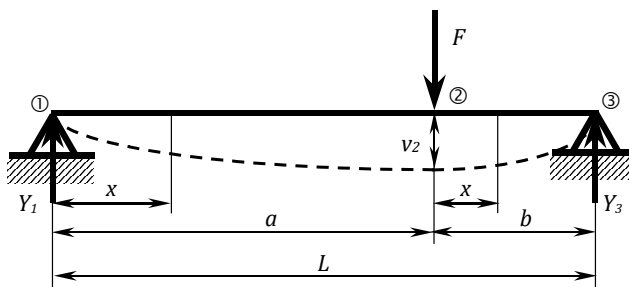


Figura 3.7

Rezolvare:

Așa cum se poate observa, grinda este divizată în două regiuni: ① - ② și ② - ③. Ca urmare, analiza se va face pe fiecare porțiune în parte.

Reacțiunile sunt:

$$Y_1 = \frac{Fb}{L} \quad \text{și} \quad Y_3 = \frac{Fa}{L}$$

Momentul de încovoiere între punctele ① și ②, la o distanță oarecare x este:

$$M_{ix,(1-2)} = Y_1 x = \frac{Fbx}{L}.$$

Conform relațiilor (3.15) și (3.16) avem:

$$\varphi_{1-2} = \int -\frac{1}{EI_z} \frac{Fbx}{L} dx = -\frac{1}{EI_z} \frac{Fbx^2}{2L} + C_1$$

$$v_{1-2} = \int \left(-\frac{1}{EI_z} \frac{Fbx^2}{2L} + C_1 \right) dx = -\frac{1}{EI_z} \frac{Fbx^3}{6L} + C_1 x + C_2.$$

Momentul de încovoiere între punctele ② și ③, la o distanță oarecare x este:

$$M_{ix,(2-3)} = Y_1 (a+x) - Fx = \frac{Fb}{L}(a+x) - Fx.$$

Conform relațiilor (3.15) și (3.16) rezultă:

$$\varphi_{2-3} = \int -\frac{1}{EI_z} \left[\frac{Fb}{L}(a+x) - Fx \right] dx = -\frac{1}{EI_z} \left[\frac{Fb}{L} \left(ax + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{Fx^2}{2} \right] + C_3$$

$$v_{2-3} = \int \left\{ -\frac{1}{EI_z} \left[\frac{Fb}{L} \left(ax + \frac{x^2}{2} \right) - \frac{Fx^2}{2} \right] + C_3 \right\} dx = -\frac{1}{EI_z} \left[\frac{Fb}{L} \left(\frac{ax^2}{2} + \frac{x^3}{6} \right) - \frac{Fx^3}{6} \right] + C_3 x + C_4$$

3.3. Metode grafo-analitice de calcul a deformațiilor la solicitarea simplă de încovoiere

Metodele grafo-analitice, așa cum sugerează și denumirea, combină calculul analitic cu aspectul grafic al diagramelor de încovoiere.

3.3.1. Metoda grinzilor fictive

Fundamentarea metodei și etapele de lucru sunt prezentate în cele ce urmează. Metoda se numește grafo-analitică deoarece îmbină reprezentarea grafică a diagramei de momente încovoietoare datorate încărcării reale cu o componentă analitică reprezentată de ecuația diferențială a fibrei medii deformată.

Această metodă are la bază asemănarea care există între relațiile diferențiale ale eforturilor secționale și relațiile diferențiale ale deplasărilor (3.12):

$$\frac{d^2 M_i}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -p(x)$$

și (3.11) din care se obține:

$$-M_i \cong EI_z \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \cong EI_z \frac{d\varphi}{dx}. \quad (3.19)$$

Pentru determinarea deformațiilor grinda reală se transformă într-o „grindă fictivă” construită din cea reală pe baza regulilor prezentate în tabelul 3.1

În orice regiune poate fi scrisă relația de calcul:

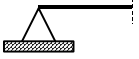
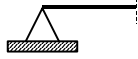
$$-M_i = \frac{d(EI_z \varphi)}{dx} = \frac{d^2(EI_z v)}{dx^2}. \quad (3.20)$$

Ca urmare a încărcărilor exterioare grinda este solicitat la încovoiere. Diagrama de momente încovoietoare se transformă într-o forță distribuită, denumită *forță fictivă*:

$$p^* = M_i \quad (3.21)$$

Sensul de acționare al forței fictive este următorul: pentru diagrama situată sub grinda fictivă sensul forței este îndreptat în jos iar pentru cele situate deasupra sensul de acțiune este în sus.

Tabelul 3.1

Nr.crt.	Grinda reală		Grinda fictivă	
1.	Reazem de margine		Reazem de margine	
2.	Reazem intermediar		Articulație intermediară	
3.	Articulația intermediară		Reazem intermediar	
4.	Încastrare		Capăt liber	
5.	Capăt liber		Încastrare	

Ca urmare a acțiunii forței fictive p^* în grinda fictivă apar, identic cu cazul grinzilor reale, reacțiuni fictive, forțe tăietoare fictive T^* și momente încovoietoare fictive M_i^* . Ținând cont de relațiile de legătură între eforturile secționale din cazul grinzilor reale, pot fi scrise și în cazul grinzilor fictive relațiile:

$$-p^* = \frac{dT^*}{dx} = \frac{d^2 M_i^*}{dx^2} \quad (3.22)$$

Ținând cont de relațiile (3.20) și (3.21) rezultă ecuația diferențială:

$$\frac{d^2(EI_z v)}{dx^2} = \frac{d^2 M_i^*}{dx^2} = \frac{dT^*}{dx} \quad (3.23)$$

Din relația (3.23), prin integrare succesivă rezultă:

$$\frac{d(EI_z v)}{dx} = \frac{dM_i^*}{dx} + C_1 = T^* + C_1 \quad (3.24)$$

$$EI_z v = M_i^* + C_1 x + C_2, \quad (3.25)$$

unde C_1 și C_2 sunt constante de integrare.

Din relațiile (3.24) și (3.25) rezultă relațiile de calcul ale rotirilor și săgeților:

$$\varphi = \frac{T^*}{EI_z} + \frac{C_1}{EI_z}, \quad (3.26)$$

$$v = \frac{M_i^*}{EI_z} + \frac{C_1 x + C_2}{EI_z}. \quad (3.27)$$

Relația diferențială aproximativă a fibrei medii deformate (3.20) și relațiile (3.26) și (3.27) reprezintă niște familii de curbe iar C_1 și C_2 sunt constante care se determină pe baza condițiilor de legătură și de continuitate pentru fibra medie deformată.

Astfel, se alege din familia de curbe o anumită curbă, care corespunde unor valori particulare pentru constantele de integrare C_1 și C_2 . Acest procedeu a fost folosit și la integrarea analitică a ecuației diferențiale aproximative la care, prin determinarea constantelor de integrare s-a determinat chiar curba care să corespundă cu fibra medie deformată.

Metoda grinzii fictive se bazează pe faptul că există o curbă, în familia de curbe amintite mai sus, care să exprime deformata, cu respectarea condiției $C_1 = C_2$.

Pentru ca relațiile (3.26) și (3.27) să respecte fenomenul fizic, grinda fictivă este astfel aleasă încât să fie satisfăcute toate condițiile de legătură și continuitate ale fibrei medii deformate. Acest lucru este posibil dacă constantele de integrare sunt egale cu zero și ca urmare relațiile (3.26) și (3.27) devin:

$$\varphi = \frac{T^*}{EI_z}, \quad (3.28)$$

$$v = \frac{M_i^*}{EI_z}. \quad (3.29)$$

Observație !

În cazul unor încărcări reale complexe, diagramele trebuie descompuse în diagrame mai simple (figuri geometrice simple) pentru care aria și poziția centrului de greutate sunt cunoscute fiind suprapuse efectele acestora.

Spre exemplu, în cazul forțelor distribuite apar suprafețe delimitate de parabole (figura 3.8), calculul ariilor și a pozițiilor centrelor de greutate fiind calculate cu relațiile:

$$A_1 = \frac{2}{3}bh; \quad A_2 = \frac{1}{3}bh$$

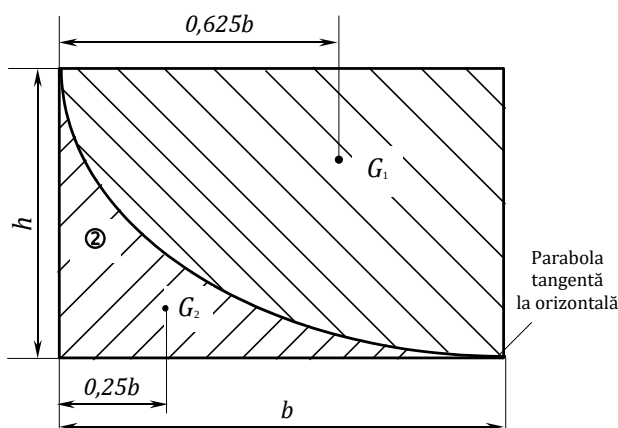


Figura 3.8

Aplicația 3.6

Etapele de calcul se prezintă considerând o grindă așezată pe două reazeme A și B și care are o consolă B - ② pe care este o forță distribuită, constantă de intensitate q (figura 3.9).

Rezolvare:

- **etapa 1** - se consideră grinda reală, pentru care se trasează, cu metodologia cunoscută, diagrama de momente încovoietoare (figura 3.9);
- **etapa 2** - pe baza tabelului 3.1 se trasează grinda fictivă (figura 3.9);

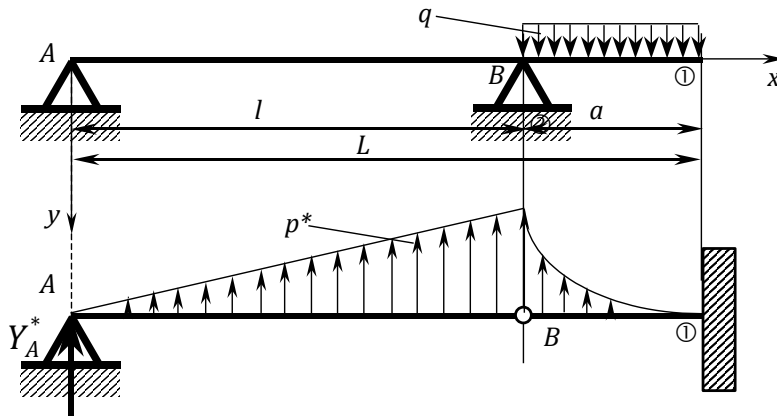


Figura 3.9

- **etapa 3** - se încarcă grinda fictivă (conjugată) cu încărcarea fictivă dată de relația (3.28):

$$p^* = M_i$$

astfel încât dacă momentul de încovoiere este pozitiv, $M_i > 0$, forța fictivă p^* să fie îndreptată în sensul pozitiv al axei y , iar dacă momentul de încovoiere este negativ, $M_i < 0$, forța fictivă p^* să fie îndreptată în sensul negativ al axei y .

- **etapa 4** - se determină reacțiunile din elementele de legătură ale grinzii conjugate;

Se determină reacțiunea fictivă din A calculând momentul fictiv în punctul B :

$$M_{iB}^* = Y_A^* l + \frac{1}{2} l \frac{pa^2}{2} \cdot \frac{l}{3} = 0, \text{ de unde rezultă } Y_A^* = -\frac{pa^2 l}{12}$$

- **etapa 5** - se determină variația eforturilor conjugate T^* și M_i^* de pe grinda conjugată și cu ajutorul relațiilor (3.28) și (3.29) se determină rotirea și săgeata în punctele dorite.

a. rotirea din punctul A va fi:

$$\varphi_A = \frac{T_A^*}{EI_z} = \frac{Y_A^*}{EI_z} - \frac{pa^2 l}{12EI_z}$$

- b. pentru determinarea săgeții în punctul ① trebuie calculat momentul fictiv din punctul respectiv:

$$M_{i1}^* = -\frac{pa^2l}{12}(l+a) + \frac{l}{2}\left(\frac{l}{3}+a\right) + \frac{a}{3}\frac{pa^2}{2}\frac{3a}{4} = \frac{pa^2}{24}(4l+3a)$$

ca urmare, săgeata este: $v_1 = \frac{M_{i1}^*}{EI_z} = \frac{pa^2}{24EI_z}(4l+3a)$

Aplicația 3.7

Se consideră grinda încastrată la un capăt și liberă la celălalt încărcată cu forța distribuită constantă de intensitate q (Figura 3.10). Se cere să se calculeze rotirea și săgeata din punctul ①.

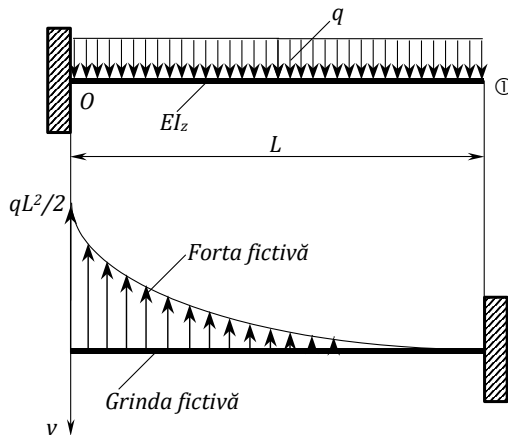


Figura 3.10

Răspuns:

Pentru determinarea rotirii și a săgeții trebuie să se calculeze forța tăietoare fictivă și momentul de încovoiere fictive din punctul ①.

Forța tăietoare fictivă din punctul ① va fi egală cu aria diagramei de moment de încovoiere al încărcării reale (figura 3.10):

$$T_1^* = \frac{L}{3} \frac{qL^2}{2} = \frac{qL^3}{6},$$

iar momentul fictive este:

$$M_{i1}^* = \frac{1}{3} L \frac{qL^2}{2} \frac{3L}{4} = \frac{qL^4}{8},$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \frac{T_1^*}{EI} = \frac{qL^3}{6EI}; \\ v_1 = \frac{M_{b1}^*}{EI} = \frac{qL^4}{8EI}. \end{cases}$$

Metoda grinzii fictive a fost dedusă pentru o grindă de secțiune constantă putând fi extinsă și la calculul deplasărilor grinzilor cu secțiune variabilă în trepte.

Aplicația 3.8

Se consideră grinda din figura 3.11, rezemată în punctele A și B și încărcată cu o forță F la distanța a față de reazemul din punctul A .

Răspuns:

Grinda fictivă rămâne identică cu cea reală. Se trasează diagrama de momente și se transformă în forță distribuită.

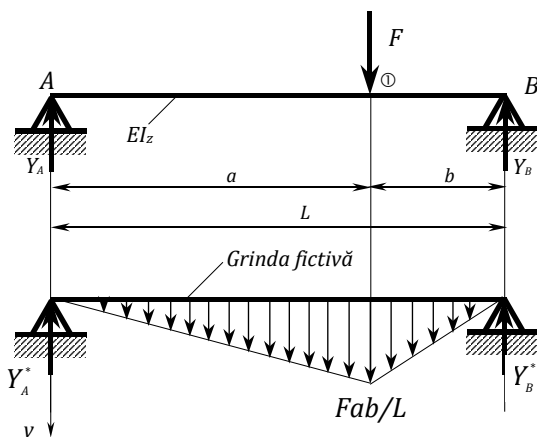


Figura 3.11

Reacțiunile fictive sunt:

- din suma de momente față de punctul B egală cu zero:

$$Y_A^* = \frac{1}{L} \frac{1}{2} L \frac{Fab}{L} \frac{b+L}{3} = \frac{Fab(L+b)}{6L},$$

- din suma de momente față de punctul A egală cu zero:

$$Y_B^* = \frac{1}{L} \frac{1}{2} L \frac{Fab}{L} \frac{a+L}{3} = \frac{Fab(L+a)}{6L}.$$

Rotirile în cele două reazeme A și B vor fi calculate cu ajutorul forțelor tăietoare fictive din cele două reazeme, practice cu reacțiunile fictive din A și B :

$$\varphi_A = \frac{T_A^*}{EI_z} = \frac{Y_A^*}{EI_z} = \frac{Fab(L+b)}{6LEI_z};$$

$$\varphi_B = \frac{T_B^*}{EI_z} = \frac{Y_B^*}{EI_z} = \frac{Fab(L+a)}{6LEI_z}.$$

Pentru determinarea săgeții în punctul ① se consideră momentul fictiv din acest punct, rezultând

$$M_{i1}^* = \frac{Fab(L+b)}{6L} a - \frac{1}{2} a \frac{Fab}{L} \frac{a}{3} = \frac{Fa^2 b^2}{3L},$$

de unde rezultă:

$$v_1 = \frac{M_{i1}^*}{EI_z} = \frac{Fa^2 b^2}{3LEI_z}.$$

3.3.2. Ecuația celor două rotiri și ecuația celor două săgeți

Se consideră grinda din figura 3.12 încărcată cu o serie de forțe și momente exterioare. Se izolează o porțiune ① - ② care are lungimea l_{12} și cu modul de rigiditate constant $EI_z = \text{const.}$

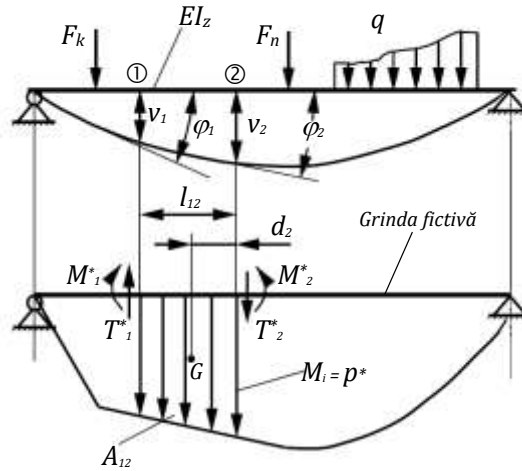


Figura 3.12

Se consideră grinda fictivă corespunzătoare lungimii l_{12} considerate, cu diagrame de momente încovoietoare corespunzătoare acelei porțiuni. Suprafața cuprinsă între cele două puncte analizate are varia A_{12} și momentul static, calculat față de punctul ② egal cu:

$$S_{12} = A_{12}d_2. \quad (3.30)$$

Pe porțiunea ① - ② se scriu ecuațiile de echilibru:

$$T_1^* - A_{12} - T_2^* = 0,$$

din care rezultă:

$$T_1^* - A_{12} = T_2^* \quad (3.31)$$

și

$$M_1^* + T_1^*l_{12} - S_{12} = M_2^*$$

din care rezultă:

$$M_1^* + T_1^* l_{12} - A_{12} d_2 - M_2^* = 0 \quad (3.32)$$

Împărțind relațiile (3.31) și (3.32) cu modul de rigiditate constant EI_z se obțin:

$$\frac{T_1^*}{EI_z} - \frac{A_{12}}{EI_z} = \frac{T_2^*}{EI_z} \quad (3.33)$$

$$\frac{M_1^*}{EI_z} + \frac{T_1^* l_{12}}{EI_z} - \frac{S_{12}}{EI_z} = \frac{M_2^*}{EI_z} \quad (3.34)$$

sau ținând cont de cele stabilite în cazul metodei grinzilor fictive:

$$\varphi_1 - \frac{A_{12}}{EI_z} = \varphi_2, \quad (3.35)$$

$$v_1 + \varphi_1 l_{12} - \frac{S_{12}}{EI_z} = v_2. \quad (3.36)$$

Relațiile (3.35) și (3.36) reprezintă ecuația celor două rotiri, respective ecuația celor două săgeți. Pe baza acestora pot fi determinate deplasările unei secțiuni cunoscând deplasările dintr-o altă secțiune a grinzii.

Aplicația 3.9

Se consideră grinda din figura 3.13 sollicitată de o forță concentrată qa la jumătatea deschiderii și o forță distribuită, de intensitate q disitribută pe toată deschiderea sa.

Rezolvare:

Aplicând ecuația celor două rotiri pe intervalul A - ①, rezultă:

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{A_{12}}{EI_z}$$

sau:

$$0 = \varphi_1 - \frac{A_{12}}{EI_z}$$

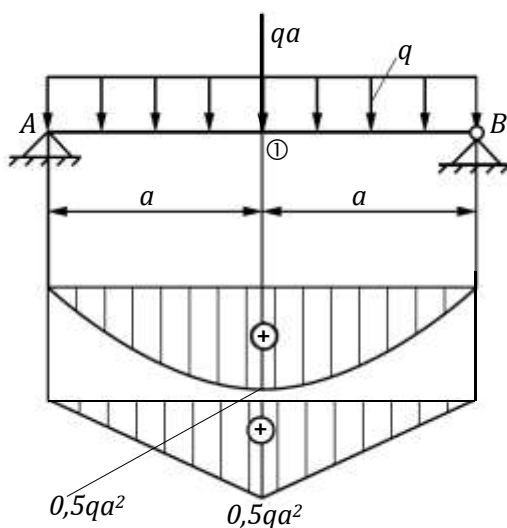


Figura 3.13

și înlocuind avem:

$$\varphi_1 = \varphi_A = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \frac{pa^3}{2} + \frac{2}{3} \frac{pa^3}{2} \right) = \frac{7pa^3}{12EI_z}.$$

Aplicând ecuația celor două rotiri pe intervalul ① - B, rezultă:

$$v_1 + \varphi_1 l_{12} - \frac{S_{21}}{EI_z} = v_2 \quad \text{sau} \quad 0 = v_1 + 0 - \frac{S_{B1}}{EI_z}$$

și înlocuind obținem:

$$v_1 = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{1}{2} \frac{pa^3}{2} \frac{2}{3} a + \frac{2}{3} \frac{pa^3}{2} \frac{5}{8} a \right) = \frac{3pa^4}{8EI_z}.$$

3.3.3. Ecuația celor trei săgeți (Ecuația lui Clapeyron)

Se consideră grinda din figura 3.14, cu secțiune variabilă în trepte, încărcată în reazemul din punctul B cu un moment încovoietor și forțe tăietoare concentrate F_i și distribuite q , rezultând o stare simplă plană de încovoiere.

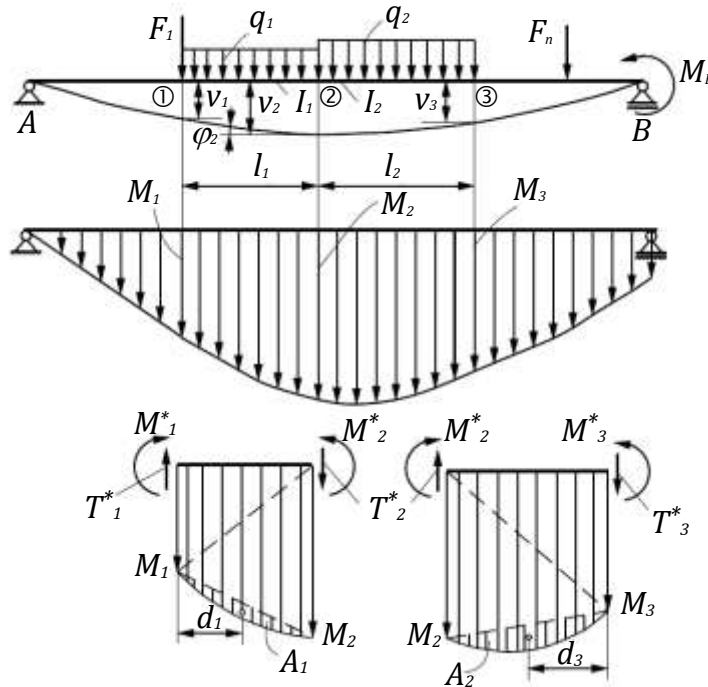


Figura 3.14

După trasarea diagramei de momente de încovoiere, aceasta se transformă în forță fictivă distribuită p^* . Pe grindă se consideră două zone delimitate de punctele ①, ② și ③, care au lungimile l_1 și l_2 și momentele de inerție axiale constante pe intervale I_1 și I_2 .

Diagramele de încovoiere și implicit forțele fictive distribuite se descompun în două triunghiuri corespunzătoare momentelor încovoietoare M_1 , M_2 și M_3 și respectiv două suprafețe de arii A_1 și A_2 , corespunzătoare sarcinilor aplicate pe aceste două regiuni.

Pentru cele două porțiuni ① - ② și ② - ③ se scriu ecuațiile de echilibru:

$$\sum M_{i1}^* = 0; \quad M_1^* + S_{12} + T_2^* l_1 - M_2^* = 0; \quad (3.37)$$

$$\sum M_{i3}^* = 0; \quad M_2^* + T_2^* l_2 - S_{23} - M_3^* = 0, \quad (3.38)$$

unde S_{12} reprezintă momentul static al suprafeței sarcinii fictive aplicată în porțiunea ① - ② în raport cu secțiunea ①, iar S_{23} reprezintă momentul static

al suprafeței sarcinii fictive aplicată în porțiunea ② - ③ în raport cu secțiunea ③.

Împărțind ecuația de echilibru (3.37) cu cantitatea El_1l_1 și ecuația de echilibru (3.38) cu cantitatea El_2l_2 rezultă:

$$\frac{T_1^*}{El_1} = \frac{M_2^* - M_1^*}{El_1l_1} - \frac{S_{12}}{El_1l_1}, \quad (3.39)$$

$$\frac{T_2^*}{El_2} = \frac{M_3^* - M_2^*}{El_2l_2} - \frac{S_{23}}{El_2l_2} \quad (3.40)$$

și ținând cont de relațiile stabilite la metoda grinzilor fictive, rezultă:

$$\varphi_2 = \frac{v_2 - v_1}{l_1} - \frac{S_{12}}{El_1l_1}, \quad (3.41)$$

$$\varphi_2 = \frac{v_3 - v_2}{l_2} + \frac{S_{23}}{El_2l_2}. \quad (3.42)$$

Din egalarea relațiilor (3.41) și (3.42) se obține:

$$\frac{v_2 - v_1}{l_1} - \frac{S_{12}}{El_1l_1} = \frac{v_3 - v_2}{l_2} + \frac{S_{23}}{El_2l_2}$$

sau

$$\frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2} = \frac{S_{12}}{El_1l_1} + \frac{S_{23}}{El_2l_2}. \quad (3.43)$$

Considerând notațiile din figura 3.14 momentele statice din relația (3.43) sunt egale cu:

$$\begin{cases} S_{12} = A_1d_1 + \frac{M_1l_1}{2} \frac{l_1}{3} + \frac{M_{2l_1}}{2} \frac{2l_1}{3}; \\ S_{32} = A_2d_3 + \frac{M_2l_2}{2} \frac{2l_2}{3} + \frac{M_{3l_2}}{2} \frac{l_2}{3}. \end{cases} \quad (3.44)$$

Introducând relațiile (3.44) în relația (3.43) rezultă *ecuația celor trei săgeți* (ecuația lui Clapeyron):

$$6E \left(\frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2} \right) = \frac{M_1 l_1}{I_1} + 2M_2 \left(\frac{l_1}{I_1} + \frac{l_2}{I_2} \right) + \frac{M_3 l_2}{I_2} + 6 \left(\frac{A_1 d_1}{l_1 I_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2 I_2} \right) \quad (3.45)$$

În cazul în care bara este constantă pe toată lungimea sa ($EI_1 = EI_2 = EI$), ecuația (3.45) devine:

$$6E \left(\frac{v_2 - v_1}{l_1} + \frac{v_2 - v_3}{l_2} \right) = M_1 l_1 + 2M_2 (l_1 + l_2) + M_3 l_2 + 6 \left(\frac{A_1 d_1}{l_1} + \frac{A_2 d_3}{l_2} \right) \quad (3.46)$$

Aplicația 3.10

Se consideră grinda din figura 3.15 cu o secțiune variabilă și simplu rezemată la capete. Grinda este solicitată cu o forță F mijlocul deschiderii ei. Se cere să se calculeze săgeata în punctul C .

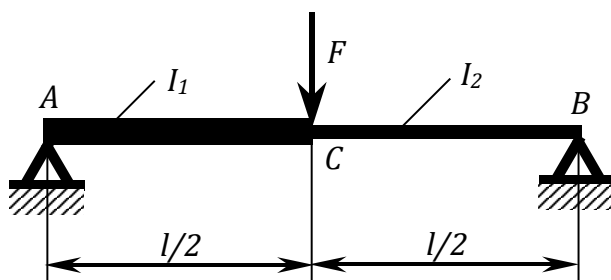


Figura 3. 15

Rezolvare:

Ecuația celor trei săgeți (3.46) scrisă pentru prezenta problemă are forma:

$$6E \left(\frac{v_C - v_A}{0,5l} + \frac{v_C - v_B}{0,5l} \right) = M_A 0,5l + 2M_C \left(\frac{l}{2I_1} + \frac{l}{2I_2} \right) + M_B 0,5l$$

unde:

$$\begin{cases} v_1 = 0; & v_3 = 0; \\ M_A = 0; & M_C = Fl/4; & M_B = 0 \end{cases}$$

Înlocuind valorile de mai sus în ecuația celor trei săgeți, se obține:

$$6E \left(\frac{v_c}{0,5l} + \frac{v_c}{0,5l} \right) = 2 \frac{Fl}{4} \left(\frac{l}{2I_1} + \frac{l}{2I_2} \right)$$

de unde rezultă:

$$v_2 = \frac{Fl^3}{96E} \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}.$$

Pentru $I_1 = I_2 = I$ se obține:

$$v_2 = \frac{Fl^3}{48EI}$$

3.3.4. Principiul suprapunerii de efecte

Principiul suprapunerii de efecte se bazează pe faptul că tensiunea resultantă într-un sistem supus la acțiunea mai multor încărcări externe este egală cu suma tensiunilor care apar dacă s-ar aplica separat multor încărcările externe. Principiul poate fi utilizat pentru calculul deformațiilor grinzilor aflate sub acțiunea unor încărcări complexe.

Deformarea totală, săgeată și/sau rotire, este egală cu suma acestora ca și cnd acestea s-ar aplica individual iar valorile de deformații se adună sau se scad.

Aplicația 3.11

Se consideră grinda din figura 3.16 încăcată în punctual B cu o forță concentrată F și o forță distribuită de intensitate $q=F/L$. Se cere să se determine rotirea și săgeata în punctul B .

Răspuns:

Încărcarea totală se împarte în două încărcări simple (două stări de încărcare) (Figura 3.16,a și b).

- pentru cazul 1 de încărcare (figura 3.16,a), săgeata este $v_{1,a} = \frac{qL^4}{8EI_z}$, iar

rotirea este $\varphi_{1,a} = \frac{qL^3}{6EI_z}$;

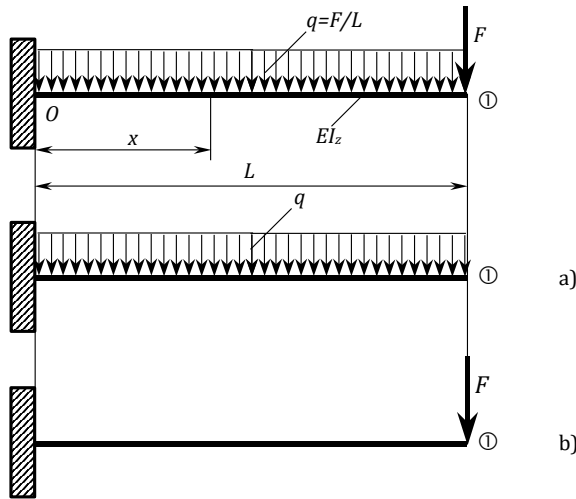


Figura 3.16

- pentru cazul 2 de încărcare (figura 3.16,b), săgeata este $v_{1,b} = \frac{FL^3}{3EI_z}$, iar rotirea

$$\text{este } \varphi_{1,b} = \frac{FL^2}{2EI_z}.$$

$$\text{Combinând valorile, rezultă: } v_1 = v_{1,a} + v_{1,b} = \frac{qL^4}{8EI_z} + \frac{FL^3}{3EI_z}$$

$$\varphi_1 = \varphi_{1,a} + \varphi_{1,b} = \frac{qL^3}{6EI_z} + \frac{FL^2}{2EI_z}$$

$$\text{pentru cazul particular } q = \frac{F}{L} \text{ rezultă: } \begin{cases} v_1 = \frac{11FL^3}{24EI_z}; \\ \varphi_1 = \frac{2FL^2}{3EI_z}. \end{cases}$$

3.3.5. Deformația grinzilor solicitate la încovoiere oblică sau strâmbă

În cazul încovoierii oblice sau strâmbă momentul încovoiator este un vector orientat de-a lungul axei centrale dar nu și după axele principale de inerție (figura 3.17).

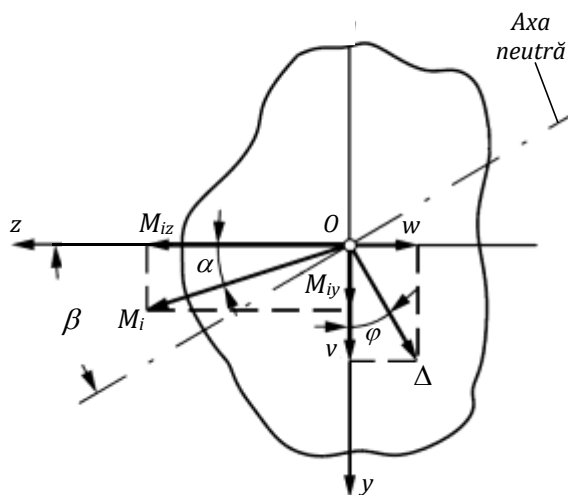


Figura 3.17

Momentul încovoiator M_i se poate descompune după axele principale de inerție: M_{iz} și M_{iy} .

Considerând că momentul de încovoier M_i face un unghi α cu axa Oz (figura 3.17), proiecțiile momentului de încovoier au expresiile:

$$\begin{cases} M_{iy} = M_i \cos \alpha; \\ M_{iz} = M_i \sin \alpha. \end{cases} \quad (3.47)$$

Plecând de la considerentul că fibra medie deformată în cazul încovoierei oblice este plană și planul fibrei medii deformate este perpendicular pe planul neutru, pe baza ecuației fibrei medii deformate avem:

$$\begin{cases} \frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{1}{E} \frac{-I_y M_{iz} + I_{zy} M_{iy}}{I_z I_y - I_{zy}^2}; \\ \frac{d^2 w}{dx^2} = \frac{1}{E} \frac{-I_z M_{iy} + I_{zy} M_{iz}}{I_z I_y - I_{zy}^2}. \end{cases} \quad (3.48)$$

METODE ENERGETICE DE CALCUL A DEFORMAȚIILOR GRINZILOR DREPTE

4

4.1. Energia potențială de deformare. Teorema lui Clapeyron

Se consideră un corp solid deformabil oarecare asupra căruia se aplică un sistem de forțe și cupluri. Forțele și cuplurile dau un lucru mecanic denumit *lucru mecanic exterior* L .

Calculul se realizează pe baza următoarelor ipoteze:

- materialul este considerat elastic, omogen și izotrop;
- încărcarea este până la limita de elasticitate, având o comportare perfect elastică fiind valabilă legea lui Hooke;
- aplicarea forțelor și momentelor exterioare se face static;
- sunt neglijate pierderile de lucru mecanic datorate variațiilor de temperatură, frecărilor interne din material și a frecărilor din elementelor de legătură (reazeme, articulații, încastrări).

În cazul în care, forțele și cuplurile se aplică static, iar materialul din care este realizat corpul este liniar-elastic, atunci lucrul mecanic exterior este dat de relația:

$$L = \sum \frac{F_i v_i}{2} + \sum \frac{C_i \varphi_i}{2}, \quad (4.1)$$

unde F_i și C_i reprezintă forțele și cuplurile exterioare care acționează asupra corpului iar v_i și φ_i reprezintă proiecția săgeții și a rotirii pe direcția forței, respectiv a cuplului.

Ca urmare a acțiunii forțelor și cuplurilor în interiorul corpului apar tensiuni normale σ și tangențiale τ deformarea sa ducând la înmagazinarea unei energii potențiale denumită **energie de deformare** sau **lucru mecanic interior** U .

Teorema lui Clapeyron – pentru un corp solid aflat în repaus, lucrul mecanic al forțelor exterioare este egal cu energia de deformare acumulată.

Energia de deformare înmagazinată în corp poate fi calculată, în funcție de tensiunile normale σ și tangențiale τ , cu relația:

$$U = \int_V \frac{\sigma \varepsilon}{2} dV + \int_V \frac{\tau \gamma}{2} dV. \quad (4.2)$$

Ținând cont de legea lui Hooke, scrisă pentru cele două tensiuni:

$$\begin{cases} \sigma = E \varepsilon ; \\ \tau = G \gamma , \end{cases} \quad (4.3)$$

și înlocuind aceste relații în (4.2) rezultă:

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV + \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV. \quad (4.4)$$

Considerând o bară dreaptă, de lungime l pentru diferitele sollicitări simple rezultă următoarele relații de calcul:

a) Sollicitarea de tracțiune/compresiune

Tensiunea normală este $\sigma = \frac{N}{A}$ și înlocuind-o în relația (4.4) rezultă:

$$U = \int_V \frac{\sigma^2}{2E} dV = \int_l \int_A \frac{N^2}{2EA^2} dA dx = \int_l \frac{N^2}{2EA} dx. \quad (4.5)$$

b) Sollicitarea de forfecare pură

Tensiunea tangențială este $\tau = \frac{T}{A}$ și înlocuind-o în relația (4.4) rezultă:

$$U = \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_A \int_l \frac{T^2}{2GA^2} dA dx = \int_l \frac{T^2}{2GA} dx. \quad (4.6)$$

Pentru un calcul mai exact se poate folosi relația lui Juravski rezultând:

$$U = \int_l \int_A \frac{1}{2G} \left(\frac{TS_z}{bI_z} \right)^2 dA dx = \int_l \alpha \frac{T^2}{2GA} dx, \quad (4.7)$$

unde coeficientul α depinde de forma tensiunii transversale. Astfel, pentru secțiunea dreptunghiulară $\alpha=1,2$, iar pentru secțiunea circulară $\alpha=1,185$.

c) Solicitarea de torsiune

Tensiunea tangențială este $\tau = \frac{M_t r}{I_p}$ și înlocuind-o în relația (4.4) rezultă:

$$U = \int_l \int_A \frac{1}{2G} \left(\frac{M_t r}{I_p} \right)^2 dA dx = \int_l \frac{M_t^2}{2GI_p^2} dx \int_A r^2 dA = \int_l \frac{M_t^2}{2GI_p} dx; \quad (4.8)$$

d) Solicitarea de încovoiere

Tensiunea normală este calculată cu relația lui Navier fiind $\sigma = \frac{M_i}{I_z} y$ și înlocuind-o în relația (4.4) rezultă:

$$U = \int_l \int_A \frac{1}{2E} \left(\frac{M_i y}{I_z} \right)^2 dA dx = \int_l \frac{M_i^2}{2EI_z^2} dx \int_A y^2 dA = \int_l \frac{M_i^2}{2EI_z} dx. \quad (4.9)$$

Pe baza relațiilor (4.5) ÷ (4.9) energia de deformare totală, pentru o solicitare compusă, este dată de relația:

$$U = \sum \int \frac{N^2}{2EA} dx + \sum \int \alpha \frac{T^2}{2GA} dx + \sum \int \frac{M_t^2}{2GI_p} dx + \sum \int \frac{M_i^2}{2EI_z} dx \quad (4.10)$$

Conform relației (4.10) rezultă că, pentru fiecare solicitare simplă, energia de deformare poate fi calculată după formula:

$$U = \frac{(\text{efort sectional})^2 \cdot \text{lungime}}{2 \cdot \text{modulul de rigiditate}} \quad (4.11)$$

Modulele de rigiditate pentru cele patru solicitări simple sunt:

Solicitare	întindere/compresiune	forfecare	torsiune	încovoiere
Modul de rigiditate	EA	GA	GI_p	EI_z

Comparând valorile energie de deformăție pentru fiecare formă de solicitare simplă se poate specifica faptul că, în cazul solicitărilor de încovoiere și de torsiune acestea sunt mai mari comparativ cu solicitările simple de tracțiune/compresiune și forfecare. Ca urmare, în aplicații se pot considera numai solicitările de încovoiere și torsiune. De remarcat este faptul că, în cazul aplicațiilor programelor specializate de calcul sunt considerate toate cele patru solicitări.

Exemplul 4.1

Se consideră o bară dreaptă de lungime l și secțiune pătrată de latură „ a ” asupra căreia acționează o forță axială egală cu F și o forță tăietoare de aceeași valoare F (figura 4.1). Se cere să se calculeze energiile de deformăție pentru fiecare caz în parte și să se determine raportul dintre acestea. Se va considera că lungimea barei este $l=10a$ iar coeficientul $\alpha=1,2$.

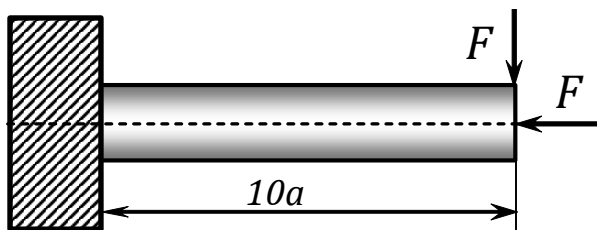


Figura 4.1

Rezolvare:

Eforturile secționale într-o secțiune oarecare sunt $N=F$, $T=F$ și $M_i=-Fx$. Expresiile energiilor de deformăție sunt:

- a) Energia de deformăție rezultată din solicitarea de tracțiune este:

$$U_1 = \frac{N^2 l}{2EA} = \frac{F^2 10a}{2Ea^2} = \frac{5F^2}{Ea} ;$$

b) Energia de deformare rezultată din solicitarea de forfecare este:

$$U_2 = \alpha \frac{T^2 l}{2GA} = \frac{1,2F^2 10a}{2Ga^2} = \frac{6F^2}{Ga} ;$$

c) Energia de deformare rezultată din solicitarea de încovoiere este:

$$U_3 = \int_0^l \frac{M_i^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI_z} \int_0^l (-Fx)^2 dx = \frac{F^2}{2EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{F^2 l^3}{2EI_z} = \frac{F^2 1000a^3}{6E \frac{a^4}{12}} = \frac{2000F^2}{Ea}.$$

Considerând relația de legătură dintre modulele de elasticitate: $E=2,6G$ rezultă următoarele rapoarte:

$$\frac{U_3}{U_1} = \frac{2000F^2}{Ea} \cdot \frac{Ea}{5F^2} = 400; \quad \frac{U_3}{U_2} = \frac{2000F^2}{Ea} \cdot \frac{2,6Ea}{6F^2} = 866,6.$$

Așa cum rezultă și din rapoartele de mai sus, influența solicitării de încovoiere (și, în particular, și a solicitării de torsiune) este mult mai mare comparativ cu solicitările de tracțiune/compresiune și forfecare.

4.2. Teoremele reciprocității

Se consideră o grindă elastică AB încărcată cu două forțe F_1 și F_2 în punctele ① și ② (Figura 4.2,a). Deformațiile în dreptul punctelor, urmare a aplicării forțelor, sunt Δ_1 și Δ_2 .

- Se consideră grinda încărcată cu sarcinile exterioare F_1 și F_2 , energia de deformare fiind dată de relația (4.13), scrisă sub forma: $L = U = U(F_1, F_2)$;
- Se consideră cazul în care se aplică numai forța F_1 rezultând deformații Δ_{11} și Δ_{21} , în punctele ① și ② (figura 4.2,b). Deformațiile apărute în cele două punct pot fi scrise sub forma:

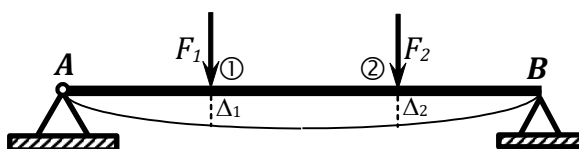
$$\Delta_{11} = \delta_{11}F_1 \text{ și } \Delta_{21} = \delta_{21}F_1 \quad (4.12)$$

unde δ_{11} și δ_{21} poartă numele de coeficienți de influență;

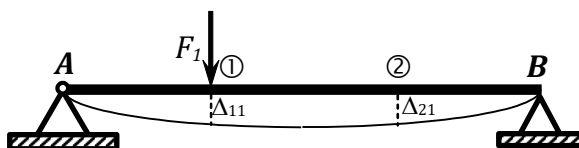
- Se consideră, apoi, cazul în care se aplică numai forța F_2 rezultând deformații Δ_{12} și Δ_{22} , în punctele ① și ② (figura 4.2,c). Deformațiile apărute în cele două punct pot fi scrise sub forma:

$$\Delta_{12} = \delta_{12}F_2 \text{ și } \Delta_{22} = \delta_{22}F_2 \quad (4.13)$$

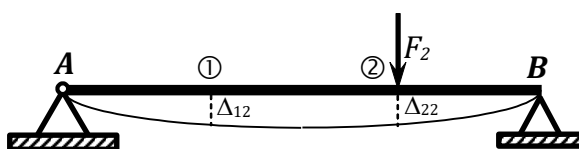
unde δ_{12} și δ_{22} sunt coeficienți de influență;



a)



b)



c)

Figura 4.2

Aplicând principiul suprapunerii de efecte, pe baza relațiilor (4.12) și (4.13) se obține:

$$\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12} = \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 \quad (4.14)$$

și

$$\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22} = \delta_{21}F_1 + \delta_{22}F_2 \quad (4.15)$$

Observație

Coeficienții de influență reprezintă deformațiile din punctele ① și ② atunci când în punctele respective sunt aplicate, pe rând, forțe unitare. Aceștia sunt caracteristici ale grinzii $A-B$.

Pentru calcularea lucrului mecanic realizat de forțele F_1 și F_2 (figura 4.3) și implicit a energiei de deformare se procedează astfel:

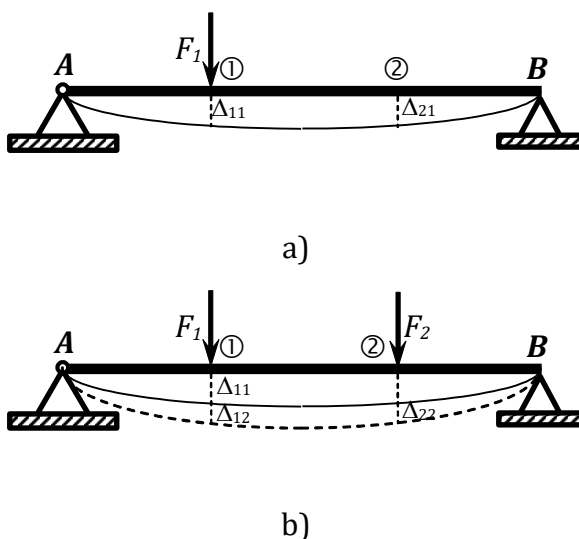


Figura 4.3

- se presupune că se aplică, static, pentru început forța F_1 , în punctul ① (figura 4.3,a). Pe baza relației de deformare Δ_{11} din (4.12) rezultă:

$$L_1 = \frac{1}{2}F_1\Delta_{11} = \frac{1}{2}F_1(\delta_{11}F_1) = \frac{1}{2}\delta_{11}F_1^2 \quad (4.16)$$

- în continuare se aplică, static, forța F_2 , în punctul ②, forța F_1 rămânând aplicată la valoarea ei maximă (figura 4.3,b). Pe baza relației de deformare Δ_{22} din (4.13) rezultă:

$$L_2 = \frac{1}{2} F_{21} \Delta_{22} = \frac{1}{2} F_2 (\delta_{22} F_2) = \frac{1}{2} \delta_{22} F_2^2 \quad (4.17)$$

- urmare a aplicării forței F_2 , punctul ① se deplasează cu cantitatea Δ_{12} . Ca urmare, forța F_1 efectuează un lucru mecanic care, pe baza relației deplasării Δ_{12} din (4.13), este figura 4.4,a):

$$L_{12} = F_1 \Delta_{12} = F_1 (\delta_{12} F_2) = \delta_{12} F_1 F_2 \quad (4.18)$$

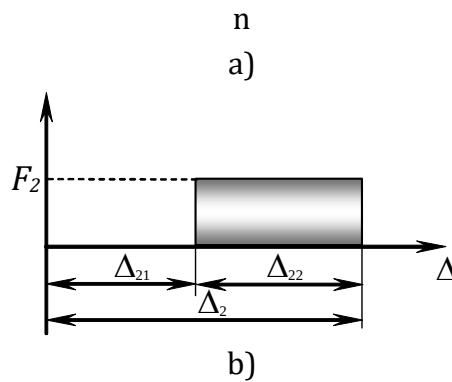


Figura 4.4

Adunând relațiile (4.16), (4.17) și (4.18) și ținând cont că energia de deformare este egală cu lucrul mecanic al sarcinilor exterioare, se obține:

$$U_1 = L_{1,total} = \frac{1}{2} F_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} F_{21} \Delta_{22} + F_1 \Delta_{12} = \frac{1}{2} \delta_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} \delta_{22} F_2^2 + \delta_{12} F_1 F_2 \quad (4.19)$$

În mod similar se poate proceda și cu aplicarea, prima dată, a forței F_2 în punctul ② și apoi a forței F_1 în punctul ① rezultând o relație de calcul similară cu (4.19):

$$U_2 = L_{2,total} = \frac{1}{2} \delta_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} \delta_{22} F_2^2 + \delta_{21} F_1 F_2 \quad (4.20)$$

Ținând cont de faptul că lucrul mecanic dat de (4.19) și (4.20), și implicit și energiile interne de deformare, sunt aceleași, se boține egalitatea:

$$\frac{1}{2}\delta_{11}F_1^2 + \frac{1}{2}\delta_{22}F_2^2 + \delta_{12}F_1F_2 = \frac{1}{2}\delta_{11}F_1^2 + \frac{1}{2}\delta_{22}F_2^2 + \delta_{21}F_1F_2, \quad (4.21)$$

din care rezultă:

$$\delta_{12} = \delta_{21}. \quad (4.22)$$

Relația (4.22) definește teorema reciprocității deplasărilor, teorema lui Maxwell: *deplasările într-o secțiune oarecare „i” produsă de o forță unitară aplicată într-o secțiune „j” este egală cu deplasarea din secțiunea „j” produsă de o forță egală cu unitatea aplicată în secțiunea „i”.*

Teorema lui Betti are următorul enunț: *lucrul mecanic produs de sistemul de forte primar aplicat, care parcurge cu întreaga intensitate deplasările secundare, este egal cu lucrul mecanic produs de sistemul de forte secundar, care parcurge cu întreaga intensitate deplasările primare.*

4.3. Teorema lui Castigliano

Ținând cont de teorema lui Clapeyron rezultă faptul că energia de deformare este o funcție dependentă de variabilele F_i (forțele și/sau cuplurile care compun încărcarea exterioară):

$$L = U = U(F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n). \quad (4.23)$$

Pentru simplificarea calculelor se consideră grinda din figura 4.2,a pentru care relația de calcul a energiei interne de deformare este (4.19):

$$U = \frac{1}{2}\delta_{11}F_1^2 + \frac{1}{2}\delta_{22}F_2^2 + \delta_{12}F_1F_2.$$

Derivând relații în raport cu forța F_1 rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial F_1} = \frac{\partial}{\partial F_1} \left(\frac{1}{2}\delta_{11}F_1^2 + \frac{1}{2}\delta_{22}F_2^2 + \delta_{12}F_1F_2 \right) = \delta_{11}F_1 + \delta_{12}F_2 = \Delta_1 \quad (4.24)$$

Considerând aceeași relație (4.19) în raport cu forța F_2 se obține:

$$\frac{\partial U}{\partial F_2} = \frac{\partial}{\partial F_2} \left(\frac{1}{2} \delta_{11} F_1^2 + \frac{1}{2} \delta_{22} F_2^2 + \delta_{12} F_1 F_2 \right) = \delta_{12} F_1 + \delta_{22} F_2 = \Delta_2 \quad (4.25)$$

Pornind de la relațiile (4.24) și (4.25), în cazul unei structuri elastice încărcate cu un sistem de sarcini exterioare, forțe și/sau momente, notate generic cu $(F_1, F_2, F_3, \dots, F_i, \dots, F_n)$, deformarea într-un punct „j”, unde este aplicată sarcina F_j , măsurată de-a lungul direcției de acționare a sarcinii F_k , poate fi calculată cu relația:

$$\Delta_j = \sum_k \delta_{jk} F_k, \quad (4.26)$$

iar energia de deformare a structurii este calculată cu relația:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k \delta_{ik} F_i F_k. \quad (4.27)$$

Derivând relația (4.27) în raport cu forța F_j rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = \frac{1}{2} \sum_k \delta_{jk} F_k + \frac{1}{2} \sum_i \delta_{ij} F_i. \quad (4.28)$$

Ținând cont de egalitatea (4.22) scrisă pentru indicii „i” și „j”:

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}, \quad (4.29)$$

rezultă:

$$\frac{\partial U}{\partial F_j} = \frac{1}{2} \sum_k \delta_{jk} F_k + \frac{1}{2} \sum_i \delta_{ji} F_i = \sum_k \delta_{jk} F_k. \quad (4.30)$$

La modul general, deformarea într-un punct oarecare „j” se calculează cu relația:

$$\Delta_j = \frac{\partial L_e}{\partial F_j} = \frac{\partial U}{\partial F_j}. \quad (4.31)$$

Relația (4.31) reprezintă prima teoremă a lui Castigliano care statuează că: *Derivata parțială a energiei de deformare în raport cu o sarcină oarecare F_j este egală cu deplasarea corpului solid Δ_j , produsă în dreptul și pe direcția sarcinii F_j , atunci când corpul se încarcă, în mod static, cu un sistem oarecare de forțe și cupluri (momente).*

Pe baza relației (4.31) pot fi făcute următoarele remarci:

- în cazul în care, se cere să se calculeze deplasarea sau rotirea într-un punct oarecare unde nu există aplicate încărcări (forțe sau momente) pentru calculul deformațiilor se aplică, **fictiv, o forță P_0 sau un cuplu C_0 după care se calculează derivatele parțiale în raport cu forța fictivă sau cuplul fictiv** în concordanță cu relația (4.31) $\Delta_j = \frac{\partial L_e}{\partial P_0}$ sau $\Delta_j = \frac{\partial L_e}{\partial C_0}$, după care forța fictivă sau cuplul fictiv sunt anulate;
- deplasarea relativă dintre două puncte poate fi calculată introducând în ambele puncte două forțe fictive P_0 , egale și opuse ca direcție de acțiune.

Considerând faptul că lucrul mecanic este egal cu energia potențială de internă de deformare, și ținând cont de teorema lui Castigliano definită prin relația (4.31), deformația într-un punct oarecare poate fi calculată cu relația:

$$\Delta_j = \frac{\partial L_e}{\partial F_j} = \sum \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_j} dx + \sum \int \alpha \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial F_j} dx + \sum \int \frac{M_b}{EI_z} \frac{\partial M_b}{\partial F_j} dx + \sum \int \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial F_j} dx \quad (4.32)$$

Observație

În cazul aplicării forței fictive P_0 sau a cuplului fictiv C_0 , după ce se calculează derivata, în relația obținută se fac egale cu zero atât forța P_0 cât și cuplul C_0 adică:

$$\Delta_j = \left(\frac{\partial L_e}{\partial P_0} \right)_{P_0=0} \quad \text{sau} \quad \Delta_j = \left(\frac{\partial L_e}{\partial C_0} \right)_{C_0=0}. \quad (4.33)$$

Exemplul 4.2

Se consideră grinda cotică din figura 4.5 de modul de elasticitate constant $EI_z = ct$. În punctul ① acționează o forță concentrată F . Se cere să se determine:

- deplasarea verticală a punctului ①, v_1 ;
- deplasarea orizontală a punctului ②, u_1 ;
- rotirea punctului ①, ϕ_1 ;
- deplasarea verticală a punctului ③, v_3 ;
- rotirea punctului ③, ϕ_3 .

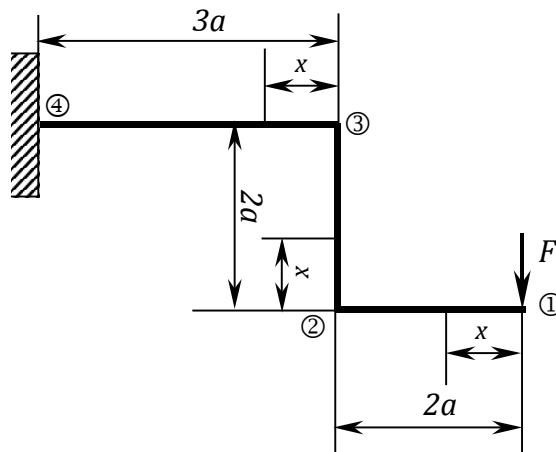


Figura 4.5

Rezolvare:

- deplasarea verticală a punctului ①, v_1 ;

Având în vedere faptul că în punctul ① există o forță concentrată F , derivarea lucrului mecanic exterior va fi făcută în raport cu această forță:

$$v_1 = \sum_i \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial F} dx.$$

Ca urmare se va scrie pe fiecare porțiune în parte relația momentului încovoietor și se va deriva în raport cu forța concentrată F .

Interval	Moment încovoietor	Derivata $\frac{\partial M_i}{\partial F}$	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	$-x$	$0 - 2a$
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	$-2a$	$0 - 2a$
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x)$	$-(2a + x)$	$0 - 3a$

Aplicând relația lui Castigliano, avem:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \int_0^{2a} \frac{(-Fx)(-x)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a(-2a)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)][-(2a + x)]}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{Fx^3}{3EI_z} \Big|_0^{2a} + \frac{4Fa^2x}{EI_z} \Big|_0^{2a} + \frac{F}{EI_z} \left(4a^2x + 4a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{3a} = \\
 &= \frac{F}{EI_z} \left(\frac{8a^3}{3} + 8a^3 + 12a^3 + 9a^3 + 18a^3 + 9a^3 \right) = \frac{149Fa^3}{3EI_z}
 \end{aligned}$$

b) deplasarea orizontală a punctului ②, u_2 ;

Având în vedere faptul că în punctul ② nu există nicio forță pe direcție orizontală, se introduce o forță fictivă P_0 (colorată în roșu – figura 4.6) și se scrie momentul încovoietor, pe fiecare interval în parte, ținând cont de această forță. Derivarea se face în raport cu această forță.

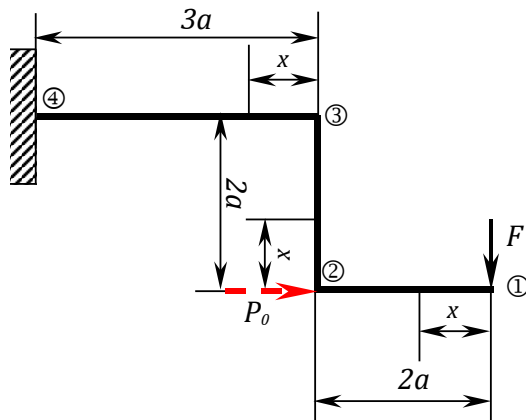


Figura 4.6

Observație

Prin poziționarea forței P_0 (colorată în roșu), așa cum este în schița atașată, se presupune că deplasarea are loc în direcția de acțiune a forței (spre dreapta).

Interval	Moment încovoiător	Derivata $\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	0	0 - 2a
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a + P_0 x$	x	0 - 2a
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x) + P_0 \cdot 2a$	2a	0 - 3a

În continuarea calculului, forța fictivă se anulează ($P_0 = 0$) și se consideră relațiile momentelor încovoiitoare fără această forță P_0 . Ca urmare, relația de calcul este:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \sum_i \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot x}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot 2a}{EI_z} dx = \\
 &= -\frac{2Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a} - \frac{2Fa}{EI_z} \left(2ax + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{3a} = -\frac{4Fa^3}{EI_z} - \frac{2Fa}{EI_z} \left(6a^2 + \frac{9a^2}{2} \right) = -\frac{25Fa^3}{EI_z}
 \end{aligned}$$

Faptul că valoarea iese negativă indică faptul că deplasarea punctului este în sens invers decât s-a considerat inițial (spre dreapta - direcția de acțiune a forței P_0).

c) rotirea punctului ①, φ_1 (figura 4.7);

Deoarece în punctul ① nu există niciun cuplu (moment) se introduce în punctul ① un cuplu oarecare C_0 și se scrie momentul încovoiător, pe fiecare interval în parte, ținând cont de acest cuplu. Derivarea se face în raport cu acest cuplu.

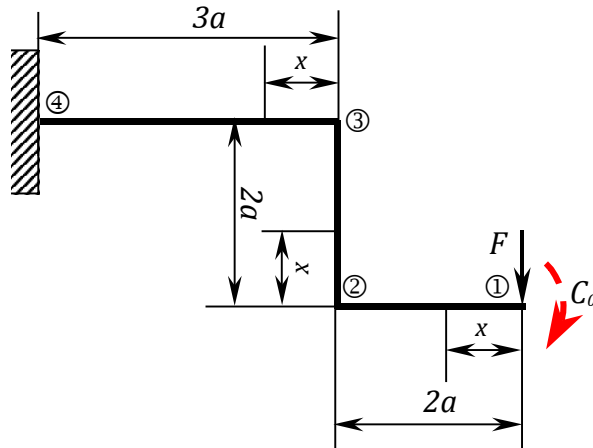


Figura 4.7

Observație

Prin poziționarea cuplului C_0 , așa cum este în schița atașată (colorat cu roșu), se presupune că rotirea are loc în direcția de acțiune a cuplului (în sens orar).

Interval	Moment încovoiător	Derivata $\frac{\partial M_i}{\partial C_0}$	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx - C_0$	-1	0 - 2a
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a - C_0$	-1	0 - 2a
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x) - C_0$	-1	0 - 3a

În continuarea calculului, cuplul (momentul) fictiv se anulează ($C_0 = 0$) și se consideră relațiile momentelor încovoietoare fără această cuplu C_0 . Ca urmare, relația de calcul este:

$$\begin{aligned}
 \varphi_1 &= \sum_i \int_l \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial C_0} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot (-1)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot (-1)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (-1)}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a} + \frac{2Fa}{EI_z} x \Big|_0^{2a} + \frac{F}{EI_z} \left(2ax + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{3a} = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{4a^2}{2} + 4a^2 + 6a^2 + \frac{9a^2}{2} \right) = \frac{33Fa^2}{2EI_z}
 \end{aligned}$$

Faptul că valoarea iese pozitivă indică faptul că rotirea punctului este în sens orar, în sensul de acționare al cuplului C_0 .

d) deplasarea verticală a punctului ③, v_3 (figura 4.8);

Având în vedere faptul că în punctul ③ nu există nicio forță pe direcție orizontală, se introduce o forță fictivă P_0 (colorată în roșu – figura 4.8) și se scrie momentul încovoietor, pe fiecare interval în parte, ținând cont de această forță. Derivarea se face în raport cu această forță.

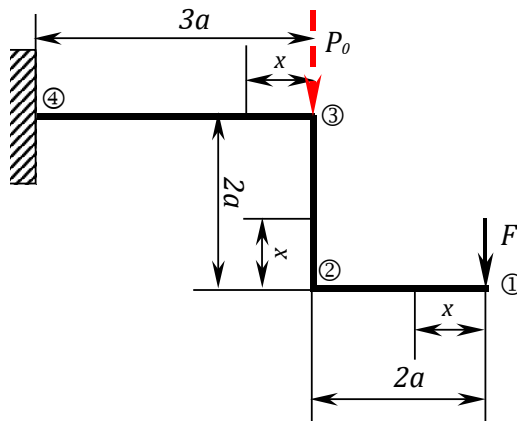


Figura 4.8

Observație

Prin poziționarea forței P_0 (colorată în roșu), așa cum este în schița atașată, se presupune că deplasarea are loc în direcția de acțiune a forței (spre dreapta).

Interval	Moment încovoietor	Derivata $\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	0	0 – 2a
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	0	0 – 2a
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x) - P_0 \cdot x$	-x	0 – 3a

În continuarea calculului, forța fictivă se anulează ($P_0 = 0$) și se consideră relațiile momentelor încovoietoare fără această forță P_0 . Ca urmare, relația de calcul este:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot (0)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (-x)}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{F}{EI_z} \left(2a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^{3a} = \frac{18Fa^3}{EI_z}
 \end{aligned}$$

Având în vedere faptul că valoarea obținută este pozitivă, rezultă că deplasarea punctului ③ pe verticală este în jos, adică în sensul de acțiune al forței fictive P_0 .

e) rotirea punctului ③, φ_3 (figura 4.9);

Deoarece în punctul ③ nu există niciun cuplu (moment) se introduce în punctul ③ un cuplu oarecare C_0 și se scrie momentul încovoietor, pe fiecare interval în parte, ținând cont de acest cuplu. Derivarea se face în raport cu acest cuplu.

Observație

Prin poziționarea cuplului C_0 , așa cum este în schița atașată (colorat cu roșu – figura 4.9), se presupune că rotirea are loc în direcția de acțiune a cuplului (în sens anti orar).

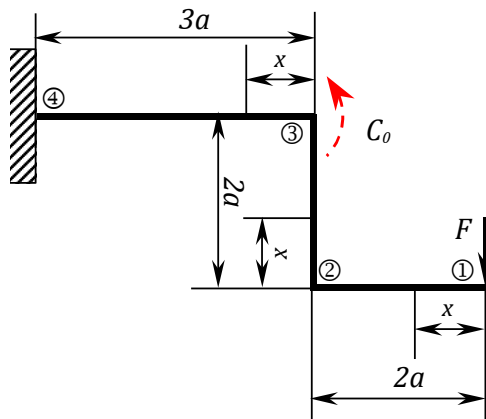


Figura 4.9

Interval	Moment încovoietor	Derivata $\frac{\partial M_i}{\partial C_0}$	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	0	$0 - 2a$
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	0	$0 - 2a$
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x) + C_0$	1	$0 - 3a$

În continuarea calculului, cuplul (momentul) fictiv se anulează ($C_0 = 0$) și se consideră relațiile momentelor încovoietoare fără această cuplu C_0 . Ca urmare, relația de calcul este:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \sum_i \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial C_0} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot (0)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot (0)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (1)}{EI_z} dx = \\ &= -\frac{F}{EI_z} \left(2ax + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{3a} = -\frac{F}{EI_z} \left(6a^2 + \frac{9a^2}{2} \right) = -\frac{21Fa^2}{2EI_z} \end{aligned}$$

Faptul că valoarea iese negativă indică faptul că rotirea punctului este în sens orar, în sens invers sensului adoptat pentru cuplul C_0 .

4.4. Teorema lucrului mecanic minim. Teorema lui Menabrea

În cazul sistemelor nedeterminate valorile necunoscute sunt forțele sau momentele din legături (forțele/momentele de reacțiune $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$). Deformațiile (deplasări și rotații) corespunzătoare acestor reacțiuni sunt egale cu zero și ținând cont de relația (4.31) obținem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L_e}{\partial X_1} = 0 ; \\ \frac{\partial L_e}{\partial X_2} = 0 ; \\ \vdots \\ \frac{\partial L_e}{\partial X_n} = 0 . \end{array} \right. \quad (4.34)$$

Considerând că lucrul mecanic este o funcție dependentă și de reacțiuni:

$$L_e = f(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n), \quad (4.35)$$

rezultă din relațiile (4.34), care reprezintă derivatele parțiale ale lucrului mecanic, că lucrul mecanic are o valoare extremă în raport cu reacțiunile

Observație

Pe de altă parte, lucrul mecanic conform relației este pozitiv și ținând cont de considerentele matematice rezultă că valorile extreme raportate la reacțiuni sunt valor minime.

Pe baza celor de mai sus rezultă **teorema lui Menabrea**: *Reacțiunile sistemelor nedeterminate au o astfel de valoare încât lucrul mecanic de deformare al întregului sistem este minim.*

Aceași procedură poate fi aplicată pentru sistemele nedeterminate interior. În acest caz, drept valori necunoscute sunt considerate forțele axiale, tăietoare, momentele de încovoiere sau torsiune.

4.5. Metoda sarcinii unitare. Relația Mohr-Maxwell

Așa cum s-a determinat în subcapitolul 4.3, deplasarea într-un punct oarecare al unei structuri poate fi calculată cu relația lui Castigliano (4.32):

$$\Delta_j = \frac{\partial L_e}{\partial F_j} = \sum \int \frac{N}{EA} \frac{\partial N}{\partial F_j} dx + \sum \int \alpha \frac{T}{GA} \frac{\partial T}{\partial F_j} dx + \sum \int \frac{M_b}{EI_z} \frac{\partial M_b}{\partial F_j} dx + \sum \int \frac{M_t}{GI_p} \frac{\partial M_t}{\partial F_j} dx$$

Fiecare sarcină exterioară influențează mărimea eforturilor secționale. Eforturile secționale, dintr-o secțiune transversală oarecare, pot fi exprimate ca funcții liniare și omogene de sollicitări exterioare:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = n_1 F_1 + n_2 F_2 + n_3 F_3 + \dots + n_j F_j + \dots + n_r F_r ; \\ T = t_1 F_1 + t_2 F_2 + t_3 F_3 + \dots + t_j F_j + \dots + t_r F_r ; \\ M_t = m_{t,1} F_1 + m_{t,2} F_2 + m_{t,3} F_3 + \dots + m_{t,j} F_j + \dots + m_{t,r} F_r ; \\ M_i = m_{i,1} F_1 + m_{i,2} F_2 + m_{i,3} F_3 + \dots + m_{i,jk} F_j + \dots + m_{i,r} F_r , \end{array} \right. \quad (4.36)$$

unde $n_j, t_j, m_{t,j}, m_{i,j}$ sunt *coeficienți de influență*.

Semnificația fizică a coeficienților de influență rezultă din considerarea unei sarcini exterioare, oarecare F_k , egală cu unitatea ($F_k = 1$) restul fiind egale cu zero. Ca urmare, relațiile (4.36) devin:

$$\left\{ \begin{array}{l} N = n_j ; \\ T = t_j ; \\ M_t = m_{t,j} ; \\ M_i = m_{i,j} . \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Din (4.37) rezultă faptul că, $n_j, t_j, m_{t,j}, m_{i,j}$ sunt eforturile secționale dintr-o secțiune curentă dezvoltate atunci când se aplică o forță egală cu unitatea în același punct de aplicație și pe aceeași direcție ca și forța F_j . În mod similar, sunt definiți și ceilalți coeficienți.

Derivând relațiile (4.36) în raport cu sarcina exterioară F_j se obțin relațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N}{\partial F_k} = n_j ; \\ \frac{\partial T}{\partial F_k} = t_j ; \\ \frac{\partial M_t}{\partial F_k} = m_{t,j} ; \\ \frac{\partial M_i}{\partial F_k} = m_{i,j} . \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Ținând cont de (4.38), relația de calcul a deformațiilor (4.32) rezultă o nouă formulă de calcul a acestora:

$$\Delta_j = \sum_i \int \frac{N n_j}{E A} dx + \sum_i \int \alpha \frac{T t_j}{G A} dx + \sum_i \int \frac{M_t m_{t,j}}{G I_p} dx + \sum_i \int \frac{M_{iz} m_{i,j}}{E I_z} dx. (4.39)$$

Relația (4.39) mai este cunoscută și sub denumirea de **relația lui Mor-Maxwell**. Pentru aplicarea ei se parcurg următoarele etape:

- Etapa 1 – se introduce o sarcină exterioară virtuală unitară $F_j=1$ (forță sau moment) în punctul și după direcția deformației ce se dorește a fi calculată;
- Etapa 2 – se determină relațiile eforturilor secționale N, T, M_t, M_i produse de încărcarea exterioară reală, pe fiecare interval în parte;
- Etapa 3 - se determină relațiile eforturilor secționale $n_j, t_j, m_{t,j}, m_{i,j}$ produse de încărcarea exterioară unitară $F_j=1$, pe fiecare interval în parte;
- Etapa 4 – se calculează integralele din relația (4.39).

În sinteză, cele două metode, Castigliano și Mohr-Maxwell, se definesc prin aspectele prezentate în tabelul 4.1.

Tabelul 4.1

Metoda de calcul	Încărcarea din punctul de calcul al deformației	
	Existența sarcinii exterioare F_j	Inexistența sarcinii exterioare F_j
Castigliano	Se realizează derivata eforturilor secționale în raport cu sarcina exterioară F_j	Se introduce o sarcină exterioară fictivă Q_j (forță sau moment), se face derivarea eforturilor secționale în raport cu Q_j iar în calculul integralelor sarcina fictivă Q_j se anulează.
Metoda forțelor unitare	Se introduce o sarcină exterioară unitară $Q_j=1$ (forță sau moment) în punctul de calcul al deformației și se aplică relația (4.39)	

Exemplul 4.2 prin Metoda Mohr-Maxwell (figura 4.5)

Se reconsideră bara cotită din figura 4.5. În cazul metodei Mohr Maxwell, în punctul și pe direcția deformării de pun încărcări unitare:

- Forță unitară pentru calculul deplasării;
- Cuplu unitar pentru determinarea rotirii.

După introducerea încărcărilor unitare se înmulțesc momentele reale M_i cu cele unitare m_{i1} :

$$\Delta = \sum_i \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx$$

- deplasarea verticală a punctului ①, v_1 (figura 4.10);

Se introduce o forță egală cu unitatea în acest punct (Figura 4.10,b - colorată în roșu).

Ca urmare se va scrie pe fiecare porțiune în parte relația momentului încovoietor real și a celui unitar 1. Grinda este parcursă prin interiorul ei, deplasându-se de la dreapta la stânga.

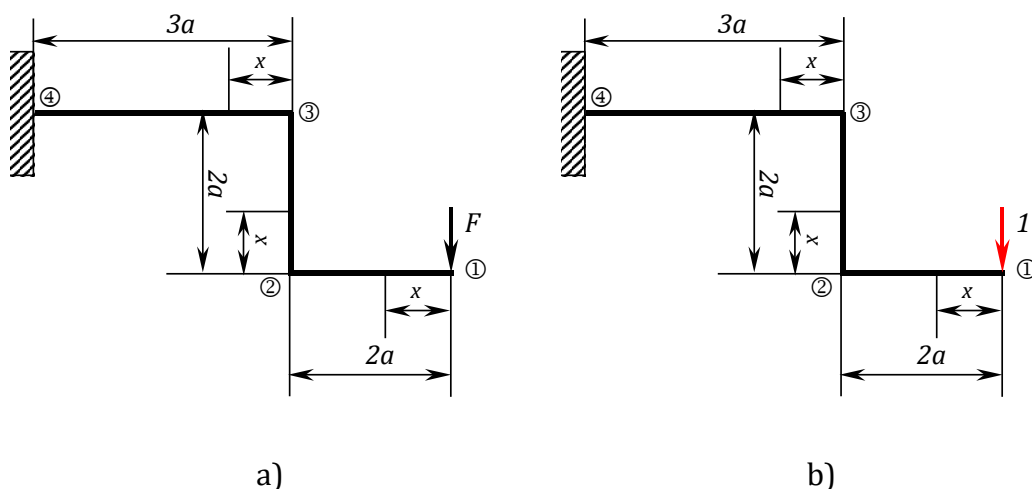


Figura 4.10

Interval	Moment încovoietor real	Moment unitar de încovoiere m_1	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	$-1 \cdot x$	$0 - 2a$
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	$-1 \cdot 2a$	$0 - 2a$
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x)$	$-1 \cdot (2a + x)$	$0 - 3a$

Aplicând relația Mohr-Maxwell, avem:

$$\begin{aligned}
 v_1 &= \int_0^{2a} \frac{(-Fx)(-1 \cdot x)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a(-1 \cdot 2a)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] [-1 \cdot (2a + x)]}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{Fx^3}{3EI_z} \Big|_0^{2a} + \frac{4Fa^2x}{EI_z} \Big|_0^{2a} + \frac{F}{EI_z} \left(4a^2x + 4a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{3a} = \\
 &= \frac{F}{EI_z} \left(\frac{8a^3}{3} + 8a^3 + 12a^3 + 9a^3 + 18a^3 + 9a^3 \right) = \frac{149Fa^3}{3EI_z}
 \end{aligned}$$

b) deplasarea orizontală a punctului ②, u_1 ;

- se introduce o forță egală cu unitatea în acest punct (colorată în roșu - figura 4.11,b)

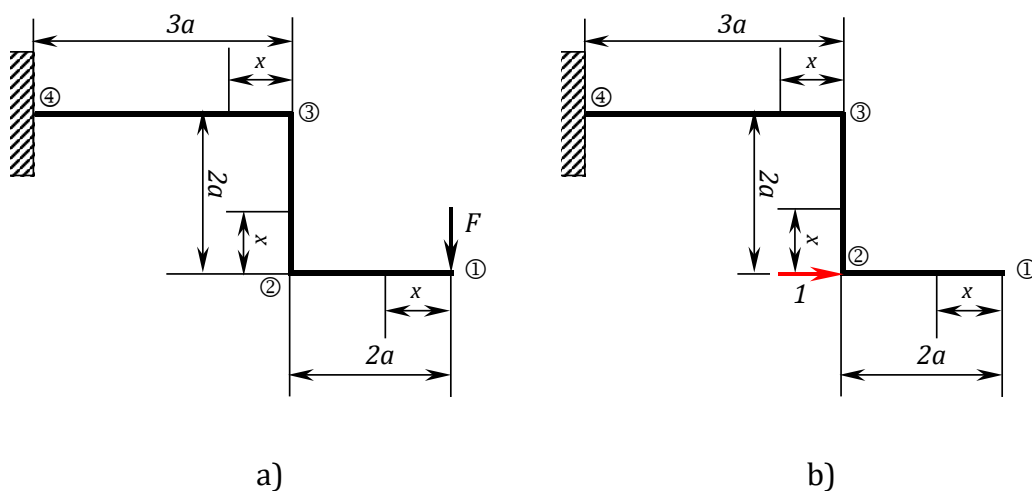


Figura 4.11

Interval	Moment încovoiitor real	Moment unitar de încovoiere m_{i1}	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	0	$0 - 2a$
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	$1 \cdot x$	$0 - 2a$
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x)$	$1 \cdot 2a$	$0 - 3a$

Aplicând relația Mohr-Maxwell, avem:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \sum \int_l \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot (1 \cdot x)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (1 \cdot 2a)}{EI_z} dx = \\
 &= -\frac{2Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a} - \frac{2Fa}{EI_z} \left(2ax + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{2a} = -\frac{4Fa^3}{EI_z} - \frac{2Fa}{EI_z} \left(6a^2 + \frac{9a^2}{2} \right) = -\frac{25Fa^3}{2EI_z}
 \end{aligned}$$

Faptul că valoarea iese negativă indică faptul că deplasarea punctului este în sens invers decât s-a considerat inițial (spre dreapta – direcția de acțiune a forței unitare 1).

c) rotirea punctului ①, φ_1 ;

- se introduce un cuplu unitar în punctul ①

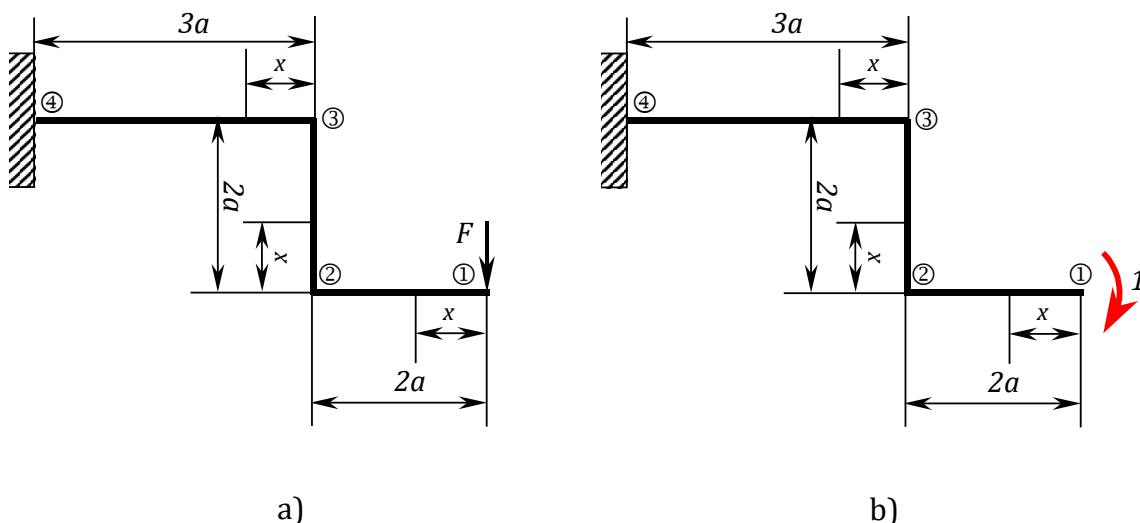


Figura 4.12

Interval	Moment încovoiitor real	Moment unitar de încovoiere m_{i1}	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	-1	0 - 2a
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	-1	0 - 2a
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x)$	-1	0 - 3a

Ca urmare, pe baza relației de calcul Mohr-Maxwell, avem:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \sum_i \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot (-1)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot (-1)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (-1)}{EI_z} dx = \\ &= \frac{F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a} + \frac{2Fa}{EI_z} x \Big|_0^{2a} + \frac{F}{EI_z} \left(2ax + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^{3a} = \frac{F}{EI_z} \left(\frac{4a^2}{2} + 4a^2 + 6a^2 + \frac{9a^2}{2} \right) = \frac{33Fa^2}{2EI_z} \end{aligned}$$

Faptul că valoarea iese pozitivă indică faptul că rotirea punctului este în sens orar, în sensul de acționare al cuplului unitar 1.

d) deplasarea verticală a punctului ③, v_3 ;

- se introduce o forță unitară în punctul ③ (figura 4.13)

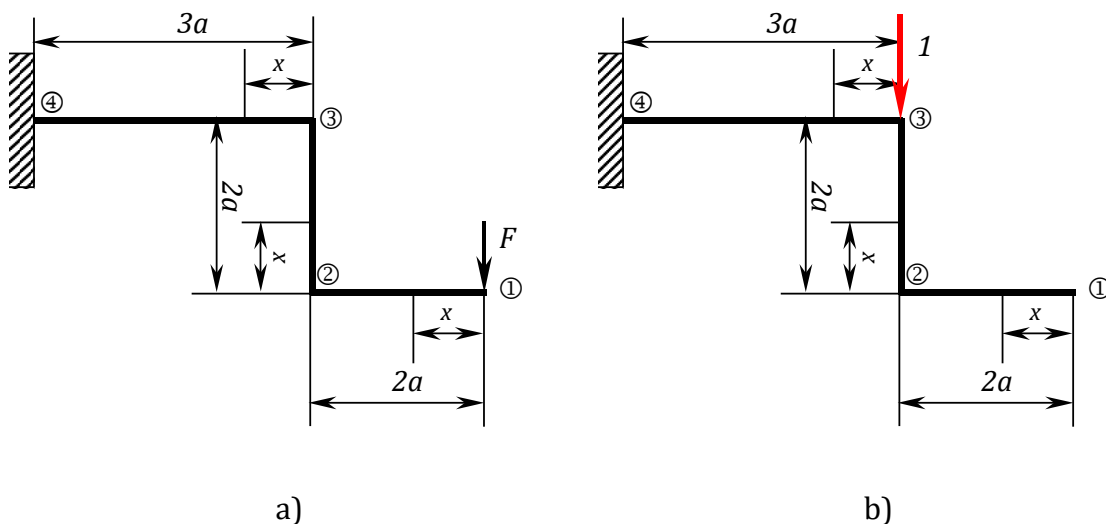


Figura 4.13

Interval	Moment încovoietor real	Moment unitar de încovoiere m_{i1}	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	0	0 - 2a
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	0	0 - 2a
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x)$	$-1 \cdot x$	0 - 3a

Pe baza relației Mohr-Maxwell avem:

$$\begin{aligned}
 v_3 &= \sum \int_l \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (-1 \cdot x)}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{F}{EI_z} \left(2a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_0^{3a} = \frac{18Fa^3}{EI_z}
 \end{aligned}$$

Având în vedere faptul că valoarea obținută este pozitivă, rezultă că deplasarea punctului ③ pe verticală este în jos, adică în sensul de acțiune al forței unitare 1.

e) rotirea punctului ③, φ_3 .

- se introduce în punctul ③ un cuplu unitar (figura 4.14)

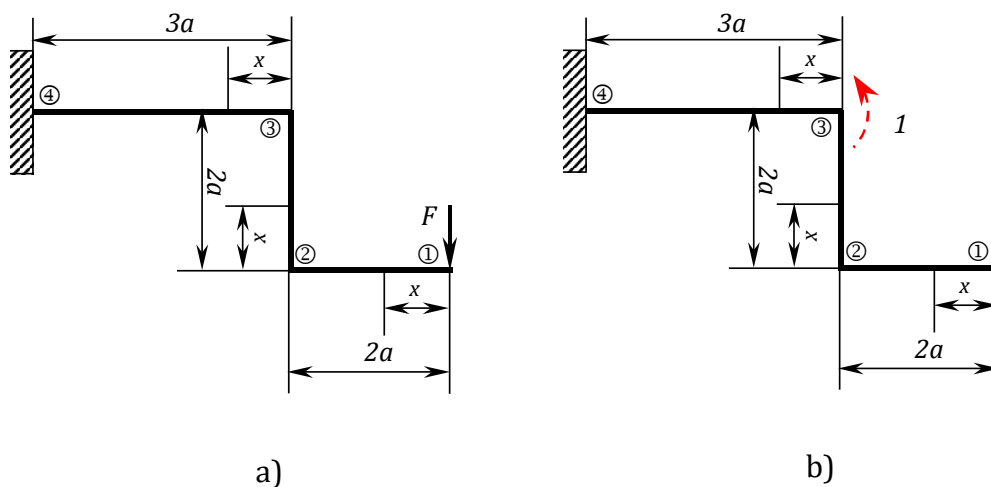


Figura 4.14

Interval	Moment încovoietor real	Moment unitar de încovoiere m_{i1}	Limite interval
① - ②	$M_{i,1-2} = -Fx$	0	$0 - 2a$
② - ③	$M_{i,2-3} = -F \cdot 2a$	0	$0 - 2a$
③ - ④	$M_{i,3-4} = -F \cdot (2a + x)$	1	$0 - 3a$

Pe baza relației Mohr-Maxwell avem:

$$\begin{aligned} \varphi_3 &= \sum_i \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial C_0} dx = \int_0^{2a} \frac{(-Fx) \cdot (0)}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{-F \cdot 2a \cdot (0)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{[-F \cdot (2a + x)] \cdot (1)}{EI_z} dx = \\ &= -\frac{F}{EI_z} \left(2ax + \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{3a} = -\frac{F}{EI_z} \left(6a^2 + \frac{9a^2}{2} \right) = -\frac{21Fa^2}{2EI_z} \end{aligned}$$

Faptul că valoarea iese negativă indică faptul că rotirea punctului este în sens orar, adică în sens invers sensului adoptat pentru cuplul unitar.

Exemplul 4.3

Se consideră structura din Figura 4.15 de secțiune constantă pătrată de latură b . Structura este încastrată în punctul ④ și liberă în punctele ① și ②. În punctul ② acționează o forță egală cu $2F$.

Se cere să se calculeze:

- Rotirea în punctul ① (φ_1);
- Deplasarea orizontală a punctului ② (u_2);
- Deplasarea verticală a punctului ② (v_2).

Rezolvare

Se vor folosi metoda Castigliano și metoda forțelor (Mohr-Maxwell)

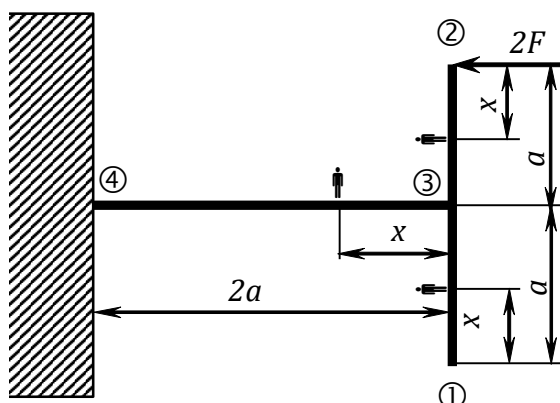
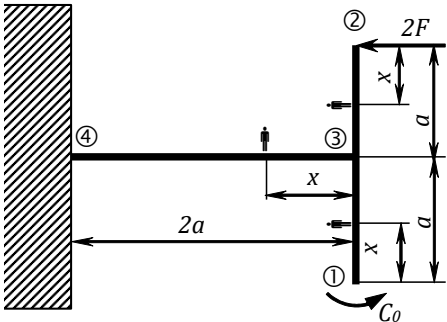
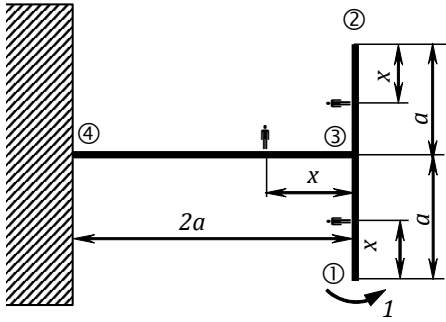


Figura 4.15

a) Determinarea rotirii în punctul ①

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ① nu există moment se va introduce un moment fictiv C_0 .	Se introduce un moment unitar în punctul ①.
 Figura 4.16	 Figura 4.17
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.16) și se derivează în raport cu momentul fictiv C_0 .	Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.15) și momentele rezultate din acțiunea momentului unitar introdus în punctul ① (figura 4.17).

interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial C_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ③	C_0	1	$0 \div a$	① - ③	0	1	$0 \div a$
② - ③	$2Fx$	0	$0 \div a$	② - ③	$2Fx$	0	$0 \div a$
③ - ④	$2Fa + C_0$	1	$0 \div 2a$	③ - ④	$2Fa$	1	$0 \div 2a$

Se calculează rotirea în punctul ① conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$\varphi_1 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial C_0} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 1}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{2Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{2Fa \cdot 1}{EI_z} dx = \frac{2F}{EI_z} x \Big|_0^{2a} = \frac{4Fa^2}{EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$\varphi_1 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 1}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{2Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{2Fa \cdot 1}{EI_z} dx = \frac{2F}{EI_z} x \Big|_0^{2a} = \frac{4Fa^2}{EI_z}$$

b) Deplasarea orizontală a punctului ② (u_2);

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ② există o forță oarecare (de intensitatea $2F$) se va considera forța existentă ca fiind o forță oarecare P ($2F=P$).	Se introduce o forță unitară în punctul ②.

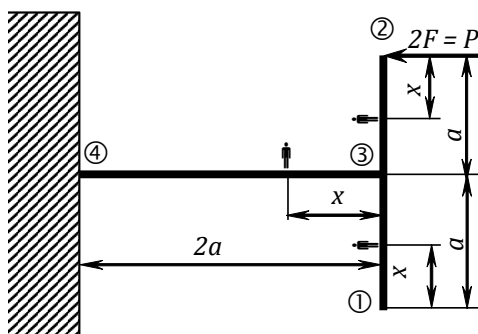


Figura 4.18

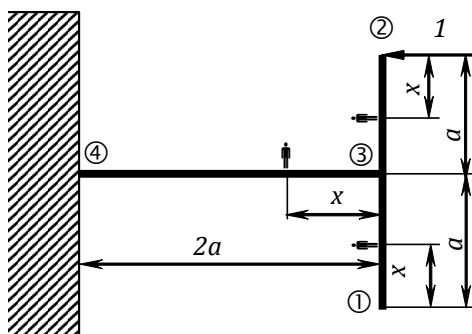


Figura 4.19

Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.18) și se derivează în raport cu forța P , după care în calculul relației forța P este înlocuită cu $2F$

Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.15) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introduse în punctul ① (figura 4.19).

interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	Limite
① - ③	0	0	$0 \div a$	① - ③	0	0	$0 \div a$
② - ③	Px	x	$0 \div a$	② - ③	$2Fx$	$1 \cdot x$	$0 \div a$
③ - ④	Pa	a	$0 \div 2a$	③ - ④	$2Fa$	$1 \cdot a$	$0 \div 2a$

Se calculează deplasarea pe orizontală în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

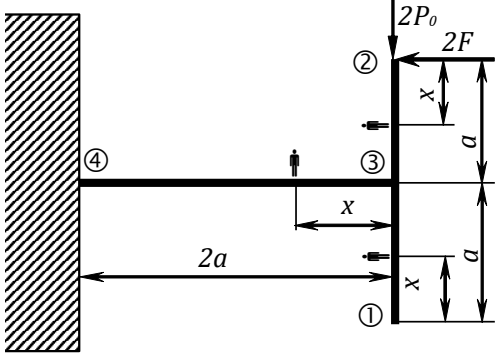
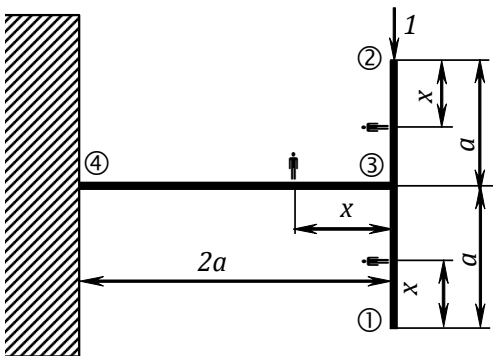
- Metoda Castigliano

$$\begin{aligned}
 u_2 &= \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{Px \cdot x}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{Pa \cdot a}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{2Fx \cdot x}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{2Fa \cdot a}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{2Fx^3}{3EI_z} \Big|_0^a + \frac{2Fa^2}{EI_z} x \Big|_0^{2a} = \frac{14Fa^3}{3EI_z}
 \end{aligned}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$u_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{2Fx \cdot 1 \cdot x}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{2Fa \cdot 1 \cdot a}{EI_z} dx = \frac{2Fx^3}{3EI_z} \Big|_0^a + \frac{2Fa^2}{EI_z} x \Big|_0^{2a} = \frac{14Fa^3}{3EI_z}$$

c) Deplasarea verticală a punctului ② (v_2).

Metoda Castigliano				Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)			
Deoarece în punctul ② nu există o forță verticală în punctul ②, se introduce o forță verticală fictivă oarecare P_0 .				Se introduce o forță unitară în punctul ②.			
 Figura 4.20				 Figura 4.21			
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.20) și se derivează în raport cu forța P_0 .				Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.15) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introduse în punctul ② (figura 4.21).			
interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ③	0	0	$0 \div a$	① - ③	0	0	$0 \div a$
② - ③	$2Fx$	0	$0 \div a$	② - ③	$2Fx$	0	$0 \div a$
③ - ④	$2Fa - 2P_0x$	$-x$	$0 \div 2a$	③ - ④	$2Fa$	$-1 \cdot x$	$0 \div 2a$

Se calculează deplasarea verticală în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$u_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{2Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{2Fa(-x)}{EI_z} dx = -\frac{2Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a} = -\frac{4Fa^3}{EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$u_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{2Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{2a} \frac{2Fa \cdot (-1 \cdot x)}{EI_z} dx = -\frac{2Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{2a} = -\frac{4Fa^3}{EI_z}$$

Exemplul 4.4

Se consideră grinda din Figura 4.22 de secțiune constantă, circulară, de diametru d . Structura este încastrată în punctul ③ și liberă în punctul ①. În punctul ② acționează o forță egală cu $2F$.

Se cere să se calculeze:

- Deplasarea pe verticală în punctul ① (v_1);
- Deplasarea pe verticală a punctului ② (v_2);
- Rotirea punctului ② (φ_2).

Se vor folosi metoda Castigliano și metoda forțelor (Mohr-Maxwell)

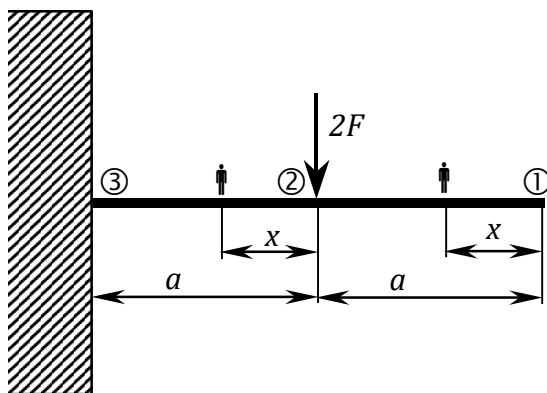
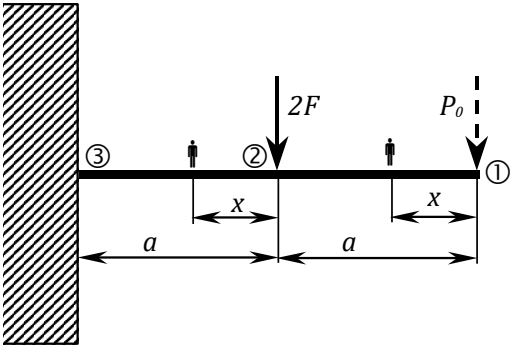
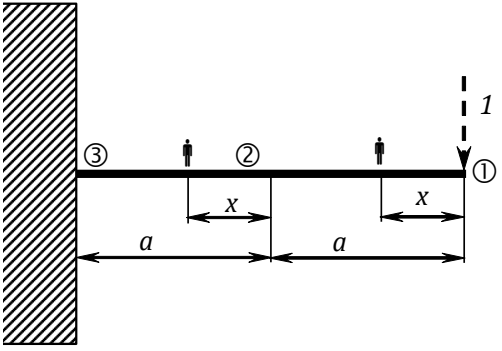


Figura 4.22

- Deplasarea pe verticală în punctul ① (v_1)

Metoda Castigliano				Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)			
Deoarece în punctul ① nu există nicio forță se va introduce o forță fictivă P_0 .				Se introduce o forță unitară în punctul ①.			
							
Figura 4.23				Figura 4.24			
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.23) și se derivează în raport cu momentul fictiv C_0				Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.22) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introduse în punctul ① (figura 4.24)			
interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ③	$-P_0 \cdot x$	$-x$	$0 \div a$	① - ③	0	$-1 \cdot x$	$0 \div a$
② - ③	$-P_0(a+x) - 2Fx$	$-(a+x)$	$0 \div a$	② - ③	$-2Fx$	$-1(a+x)$	$0 \div a$

Se calculează rotirea în punctul ① conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

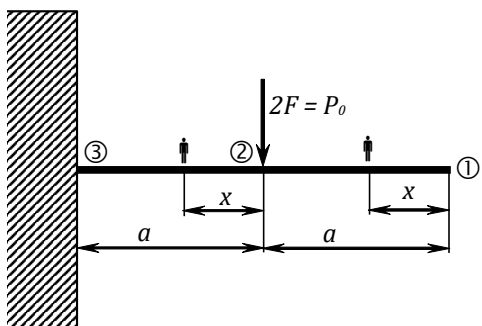
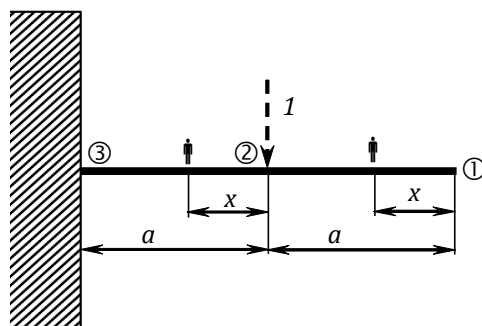
$$\begin{aligned}
 v_1 &= \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot (-x)}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{-2Fx \cdot [-(a+x)]}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{2F}{EI_z} \left(a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2F}{EI_z} \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{5Fa^3}{3EI_z}
 \end{aligned}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$v_1 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot (-1 \cdot x)}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{-2Fx \cdot [-1 \cdot (a+x)]}{EI_z} dx =$$

$$= \frac{2F}{EI_z} \left(a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2F}{EI_z} \left(\frac{a^3}{2} + \frac{a^3}{3} \right) = \frac{5Fa^3}{3EI_z}$$

b) Deplasarea pe verticală a punctului ② (v_2);

Metoda Castigliano				Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)			
Deoarece în punctul ② există o forță $2F$ și se va considera această forță egală cu P_0 .				Se introduce o forță unitară în punctul ②.			
 Figura 4.25				 Figura 4.26			
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.25) și se va deriva în raport cu P_0 , după care se va face înlocuirea $P_0 = 2F$.				Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.22) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introduse în punctul ② (figura 4.26)			
interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ③	0	0	$0 \div a$	① - ③	0	0	$0 \div a$
② - ③	$-P_0 x$	$-x$	$0 \div a$	② - ③	$-2Fx$	$-1 \cdot x$	$0 \div a$

Se calculează deplasarea verticală în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

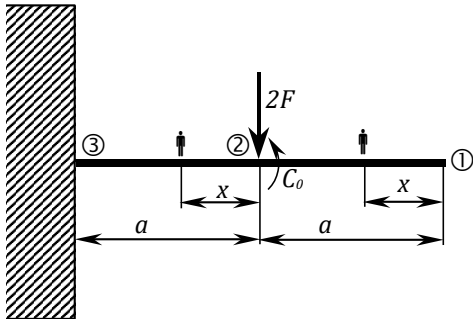
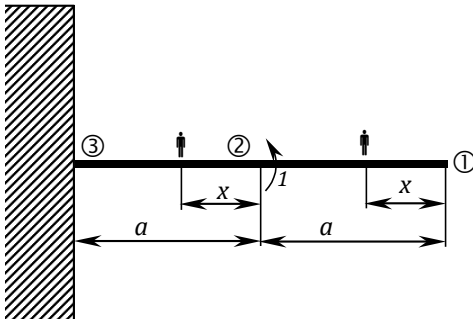
- Metoda Castigliano

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{-P_0 x \cdot [-x]}{EI_z} dx = \frac{P_0}{EI_z} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a = \frac{2Fa^3}{3EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{-2Fx \cdot [-1 \cdot x]}{EI_z} dx = \frac{2F}{EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a = \frac{2Fa^3}{3EI_z}$$

c) Rotirea punctului ② (φ_2).

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ② nu există un moment, se va introduce un cuplu fictiv C_0 .	Se introduce un cuplu unitar în punctul ②.
 Figura 4.27	 Figura 4.28
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.27) și se derivează în raport cu forța C_0 .	Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.22) și momentele rezultate din acțiunea cuplului unitar introdus în punctul ② (figura 4.28)

interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial C_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ③	0	0	$0 \div a$	① - ③	0	0	$0 \div a$
② - ③	$-2F_0x + C_0$	1	$0 \div a$	② - ③	$-2Fx$	1	$0 \div a$

Se calculează rotirea în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$\phi_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial C_0} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{-2Fx \cdot 1}{EI_z} dx = -\frac{2F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = -\frac{Fa^2}{EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$\varphi_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{0 \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^a \frac{-2Fx \cdot 1}{EI_z} dx = -\frac{2F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^a = -\frac{Fa^2}{EI_z}$$

Observație

- semnul (-) indică faptul că rotirea este în sens invers sensului de rotire a cuplului C_0 .

Exemplul 4.5

Se consideră structura din figura 4.29 de secțiune constantă pătrată de latură b . Structura este încastrată în punctul ④ și liberă în punctele ① și ②. În punctul ② acționează o forță egală cu $2F$.

Se cere să se calculeze:

- Deplasarea pe orizontală în punctul ① (u_1);
- Deplasarea pe verticală a punctului ② (v_2);
- Rotirea în punctul ② (φ_2).

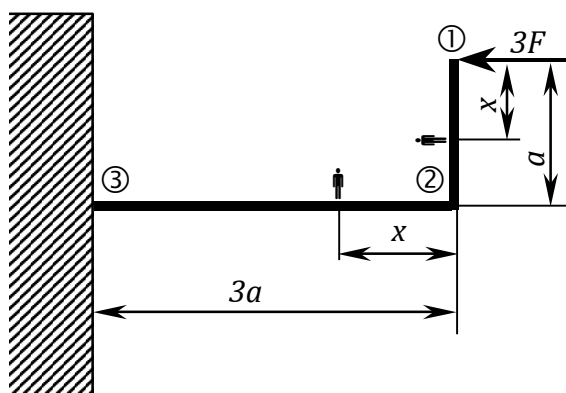
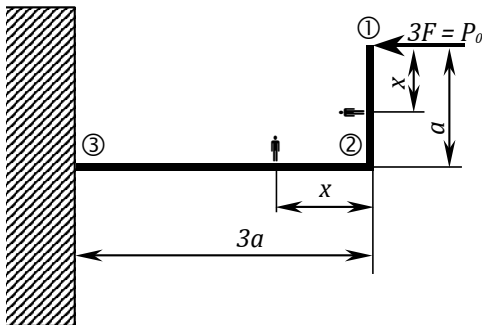
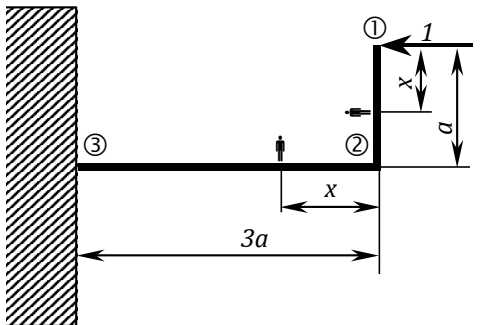


Figura 4.29

Se vor folosi metoda Castigliano și metoda forțelor (Mohr-Maxwell)

a) Deplasarea pe orizontală în punctul ① (u_1);

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ① există o forță concentrată $3F$ se va considera această forță egală cu o forță oarecare P_0 .	Se introduce o forță unitară în punctul ①.
 Figura 4.30	 Figura 4.31
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.30) și se derivează în raport cu forța P_0 , după	Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform

care se înlocuiește în calcul forța P_0 cu $3F$.				figurii 4.29) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introdusă în punctul ① (figura 4.31).			
interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ②	$P_0 x$	x	$0 \div a$	① - ②	$3Fx$	$1x$	$0 \div a$
② - ③	$P_0 a$	a	$0 \div 3a$	② - ③	$3Fa$	$1a$	$0 \div 3a$

Se calculează deplasarea orizontală în punctul ① conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^a \frac{P_0 x \cdot x}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{P_0 a \cdot a}{EI_z} dx = \frac{P_0}{EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a + \frac{P_0 a^2}{EI_z} x \Big|_0^{3a} = \\
 &= \frac{3Fa^3}{3EI_z} + \frac{9Fa^3}{EI_z} = \frac{10Fa^3}{EI_z}
 \end{aligned}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$u_1 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{3Fx \cdot 1x}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{3Fa \cdot 1a}{EI_z} dx = \frac{3F}{EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^a + \frac{3Fa^2}{EI_z} x \Big|_0^{3a} = \frac{10Fa^3}{EI_z}$$

b) Deplasarea pe verticală a punctului ② (v_2);

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ② nu există o forță concentrată se va considera o forță fictivă oarecare P_0 orientată în direcție verticală.	Se introduce o forță verticală unitară în punctul ②.

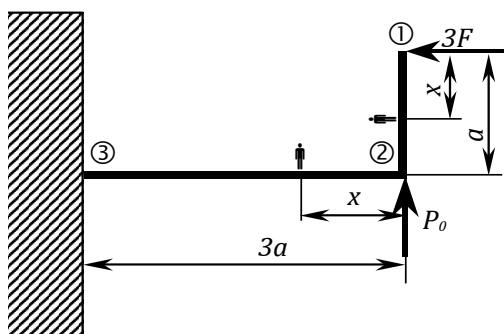


Figura 4.32

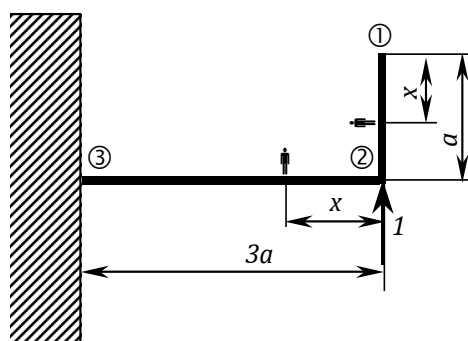


Figura 4.33

Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.32) și se derivează în raport cu forța P_0 .

Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.29) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introduse în punctul ② (figura 4.33)

interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ②	$3Fx$	0	$0 \div a$	① - ②	$3Fx$	0	$0 \div a$
② - ③	$3Fa + P_0x$	x	$0 \div 3a$	② - ③	$3Fa$	$1x$	$0 \div 3a$

Se calculează deplasarea verticală în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

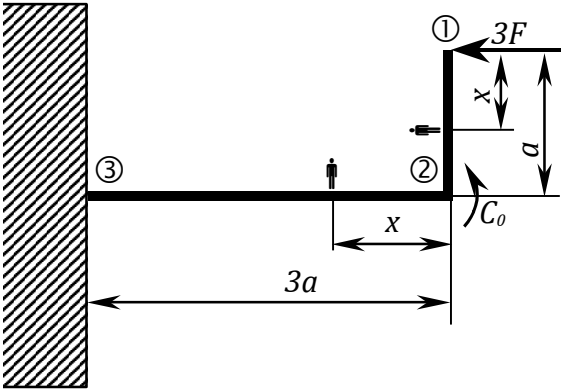
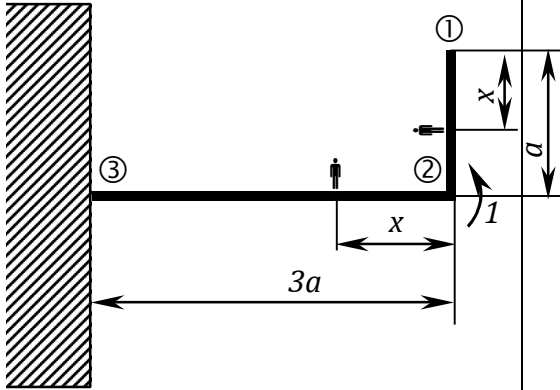
- Metoda Castigliano

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^a \frac{3Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{3Fa \cdot x}{EI_z} dx = \frac{3Fax^2}{2EI_z} \Big|_0^{3a} = \frac{27Fa^3}{2EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{3Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{3Fa \cdot 1x}{EI_z} dx = \frac{3F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{3a} = \frac{27Fa^3}{2EI_z}$$

d) Rotirea în punctul ② (φ_2).

Metoda Castigliano				Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)			
Deoarece în punctul ② nu există un moment concentrat se va considera un cuplu fictiv oarecare C_0 .				Se introduce un cuplu unitar în punctul ②.			
 Figura 4.34				 Figura 4.35			
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.34) și se derivează în raport cu forța C_0 .				Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.29) și momentele rezultate din acțiunea cuplului unitar introdus în punctul ② (figura 4.35)			
interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial C_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ②	$3Fx$	0	$0 \div a$	① - ②	$3Fx$	0	$0 \div a$
② - ③	$3Fa + C_0$	1	$0 \div 3a$	② - ③	$3Fa$	1	$0 \div 3a$

Se calculează rotirea în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$\phi_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial C_0} dx = \int_0^a \frac{3Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{3Fa \cdot 1}{EI_z} dx = \frac{3Fax}{EI_z} \Big|_0^{3a} = \frac{9Fa^2}{EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$\varphi_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^a \frac{3Fx \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{3Fa \cdot 1}{EI_z} dx = \frac{3Fax}{EI_z} \Big|_0^{3a} = \frac{9Fa^2}{EI_z}$$

Exemplul 4.6

Se consideră structura din Figura 4.36 de secțiune constantă circulară de diametru d . Structura este încastrată în punctul ③ și liberă în punctul ①. În punctul ① acționează forța $3F$ iar în punctul ② acționează o forță egală cu $2F$.

Se cere să se calculeze:

- Deplasarea pe orizontală în punctul ① (u_1);
- Deplasarea pe verticală a punctului ② (v_2);
- Rotirea în punctul ② (φ_2).

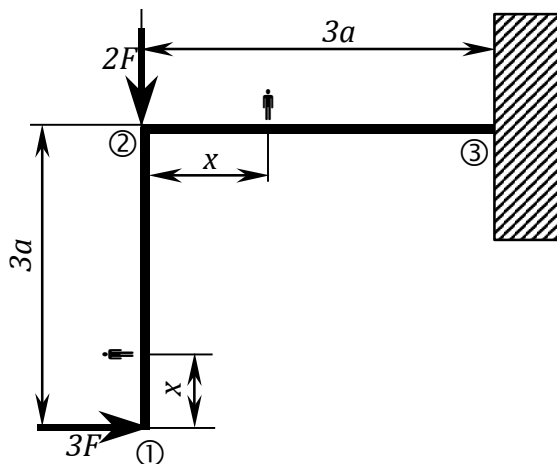
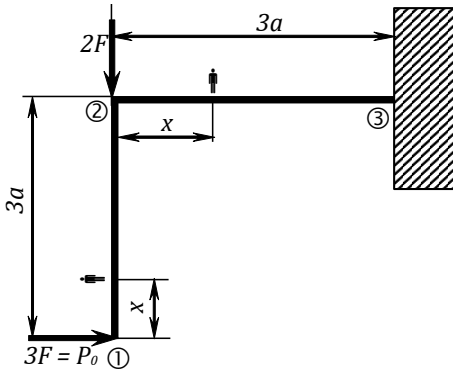
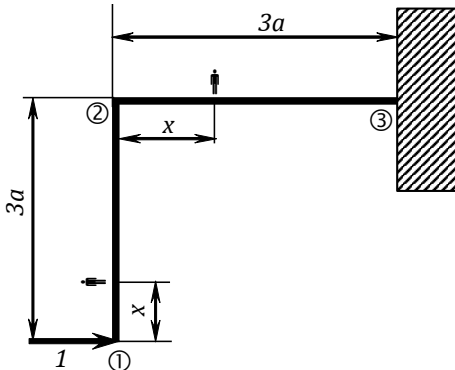


Figura 4.36

Se vor folosi metoda Castigliano și metoda forțelor (Mohr-Maxwell)

- Deplasarea pe orizontală în punctul ① (u_1);

b)

Metoda Castigliano				Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)			
Deoarece în punctul ① există o forță concentrată $3F$ se va considera această forță egală cu o forță oarecare P_0 .				Se introduce o forță unitară în punctul ① (figura 4.38).			
							
Figura 4.37				Figura 4.38			
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.37) și se derivează în raport cu forța P_0 , după care se înlocuiește în calcul forța P_0 cu $3F$.				Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.36) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introdusă în punctul ① (figura 4.38).			
interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ②	$-P_0 x$	$-x$	$0 \div 3a$	① - ②	$-3Fx$	$-1x$	$0 \div 3a$
② - ③	$-3aP_0 - 2Fx$	$-3a$	$0 \div 3a$	② - ③	$-9Fa - 2Fx$	$-1 \cdot 3a$	$0 \div 3a$

Se calculează deplasarea orizontală în punctul ① conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

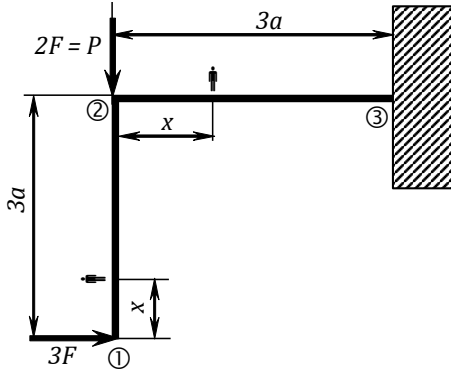
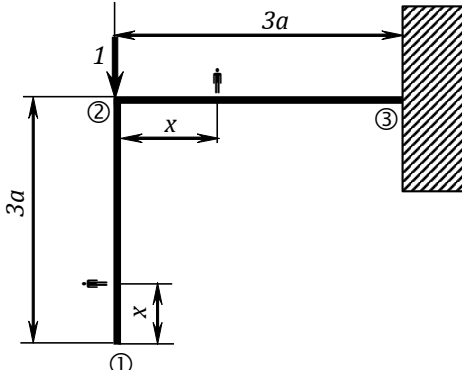
$$\begin{aligned}
 u_1 &= \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P_0} dx = \int_0^{3a} \frac{(-P_0 x) \cdot (-x)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{(-P_0 \cdot 3a - 2Fx)(-3a)}{EI_z} dx = \\
 &= \frac{P_0}{EI_z} \frac{x^3}{3} \bigg|_0^{3a} + \left(\frac{9P_0 a^2}{EI_z} x + \frac{6Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \right) \bigg|_0^{3a}
 \end{aligned}$$

$$u_1 = \frac{P_0 27a^3}{3EI_z} + \frac{27P_0 a^3}{EI_z} + \frac{54Fa^3}{2EI_z} = \frac{3F \cdot 27a^3}{3EI_z} + \frac{27 \cdot 3F \cdot a^3}{EI_z} + \frac{27Fa^3}{EI_z} = \frac{135Fa^3}{EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$\begin{aligned} u_1 &= \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^{3a} \frac{(-3Fx) \cdot (-1x)}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{(-9Fa - 2Fx) \cdot (-1 \cdot 3a)}{EI_z} dx = \\ &= \frac{3F}{EI_z} \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{3a} + \frac{27Fa^2}{EI_z} x \Big|_0^{3a} + \frac{6Fa}{EI_z} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{3a} = \frac{27Fa^3}{EI_z} + \frac{81Fa^3}{EI_z} + \frac{27Fa^3}{EI_z} = \frac{135Fa^3}{EI_z} \end{aligned}$$

b) Deplasarea pe verticală a punctului ② (v_2);

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ② există o forță concentrată $2F$ se va considera această forță egală cu o forță oarecare P .	Se introduce o forță unitară în punctul ② (figura 4.40).
 Figura 4.39	 Figura 4.40
Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.39) și se derivează în raport cu forța P , după care se înlocuiește în calcul forța P cu $2F$.	Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.36) și momentele rezultate din acțiunea forței unitare introdusă în punctul ② (Figura 4.40).

interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial P}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ②	$-3Fx$	0	$0 \div 3a$	① - ②	$-3Fx$	0	$0 \div 3a$
② - ③	$-3F \cdot 3a - Px$	$-x$	$0 \div 3a$	② - ③	$-9Fa - 2Fx$	$-1x$	$0 \div 3a$

Se calculează deplasarea verticală în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P} dx = \int_0^{3a} \frac{(-3Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{(-3F \cdot 3a - Px)(-x)}{EI_z} dx = \left(\frac{9Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} + \frac{P}{EI_z} \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{3a}$$

$$v_2 = \frac{81Fa^3}{2EI_z} + \frac{2F \cdot 81a^3}{3EI_z} = \frac{189Fa^3}{2EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^{3a} \frac{(-3Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{(-9Fa - 2Fx) \cdot (-1 \cdot x)}{EI_z} dx = \frac{9Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{3a} + \frac{2F}{EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{3a}$$

$$v_2 = \frac{81Fa^3}{2EI_z} + \frac{2F \cdot 81a^3}{3EI_z} + \frac{27Fa^3}{EI_z} = \frac{189Fa^3}{2EI_z}$$

c) Rotirea în punctul ② (φ_2)

Metoda Castigliano	Metoda forțelor (Mohr-Maxwell)
Deoarece în punctul ② nu există un cuplu, se va introduce în acest punct un moment oarecare concentrat C_0 .	Se introduce un moment unitar în punctul ② (figura 4.42).

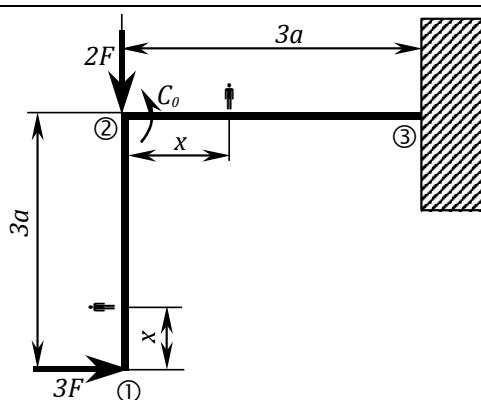


Figura 4.41

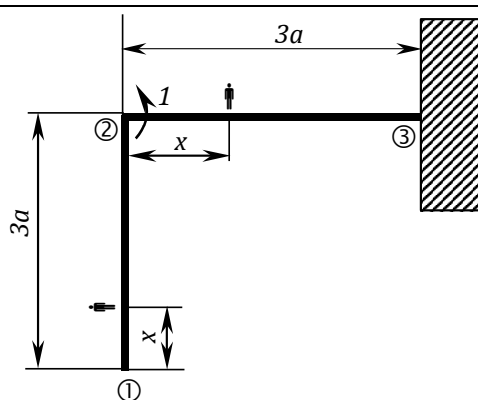


Figura 4.42

Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune (figura 4.41) și se derivează în raport cu momentul C_0 .

Se scriu momentele încovoietoare pe fiecare porțiune datorate încărcării reale (conform figurii 4.36) și momentele rezultate din acțiunea momentului unitar introdus în punctul ② (figura 4.42).

interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial C_0}$	limite	interval	M_i	m_{i1}	limite
① - ②	$-3Fx$	0	$0 \div 3a$	① - ②	$-3Fx$	0	$0 \div 3a$
② - ③	$-3F \cdot 3a - 2Fx - C_0$	-1	$0 \div 3a$	② - ③	$-9Fa - 2Fx$	-1	$0 \div 3a$

Se calculează deplasarea verticală în punctul ② conform cu relațiile de calcul:

- Metoda Castigliano

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial P} dx = \int_0^{3a} \frac{(-3Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{(-9Fa - 2Fx)(-1)}{EI_z} dx = \left(\frac{9Fa}{EI_z} x + \frac{2F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \right) \Bigg|_0^{3a}$$

$$v_2 = \frac{27Fa^2}{EI_z} + \frac{9a^2}{EI_z} = \frac{36Fa^2}{EI_z}$$

- Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

$$v_2 = \sum \int \frac{M_i m_{i1}}{EI_z} dx = \int_0^{3a} \frac{(-3Fx) \cdot 0}{EI_z} dx + \int_0^{3a} \frac{(-9Fa - 2Fx) \cdot (-1)}{EI_z} dx = \frac{9Fa}{EI_z} x \Big|_0^{3a} + \frac{2F}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{3a}$$

$$v_2 = \frac{27Fa^2}{EI_z} + \frac{9Fa^2}{EI_z} = \frac{36Fa^2}{EI_z}$$

4.6. Metoda lui Mohr-Vereșciaghin

Se consideră o porțiune de grindă la care se analizează diagrama de momente încovoietoare rezultată din încărcarea exterioară reală și cea de momente încovoietoare rezultată din încărcarea unitară (figura 4.43).

Corespunzător acestui element de arie, în diagrama de momente îi corespunde un element de arie egal cu:

$$d\Omega_i = M_i dx. \quad (4.40)$$

În diagrama de momente rezultată din încărcarea unitară, corespunzător momentului de încovoiere M_i din diagrama de încărcare reală, îi corespunde un moment încovoiitor unitar m_{ik} care este egal cu:

$$m_{ik} = x \cdot tg\alpha. \quad (4.41)$$

Considerând integrala aferentă solicitării de încovoiere din relația (4.39), fără a considera modulul de rigiditate $EI_z = ct.$:

$$\int_1^2 M_i m_{ik} dx = \int_1^2 M_i \cdot x \cdot tg\alpha dx = \int_1^2 x \cdot tg\alpha d\Omega_i = tg\alpha \int_1^2 x d\Omega_i \quad (4.42)$$

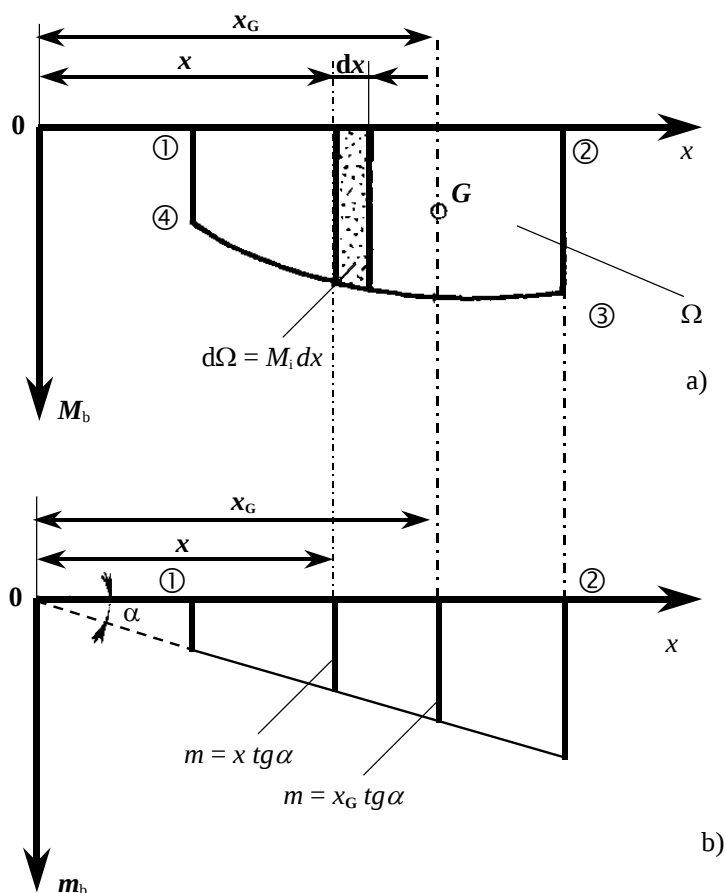


Figura 4.43

În relația (4.42) ultima integrală este egală cu momentul static al suprafeței diagramei de momente reale:

$$\int_1^2 x d\Omega = \Omega x_G \quad (4.43)$$

unde Ω reprezintă aria diagramei de momente reale, iar x_G este abscisa centrului de greutate al acestei diagrame.

Combinând relațiile (4.42) cu (4.43) rezultă:

$$\operatorname{tg} \alpha \int_1^2 x d\Omega_i = \operatorname{tg} \alpha \Omega x_G = \Omega x_G \operatorname{tg} \alpha = \Omega m_G. \quad (4.44)$$

Pe baza relației (4.44) se poate concluziona că integrala corespunzătoare din relația (4.39), corespunzătoare solicitării de încovoiere, de pe o porțiune de grindă dreaptă, este egală cu produsul dintre aria diagramei de solicitare și efortul produs de încărcarea unitară din dreptul centrului de greutate al suprafeței Ω .

Pe baza acestei reguli de înmulțire a diagramelor se numește **metoda lui Vereșceaghin**. Ea se aplică tuturor eforturilor din secțiunile drepte de bare. Ca urmare, relația de calcul generalizată este:

$$\Delta_k = \sum \frac{\Omega_N n_{Gk}}{EA} + \sum \alpha \frac{\Omega_T t_{Gk}}{GA} + \sum \frac{\Omega_{M_t} m_{tGk}}{GI_p} + \sum \frac{\Omega_{M_i} m_{iGk}}{EI_z} \quad (4.45)$$

SISTEME STATIC NEDETERMINATE

5

5.1. Introducere

Structurile nedeterminate static apar mai frecvent în practică decât cele care sunt determinate static și sunt, în general, mai economice prin faptul că sunt mai rigide și mai puternice.

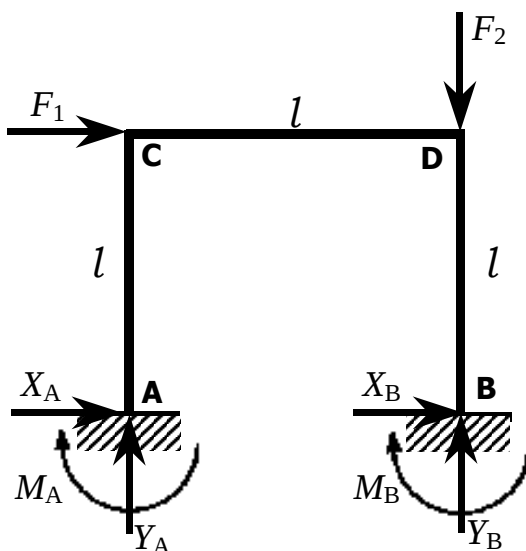


Figura 5.1

Se consideră cadrul prezentat în figura 5.1. Cadrul este încărcat cu sarcini coplanare astfel încât sistemul este bidimensional.

Deoarece elementele verticale AC și BD ale cadrului sunt fixe la A și B, sarcinile aplicate vor genera un total de șase reacțiuni 3 forțe și 3 momente, așa cum este prezentat în figură.

Ecuțiile de echilibru static sunt:

$$\begin{cases} \sum X=0; & X_A + F_1 + X_B = 0; \\ \sum Y=0; & Y_A - F_2 + Y_B = 0; \\ \sum M_A=0; & M_A + F_1 \cdot l + F_2 \cdot l - Y_B \cdot l + M_B = 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

Așa cum rezultă din sistemul de ecuații (5.1), sunt 6 valori necunoscute ($X_A, X_B, Y_A, Y_B, M_A, M_B$) și numai 3 ecuații de echilibru.

Concluzia este că sistemul este static nedeterminat

În funcție de cauza nedeterminării, pot fi identificate trei tipuri de sisteme static nedeterminate:

- a) **sisteme cu nedeterminări exterioare**, caz în care numărul reacțiunilor exterioare este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru cunoscute din static și care sunt aplicabile sistemului respective. Nedeterminarea apare ca urmare a numărului mare de legături pe care sistemul le are cu mediul exterior. Drept necunoscute sunt considerate reacțiunile și după determinarea lor pot fi rezolvate problemele. Din această categorie fac parte grinzile drepte așezate pe mai multe reazeme, cu sau fără încastrări, bare cotite, cadre, bare curbe, grinzi cu zăbrele etc.
- b) **sisteme cu nedeterminări interioare**, caz în care eforturile din secțiunile transversale nu pot fi determinate cu ajutorul metodelor de calcul ale staticii, cu toate că valorile reacțiunilor exterioare pot fi determinate pe baza ecuațiilor de echilibru cunoscute din statică. Nedeterminarea, în acest caz, este datorată, pe de o parte, formei închise pe care o are sistemul, iar pe de altă parte, legăturile rigide existente între bare, aspect care fac imposibilă determinarea eforturilor secționale, cu metodele de calcul ale staticii. Acest tip de nedeterminări pot să se dezvolte în cazuri precum: cadre închise, inele, grinzi cu zăbrele cu bare suplimentare etc.
- c) **sisteme cu nedeterminări exterioare și interioare**, caz în care există o combinație a celor două situații de la punctele „a” și „b”.

Orice problemă static nedeterminată, indiferent de natura nedeterminării este definită de „*gradul de nedeterminare*”. Gradul de nedeterminare este definit a fi egal cu diferența dintre numărul necunoscutelor și numărul ecuațiilor de echilibru static aplicabile structurii analizate.

Toate mărimile care nu pot fi determinate din ecuațiile de echilibru static sunt definite a fi „*mărimi static nedeterminate*”.

Observație: Numărul mărimilor static nedeterminate este egal cu gradul de nedeterminare al sistemului.

Operația de determinare a mărimilor static nedeterminate este denumită „*ridicarea nedeterminării*”.

Practic, oricare dintre mărimile necunoscute poate fi considerată a fi mărime static nedeterminată.

Astfel, în cazul sistemelor cu nedeterminări exterioare legăturile exterioare suplimentare sunt înlocuite cu reacțiunile static nedeterminate, în timp ce, în cazul sistemelor cu nedeterminări interioare sunt înlăturate legăturile interioare suplimentare, considerându-se bara sistemului secționată pe porțiunea static nedeterminată fiind evidențiate eforturile interioare static nedeterminate.

Ridicarea nedeterminărilor se bazează pe două grupe de condiții:

- a) pe condiții de legătură scrise în dreptul și pe direcția mărimilor static nedeterminate, exprimate prin deformațiile geometrice (săgeata sau rotirea nule), în cazul sistemelor cu nedeterminări exterioare;

- b) pe condiții de continuitate ale fibrei medii deformată, scrise în dreptul și pe direcția mărimilor static nedeterminate, exprimate prin condiția ca fibra medie deformată să fie o curbă continuă, în cazul sistemelor cu nedeterminări interioare.

Observație: condițiile de legătură și de continuitate, folosite la rezolvarea problemelor static nedeterminate, definesc așa-numite „*ecuații de echilibru elastic*”.

Ca urmare, problemele static nedeterminate se rezolvă folosind două tipuri de ecuații de echilibru: *echilibru static* și *echilibru elastic*.

Ținând cont de cele de mai sus, se poate afirma faptul că rezolvarea problemelor static nedeterminate se poate face prin calculul unor deformații (deplasări și/sau rotații) în puncte în care valoarea acestora este cunoscută.

În concluzie, oricare din metodele cunoscute de calcul a deformațiilor poate fi folosită la ridicarea nedeterminării, prin aceste metode putându-se exprima ecuațiile de echilibru elastic.

În analiza structurilor static nedeterminate se folosesc două metode de bază:

- într-una, structura este redusă la o stare statică determinată prin eliminarea unui număr suficient de necunoscute pentru a permite determinarea reacțiunilor. În cadrul din figura 5.1, de exemplu, numărul de reacțiuni de legătură ar fi redus la trei dacă una dintre legături ar fi fixată (rămâne încastrată), iar cealaltă ar fi un suport cu role. Același rezultat ar fi obținut dacă o legătură ar rămâne fixă, iar cealaltă legătură ar fi eliminată în întregime. Remodelarea unei structuri în acest fel ar produce deplasări care altfel nu ar fi prezente. Aceste deplasări pot fi calculate prin analiza structurii determinate static. Această metodă este, în general, numită flexibilitate sau metoda de forțelor.
- procedura alternativă, cunoscută sub numele de rigiditate sau metoda deplasărilor, este similară cu metoda de forțelor, diferența majoră fiind că necunoscutele sunt deplasările în anumite puncte ale structurii. În general, procedura necesită o structură care urmează să fie împărțită într-un număr de elemente pentru fiecare dintre care sunt cunoscute relațiile de deplasare. Ecuațiile de echilibru sunt apoi scrise în termeni de deplasări ale legăturilor elementului și sunt rezolvate din deplasările necesare.

Atât în cazul metodei flexibilităților cât și în cazul metodei rigidităților, pentru structuri cu un grad ridicat de nedeterminare statică, se obțin un număr mare de ecuații, care sunt cel mai ușor rezolvate prin tehnici bazate pe calculator.

5.2. Metoda forțelor sau a flexibilităților

5.2.1. Considerații teoretice

Este considerat un cadru complex (figura 5.2) care este încărcat cu un set de forțe $(F_i, i=1, n)$. Sistemul este determinat static, iar forma sa se schimbă ca urmare a acțiunii forțelor.

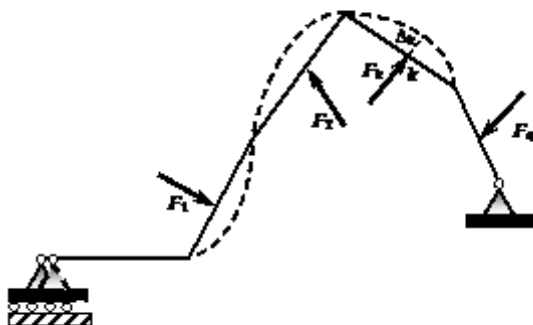


Figura 5.2

Deplasarea într-un punct „k” este considerată a fi Δ_k și valoarea sa depinde de nivelul și punctul de aplicare a forțelor:

$$\Delta_k = \Delta_k(F_1, F_2, \dots, F_n) \quad (5.2)$$

Având în vedere principiul superpoziției, deformarea Δ_k pot fi descrise de o relație ca:

$$\Delta_k = \delta_{k1}F_1 + \delta_{k2}F_2 + \delta_{k3}F_3 + \dots + \delta_{kn}F_n, \quad (5.3)$$

unde $\delta_{ki} (i=\overline{1,n})$ sunt coeficienții de influență.

Înțelesul coeficienților de influență se poate explica pe baza relației (5.3). În cazul în care sistemul de încărcare este considerat a fi compus numai dintr-o singură forță egală cu unitatea, de exemplu $F_j=1$, atunci deformarea în punctul „k” este:

$$\Delta_k = \delta_{kj}, \quad (5.4)$$

care poate fi înțeleasă astfel: **coeficientul δ_{kj} este deplasarea punctului „k” în direcția Δ_k atunci când se aplică o singură forță (sarcină) egală cu unitatea în loc de forța F_j .**

Indexul care definește coeficientul de influență au următorul înțeles:

- Primul index, „k”, definește atât poziția, cât și direcția deplasării;
- Al doilea index, „j”, definește sarcina unitară care produce deformarea.

În cazul unui sistem complex de bare (sisteme de cadre), coeficienții de influență pot fi calculați utilizând relația Mohr-Maxwell:

$$\delta_{jk} = \sum \int \frac{n_j n_k}{EA} dx + \sum \int \alpha \frac{t_j t_k}{GA} dx + \sum \int \frac{m_{bj} m_{bk}}{EI_z} dx + \sum \int \frac{m_{tj} m_{tk}}{GI_p} dx. \quad (5.5)$$

Din relația (5.5) rezultă teorema reciprocității deplasărilor:

$$\delta_{kj} = \delta_{jk}, \quad (5.6)$$

care exprimă faptul că deplasarea în punctul „k” în direcția Δ_k , produsă de o forță unitară aplicată în punctul „j”, în locul forței F_j , este egală cu deplasarea din punctul „j”, pe direcția lui F_j , produsă de aceeași sarcină aplicată în punctul „k”, pe direcția lui Δ_k .

5.2.2. Sisteme static nedeterminate

Să considerăm sistemul nedeterminat din figura 5.3. Gradul nedeterminat este „n”. Sistemul este modificat într-unul echivalent prin înlocuirea legăturilor suplimentare interne și externe cu sarcinile statice nedeterminate $X_1, X_2, \dots, X_n$.

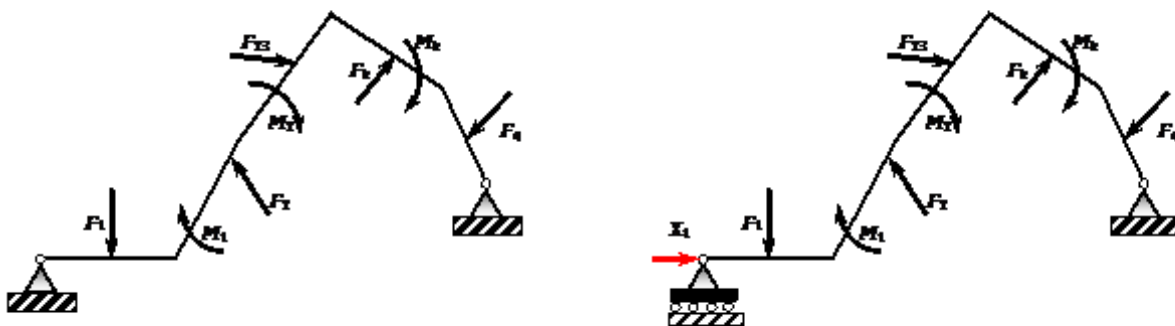


Figura 5.3

Având în vedere condițiile de limită și de continuitate, deplasările și rotațiile punctelor de legătură sunt egale cu zero:

$$\Delta_1=0; \Delta_2=0; \Delta_3=0; \dots; \Delta_n=0; \quad (5.7)$$

Luând în considerare principiul superpoziției și relația (5.3) o deplasare este rezultatul acțiunii tuturor forțelor, necunoscute (reacțiuni) $X_1, X_2, \dots, X_n$ și a forțelor cunoscute ($F_i, i=\overline{1, n}$). Ca urmare, folosind ecuațiile (5.3) și (5.7) rezultă următorul sistem de ecuații:

$$\begin{cases} \Delta_1 = \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1F_1} + \Delta_{1F_2} + \dots + \Delta_{1F_n} = 0; \\ \Delta_2 = \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2F_1} + \Delta_{2F_2} + \dots + \Delta_{2F_n} = 0; \\ \vdots \\ \Delta_n = \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nF_1} + \Delta_{nF_2} + \dots + \Delta_{nF_n} = 0; \end{cases} \quad (5.8)$$

Numărul de ecuații de la (5.8) este egal cu numărul de valori necunoscute (adică este egal cu gradul de nedeterminare statică a structurii).

Pentru structurile care au un grad ridicat de nedeterminare statică, determinarea soluțiilor sistemului (5.8) este dificilă, calculul acestora fiind mult mai facil cu calculatorul electronic.

După cum se poate observa pentru determinarea valorilor necunoscute, este necesar să se calculeze coeficienții de influență δ_{kj} .

Trebuie făcute unele observații cu privire la acești coeficienți:

- Aceștia sunt numiți „coeficienți direcți” în cazul în care indicii sunt $k=j$, „coeficienți secundari” dacă indicii sunt diferiți, $k \neq j$;
- „coeficienții direcți” au tot timpul valori pozitive;
- „coeficienții secundari” pot avea valori pozitive sau negative precum și zero.

Termenul liber Δ_{kF} , care reprezintă deplasarea în punctual „k” cauzată de forțele aplicate sistemului poate fi calculată folosind relația lui Mohr-Maxwell:

$$\Delta_{kF} = \sum \int \frac{N n_k}{EA} dx + \sum \int \alpha \frac{T t_k}{GA} dx + \sum \int \frac{M_b m_{bk}}{EI_z} dx + \sum \int \frac{M_t m_{tk}}{GI_p} dx \quad (5.9)$$

Concluzii

În absența oricărei sarcini cauzată de variația temperaturii, sistemul (5.8) este scris sub forma:

$$\sum_{j=1}^n \delta_{kj} X_j + \Delta_{kF} = 0, (k=1,2,3,\dots,n) \quad (5.10)$$

Pe baza relației (5.8), relația (5.10) poate fi rescrisă în forma matriceală:

$$[\delta] \{X\} + \{\Delta_F\} = \{0\}, \quad (5.11)$$

unde $[\delta]$ este matricea deplasărilor unitare:

$$[\delta] = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{nn} \end{bmatrix}, \quad (5.12)$$

iar $\{X\}$ este vectorul valorilor necunoscute:

$$\{\mathbf{X}\} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{Bmatrix}, \quad (5.13)$$

și $\{\Delta_F\}$ este vectorul deplasărilor cauzate de forțele externe:

$$\{\Delta_F\} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1F} \\ \Delta_{2F} \\ \vdots \\ \Delta_{nF} \end{Bmatrix}. \quad (5.14)$$

Procedura de găsim a valorilor necunoscute este definită de următorii pași:

1. se determină gradul de nedeterminare al sistemului;
2. se aleg valorile necunoscute care se doresc a fi calculate (forțe și/sau momente) care urmează a fi determinate;
3. se consideră sistemul determinat obținut din sistemul inițial prin înlăturarea legăturilor pe direcția forțelor/momentelor necunoscute obținându-se **sistemul static de bază**;
4. pe sistemul static de bază se introduc, pe rând, forțe sau momente unitare în punctele și pe direcțiile forțelor sau momentelor necunoscute;
5. se calculează coeficienții de influență dați de forțele unitare δ_{kj} ;
6. pe sistemul static de bază se consideră forțele externe reale și se calculează termenii Δ_{kF} , ($k=1,2,3,\dots,n$);
7. se scrie sistemul de ecuații (5.10);
8. se rezolvă sistemul de ecuații (5.10).

Exemplul 5.1

Se consideră sistemul din figura 5.4 încastrat în punctul A și articulat în punctul B. Se pune problema ridicării nedeterminării sistemului.

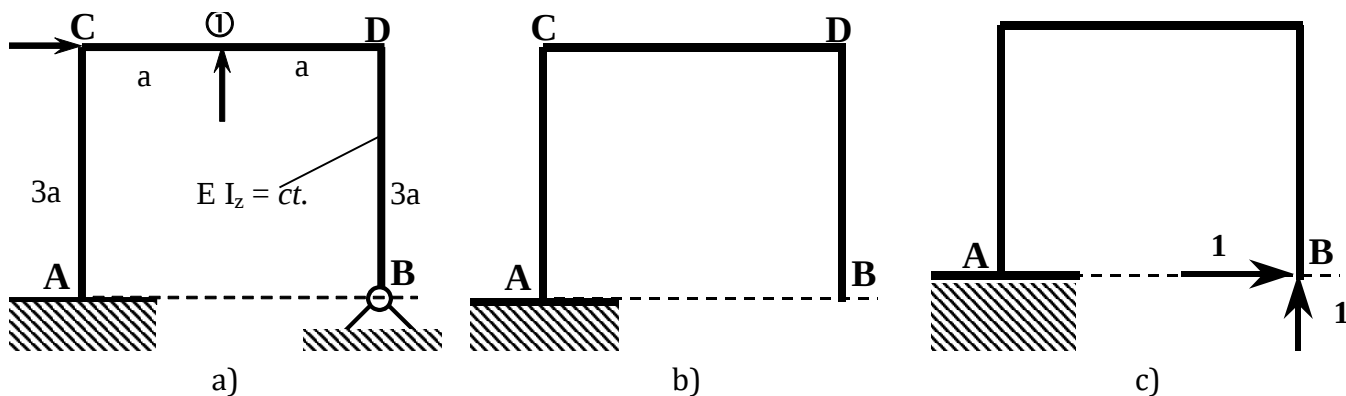


Figura 5.4

Rezolvare:

Pasul 1: se calculează gradul de nedeterminare;

Sistemul este de două ori static nedeterminat: 5 necunoscute (X_A, Y_A, M_A, X_B, Y_B) și numai 3 ecuații de echilibru static independent. Ca urmare gradul de nedeterminare este:

$$N = \text{numărul necunoscutelor (5)} - \text{numărul ecuațiilor de echilibru static (3)} = 2$$

Pasul 2: se aleg necunoscutele care se doresc a fi determinate; se aleg, în acest caz reacțiunile X_B și Y_B ;

Pasul 3: se consideră sistemul static determinat obținut din sistemul inițial la care s-au tăiat legăturile în care acționează cele două forțe alese X_B și Y_B (figura 5.4,b);

Pasul 4: în locul necunoscutelor X_B și Y_B se introduc, pe rând, forțele unitare (figura 5.4, c);

Pasul 5: se calculează coeficienții δ_{kj} cu relațiile

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{m_1 m_1}{EI_z} dx, \delta_{12} = \delta_{21} = \sum \int \frac{m_1 m_2}{EI_z} dx, \delta_{22} = \sum \int \frac{m_2 m_2}{EI_z} dx$$

Pasul 6: se calculează termenii Δ_{kF} : Δ_{1F}, Δ_{2F}

Pasul 7: se rezolvă sistemul de ecuații (5.10).

Exemplul 5.2

Se consideră grinda din figura 5.5 încastrată în punctul B și simplu rezemată în punctul A se cere să se determine reacțiunile care apar ca urmare a încărcării grinzii cu o forță distribuită, de intensitate constantă q pe toată lungimea l .

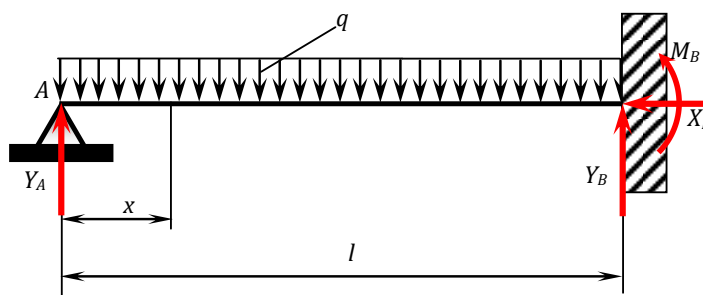


Figura 5.5

Ca urmare a sistemului de legături, asupra grinzii acționează următoarele reacțiuni:

- În reazemul din punctul A o forță de reacțiune Y_A ;
- În încastrarea din B trei reacțiuni X_B, Y_B și M_B .

Din capitolul de Statică de la Mecanică se cunoaște faptul că pot fi scrise un număr de 3 ecuații, independente, de echilibru:

$$\begin{cases} \sum X = 0; \\ \sum Y = 0; \\ \sum M = 0. \end{cases}$$

Ca urmare, gradul de nedeterminare este:

$$n = \text{nr. necunoscutelelor} (4) - \text{nr. ecuațiilor de echilibru} (3) = 1$$

Pentru ridicarea nedeterminării se alege una din cele 4 necunoscute pentru a fi calculate. Trebuie specificat faptul că, din ecuația de echilibru de pe direcția axială rezultă că forța $X_A = 0$ (nu există încărcare pe această direcție).

Problema rămîne static nedeterminată deoarece rămân necunoscute forțele Y_A și Y_B precum și momentul M_A iar numărul ecuațiilor independente rămase este de 2.

Se alege să se determine reacțiunea din A . Pentru determinare se pornește de la condiția geometrică $v_A = 0$ deoarece în reazem deplasarea este zero.

În continuare se prezintă ambele metode de calcul: metoda Castigliano și metoda forțelor (Mohr-Maxwell).

a) Metoda Castigliano

Relația de calcul a săgeții în punctul A este:

$$v_A = \sum \int_0^l \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial Y_A} dx,$$

unde M_i este momentul de încovoiere pe fiecare interval considerat, de lungime l . Fiind un singur interval se va scrie momentul încovoiitor la distanța x de punctul A .

Interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial Y_A}$	Limite
$A \div B$	$Y_A x - \frac{qx^2}{2}$	x	$0 \div l$

Ca urmare:

$$v_A = \sum \int_0^l \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial Y_A} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(Y_A x - \frac{qx^2}{2} \right) x dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(Y_A x^2 - \frac{qx^3}{2} \right) dx = \frac{1}{EI_z} \left(Y_A \frac{x^3}{3} - \frac{qx^4}{8} \right) \Big|_0^l$$

sau

$$\frac{1}{EI_z} \left(Y_A \frac{l^3}{3} - \frac{ql^4}{8} \right) = 0$$

de unde:

$$Y_A = \frac{3}{8}ql = 0,375ql.$$

b) Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

În cazul acestei metode în primă fază se alege necunoscuta care se dorește a fi determinate. După alegerea necunoscutei se construiește Sistemul Static de Bază (SSB) realizat din sistemul inițial la care se „rupe” legătura în care este necunoscuta care se dorește a fi calculată. Alegând tot forța Y_A se „rupe” legătura din A rezultând SSB din Figura 5.6.

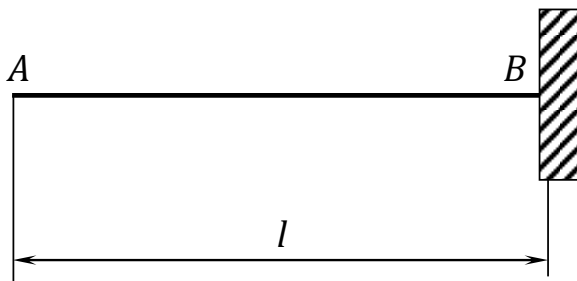


Figura 5.6

În continuare, pe SSB se pun, pe rând, încărcarea reală (figura 5.7) și o forță unitară 1 în punctul și pe direcția reacțiunii ce urmează a fi determinată (figura 5.8).

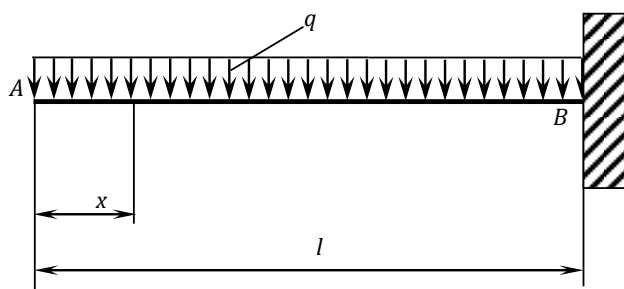


Figura 5.7

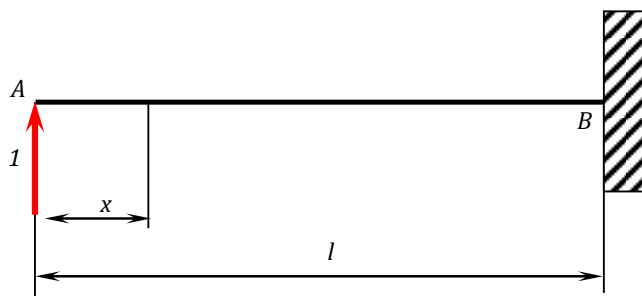


Figura 5.8

Se vor scrie momentele reale de încovoiere M_{iF} , pentru încărcarea din figura 5.7 și momentul încovoiator unitar m_{i1} , pentru încărcarea din figura 5.8. Calculul deformării în punctul A ține cont că valoarea deplasării este zero ($v_A=0$) și se face pe baza ecuației:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

unde $X_1 = Y_A$ reprezintă necunoscuta, δ_{11} reprezintă factorul de influență al reacțiunii Y_A (cu cât influențează reacțiunea Y_A deplasarea din punctul A) iar Δ_{1F} reprezintă influența pe care o are încărcarea reală asupra aceleiași deplasări din punctul A .

Pe baza figurilor 5.7 și 5.8 se scriu următoarele relații pentru cele două momente:

Interval	M_{iF}	m_{i1}	Limite
$A \div B$	$-\frac{qx^2}{2}$	$1 \cdot x$	$0 \div l$

Factorii de influență se calculează astfel:

$$\delta_{11} = \sum \int_0^l \frac{m_{i1} \cdot m_{i1}}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^l (1x)(1x) dx = \frac{x^3}{3EI_z} \Big|_0^l = \frac{l^3}{3EI_z}$$

$$\Delta_{1F} = \sum \int_0^l \frac{M_{iF} \cdot m_{i1}}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^l \left(-\frac{qx^2}{2} \right) (1x) dx = -\frac{qx^4}{8EI_z} \Big|_0^l = -\frac{ql^4}{8EI_z}$$

Înlocuind factorii de influență în ecuația deformării în punctul A rezultă;

$$\frac{l^3}{3EI_z} X_1 - \frac{ql^4}{8EI_z} = 0$$

din care rezultă:

$$Y_A = \frac{3}{8}ql = 0,375ql.$$

Exemplul 5.3

Se consideră cadrul din Figura 5.10 de secțiune constantă, circulară ($EI_z = ct.$), încastrat în punctul B și rezemat în punctul A . Se cere să se ridice nedeterminarea.

Rezolvare

Ca și în problema precedent, există 4 necunoscute:

- În reazemul din punctul A o forță de reacțiune Y_A ;
- În încastrarea din B trei reacțiuni X_B , Y_B și M_B .

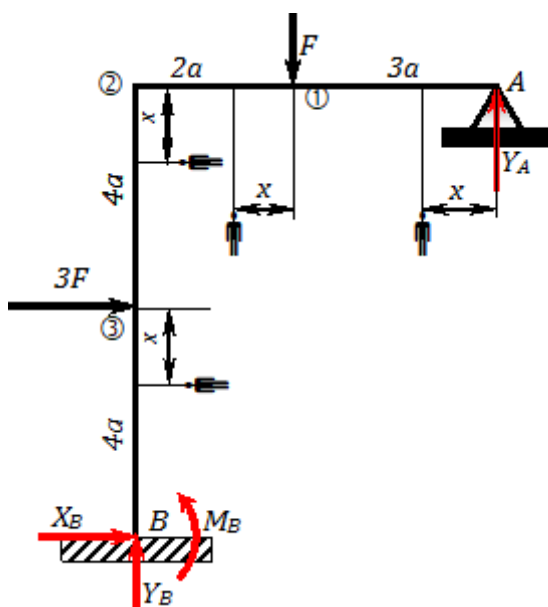


Figura 5.10

Reacțiunea X_B poate fi determinate din ecuația de echilibru static:

$$\sum X = 0,$$

din care rezultă $X_A = -3F$.

Ca urmare, rămân 3 necunoscute: forțele Y_A și Y_B precum și momentul M_A iar numărul ecuațiilor independente rămase este de 2, sistemul fiind o dată static nedeterminat.

Se alege ca necunoscută ce urmează a fi calculate, forța Y_A .

a) Metoda Castigliano

Relația de calcul a săgeții în punctul A este:

$$v_A = \sum \int_0^l \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial Y_A} dx,$$

unde M_i este momentul de încovoiere pe fiecare interval considerat, de lungime l .

Se pornește din punctul A , se scrie momentul încovoiitor pe fiecare tronson în parte, se derivează în raport cu Y_A și se introduce în formula de calcul a săgeții din A (v_A).

Interval	M_i	$\frac{\partial M_i}{\partial Y_A}$	Limite
$A \div ①$	$Y_A x$	x	$0 \div 3a$
$① \div ②$	$Y_A (3a + x) - Fx$	$3a + x$	$0 \div 2a$
$② \div ③$	$Y_A \cdot 5a - F \cdot 2a$	$5a$	$0 \div 4a$
$③ \div B$	$Y_A \cdot 5a - F \cdot 2a - Fx$	$5a$	$0 \div 4a$

Pe baza datelor din tabel, avem:

$$v_A = \sum \int_0^l \frac{M_i}{EI_z} \frac{\partial M_i}{\partial Y_A} dx = 0,$$

sau:

$$\begin{aligned} v_A &= \int_0^{3a} \frac{Y_A x}{EI_z} x dx + \int_0^{2a} \frac{[Y_A(3a+x) - Fx]}{EI_z} (3a+x) dx + \int_0^{4a} \frac{(Y_A \cdot 5a - F \cdot 2a)}{EI_z} 5a dx + \int_0^{4a} \frac{(Y_A \cdot 5a - F \cdot 2a - Fx)}{EI_z} 5a dx = \\ &= \frac{Y_A}{EI_z} \frac{x^3}{3} \Big|_0^{3a} + \frac{Y_A}{EI_z} \left(9a^2 x + 6a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} - \frac{F}{EI_z} \left(3a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} + \frac{25a^2 Y_A}{EI_z} x \Big|_0^{4a} - 10Fa^2 x \Big|_0^{4a} + \frac{25a^2 Y_A}{EI_z} x \Big|_0^{4a} - \\ &- \frac{10a^2 F}{EI_z} x \Big|_0^{4a} - \frac{5aF}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{4a} = \frac{1}{EI_z} \left(\frac{725a^3}{3} Y_A - \frac{386a^3}{3} F \right) = 0 \end{aligned}$$

Ca urmare, reacțiunea:

$$Y_A = \frac{386}{725} F = 0,532 F.$$

b) Metoda forțelor (Mohr_Maxwell)

În cazul acestei metode în primă fază se alege necunoscuta care se dorește a fi determinate. După alegerea necunoscutei se construiește Sistemul Static de Bază (SSB) realizat din sistemul inițial la care se „rupe” legătura în care este necunoscuta care se dorește a fi calculate. Alegând tot forța Y_A se „rupe” legătura din A , rezultând SSB din figura 5.11.

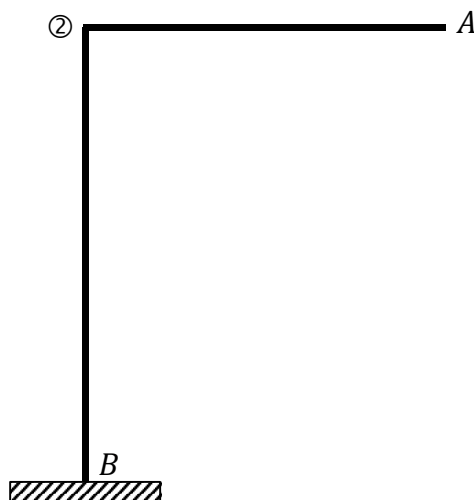


Figura 5.11

În continuare, pe SSB, se pun, pe rând, încărcarea reală (Figura 5.12) și o forță unitară 1 în punctul și pe direcția reacțiunii ce urmează a fi determinată (Figura 5.13).

Se vor scrie momentele reale de încovoiere M_{iF} , pentru încărcarea din figura 5.12 și momentul încovoiitor unitar m_{i1} , pentru încărcarea din figura 5.13.

Calculul deformării în punctul A ține cont că valoarea deplasării este zero ($v_A = 0$) și se face pe baza ecuației:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

unde $X_1 = Y_A$ reprezintă necunoscuta, δ_{11} reprezintă factorul de influență al reacțiunii Y_A (cu cât influențează reacțiunea Y_A deplasarea din punctul A) iar Δ_{1F} reprezintă influența pe care o are încărcarea reală asupra aceleiași deplasări din punctul A .

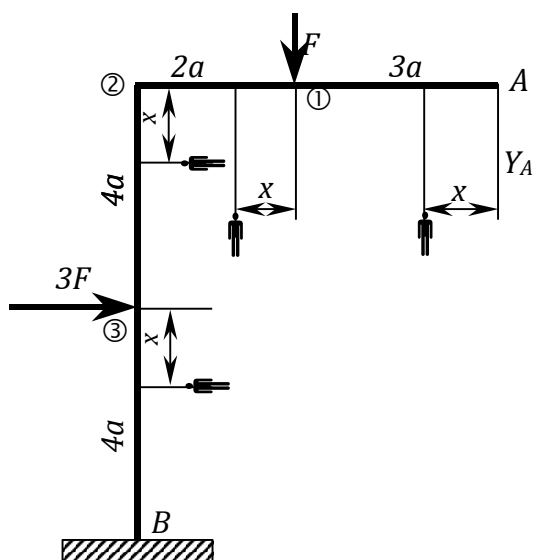


Figura 5.12

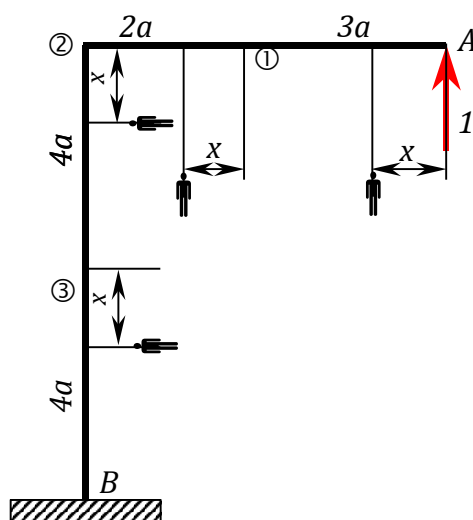


Figura 5.13

Pe baza figurilor 5.12 și 5.13 se scriu următoarele relații pentru cele două momente:

Interval	M_{iF}	m_{i1}	Limite
$A \div ①$	0	$1 \cdot x$	$0 \div 3a$
$① \div ②$	$-Fx$	$1 \cdot (3a + x)$	$0 \div 2a$
$② \div ③$	$-F \cdot 2a$	$1 \cdot 5a$	$0 \div 4a$
$③ \div B$	$-F \cdot 2a - Fx$	$1 \cdot 5a$	$0 \div 4a$

Factorii de influență se calculează astfel:

$$\begin{aligned}\delta_{11} &= \sum \int_0^l \frac{m_{i1} \cdot m_{i1}}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^{3a} (1x)(1x) dx + \frac{1}{EI_z} \int_0^{2a} [1 \cdot (3a+x)][1 \cdot (3a+x)] dx + \frac{1}{EI_z} \int_0^{4a} 5a \cdot 5a dx + \\ &+ \frac{1}{EI_z} \int_0^{4a} 5a \cdot 5a dx = \frac{1}{EI_z} \left[\frac{x^3}{3} \Big|_0^{3a} + \left(9a^2x + 6a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} + 25a^2x \Big|_0^{4a} + 25a^2x \Big|_0^{4a} \right] = \frac{725a^3}{3EI_z} \\ \Delta_{1F} &= \sum \int_0^l \frac{M_{iF} \cdot m_{i1}}{EI_z} dx = \frac{1}{EI_z} \int_0^l 0 \cdot (1x) dx + \frac{1}{EI_z} \int_0^l (-Fx) \cdot 1 \cdot (3a+x) dx + \frac{1}{EI_z} \int_0^l (-2Fa) \cdot 1 \cdot 5a dx + \\ &+ \frac{1}{EI_z} \int_0^l (-2Fa - Fx) \cdot 1 \cdot 5a dx = -\frac{F}{EI_z} \left(3a \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2a} - \frac{10Fa^2x}{EI_z} \Big|_0^{4a} - \frac{10Fa^2x}{EI_z} \Big|_0^{4a} - \frac{5Fa}{EI_z} \frac{x^2}{2} \Big|_0^{4a} = \frac{386Fa^3}{3EI_z}\end{aligned}$$

Introducând valorile de mai sus în ecuația: $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$, obținem:

$$\frac{725a^3}{3EI_z} X_1 - \frac{386Fa^3}{3EI_z} = 0,$$

de unde rezultă: $X_1 = Y_A = \frac{386}{725} F = 0,532F$.

Exemplul 5.4

Se consideră sistemul de bare din figura 5.14 la care se cunosc: $\sigma_a = 160 \text{ MPa}$, $A = 100 \text{ mm}^2$, $l = 1000 \text{ mm}$ și $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ MPa}$. Se cere să se determine:

- forțele din cele 5 bare (N_1 , N_2 , N_3 , N_4 și N_5);
- forța capabilă F_{cap} din condiția de rezistență la tracțiune/compresiune ($\sigma_{\max} \leq \sigma_a$);
- deformarea barelor.

Bara	Aria	Lungimea	Modulul de elasticitate longitudinal
1	A	l	E
2	A	l	E
3	$2A$	l	E
4	A	l	E
5	A	l	E

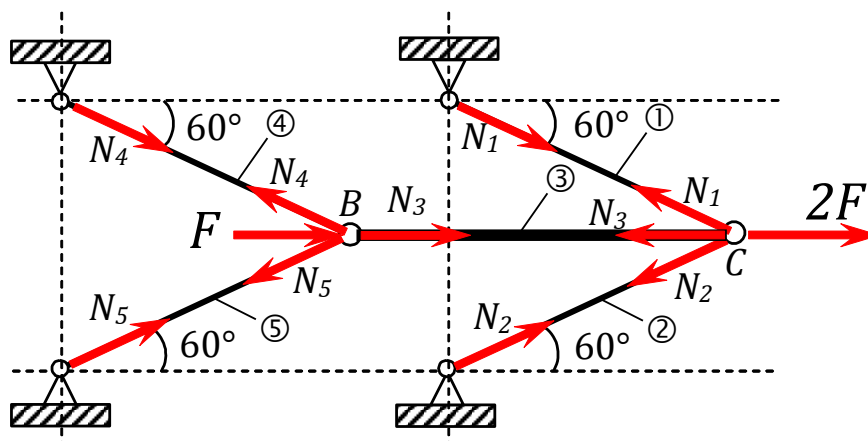


Figura 5.14

Rezolvare:

- a) în fiecare din barele sistemului, urmare a încărcării din punctele B și C , apar forțe axiale de reacțiune: N_1 , N_2 , N_3 , N_4 și N_5 (figura 5.14).

Considerând cele cunoscute din Mecanică, în punctele B și C pot fi scrise ecuațiile de echilibru static rezultând faptul că sistemul este o dată static nedeterminat (figura 5.15):

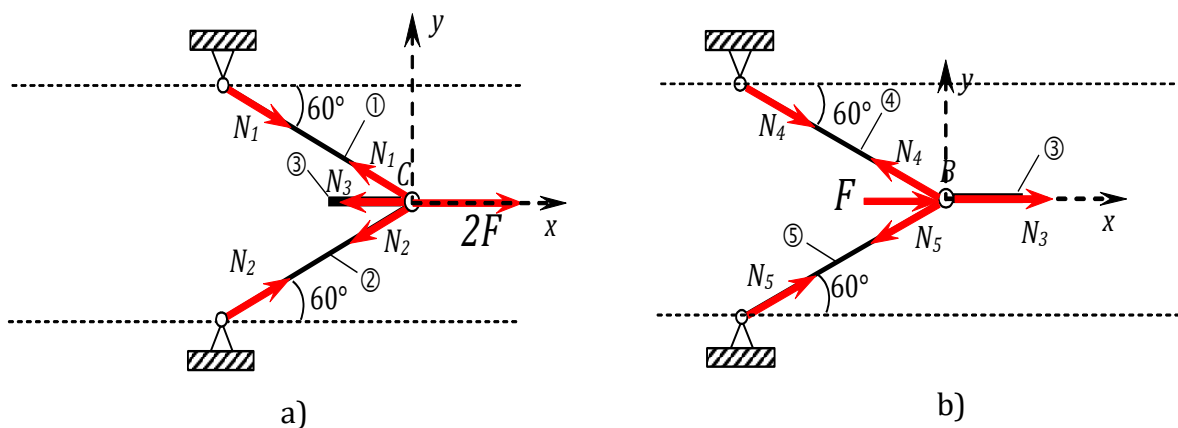


Figura 5.15

- Pentru sistemul din figura 5.15,a:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & N_1 \cos 60^\circ + N_2 \cos 60^\circ + N_3 = 2F; \\ \sum Y = 0; & N_1 \sin 60^\circ - N_2 \sin 60^\circ = 0; \end{cases}$$

- Pentru sistemul din figura 5.15,b:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & N_4 \cos 60^\circ + N_5 \cos 60^\circ - N_3 = 2F; \\ \sum Y = 0; & N_4 \sin 60^\circ - N_5 \sin 60^\circ = 0; \end{cases}$$

Se alege drept mărime static nedeterminată care urmează a fi găsită forța din bara ③, N_3 . Ca urmare, ecuația prin care se determină necunoscuta va fi:

$$\delta_{31}X_3 + \Delta_{3F} = 0$$

unde componentele sunt:

$$\delta_{31} = \sum \frac{n_{i1}n_{i1}l_i}{E_iA_i}, \quad X_3 = N_3, \quad \Delta_{3F} = \sum \frac{N_i n_{i1}l_i}{E_iA_i}$$

Pentru început, pe sistemul de bază se introduc, în punctele B și C , forțe unitare ($n_{31}=1$) pe direcția necunoscutei N_3 (figura 5.16) și se calculează componentele: n_{11} , n_{21} , n_{41} și n_{51} ;

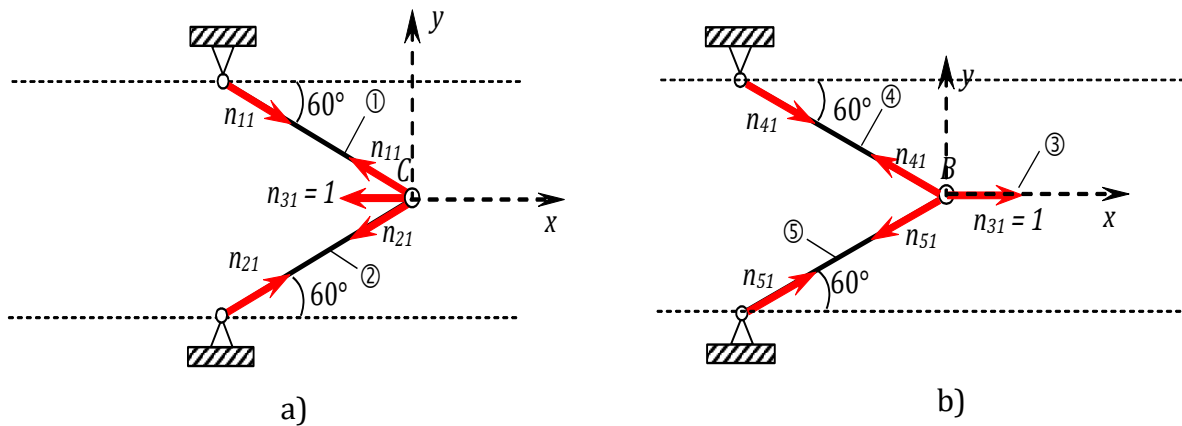


Figura 5.16

- Pentru sistemul din figura 5.16,a:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & n_{11} \cos 60^\circ + n_{21} \cos 60^\circ + n_{31} = 0; \\ \sum Y = 0; & n_{11} \sin 60^\circ - n_{21} \sin 60^\circ = 0; \end{cases}$$

de unde rezultă: $n_{11} = n_{21} = -1$;

- Pentru sistemul din figura 5.16,b:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & n_{41} \cos 60^\circ + n_{51} \cos 60^\circ - n_{31} = 0; \\ \sum Y = 0; & n_{41} \sin 60^\circ - n_{51} \sin 60^\circ = 0; \end{cases}$$

de unde rezultă: $n_{41} = n_{51} = 1$;

Pe sistemul static de bază se introduce încărcările reale rezultând în bare forțele de reacțiune: N_{1F} , N_{2F} , N_{4F} și N_{5F} (figura 5.17)

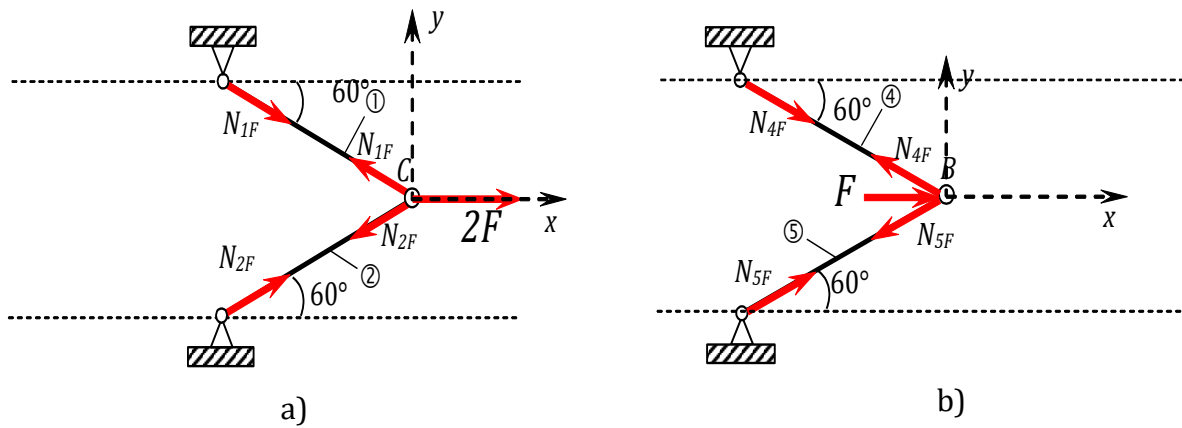


Figura 5.17

- Pentru sistemul din figura 5.17,a:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & N_{1F} \cos 60^\circ + N_{2F} \cos 60^\circ = 2F; \\ \sum Y = 0; & N_{1F} \sin 60^\circ - N_{2F} \sin 60^\circ = 0; \end{cases}$$

de unde rezultă: $N_{1F} = N_{2F} = 2F$

- Pentru sistemul din figura 5.17,b:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & N_{4F} \cos 60^\circ + N_{5F} \cos 60^\circ = F; \\ \sum Y = 0; & N_{4F} \sin 60^\circ - N_{5F} \sin 60^\circ = 0; \end{cases}$$

de unde rezultă: $N_{4F} = N_{5F} = F$

În continuare se calculează componentele ecuației:

$$\delta_{31} = \sum \frac{n_{i1} n_{i1} l_i}{E_i A_i} = \sum \frac{n_{i1}^2 l_i}{E_i A_i} = \frac{(-1)^2 l}{EA} + \frac{(-1)^2 l}{EA} + \frac{(1)^2 l}{2EA} + \frac{(1)^2 l}{EA} + \frac{(1)^2 l}{EA} = \frac{9l}{2EA}$$

$$\Delta_{3F} = \sum \frac{N_i n_{i1} l_i}{E_i A_i} = \frac{2F(-1)l}{EA} + \frac{2F(-1)l}{EA} + \frac{F(1)l}{EA} + \frac{F(1)l}{EA} = -\frac{2Fl}{EA}$$

Se rezolvă ecuația: $\frac{9l}{2EA} X_3 - \frac{2Fl}{EA} = 0,$

de unde rezultă: $N_3 = X_3 = \frac{4F}{9}$

și apoi: $N_1 = N_2 = \frac{14F}{9}$ și $N_4 = N_5 = \frac{13F}{9}$

b) Se calculează tensiunile effective pentru fiecare bară în parte:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{14F}{9A} \leq \sigma_a, \text{ de unde rezultă: } F \leq \frac{9A\sigma_a}{14} = \frac{9 \cdot 100 \cdot 160}{14} = 10.285,71 N$$

$$\sigma_4 = \sigma_5 = \frac{13F}{9A} \leq \sigma_a, \text{ de unde rezultă: } F \leq \frac{9A\sigma_a}{13} = \frac{9 \cdot 100 \cdot 160}{13} = 11.076,92 N$$

$$\sigma_3 = \frac{4F}{9A} \leq \sigma_a, \text{ de unde rezultă: } F \leq \frac{9A\sigma_a}{4} = \frac{9 \cdot 100 \cdot 160}{4} = 36.000 N$$

Din analiza valorilor de mai sus, se alege $F_{cap} = 10.285,71 N$.

c) Alungirile celor cinci bare sunt:

$$\Delta l_1 = \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{E_1 A_1} = \frac{N_2 l_2}{E_2 A_2} = \frac{14 F l}{9 E A} = \frac{14 \cdot 10.285,71 \cdot 1000}{9 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,762 mm$$

$$\Delta l_4 = \Delta l_5 = \frac{N_4 l_4}{E_4 A_4} = \frac{N_5 l_5}{E_5 A_5} = \frac{13 F l}{9 E A} = \frac{13 \cdot 10.285,71 \cdot 1000}{9 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 100} = 0,820 mm$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 l_3}{E_3 A_3} = \frac{4 F l}{9 E 2 A} = \frac{4 \cdot 10.285,71 \cdot 1000}{9 \cdot 2,1 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 100} = 0,108 mm$$

Exemplul 5.5

Se consideră sistemul de bare din figura 5.18 la care se cunosc: $A=600mm^2$, $l=1000mm$ și $E=2 \cdot 10^5 MPa$, $F=100kN$. Una din bare este mai scurtă cu o cantitate $\delta=0,3 mm$. Se cere să se determine:

- forțele din cele 3 bare ($N_{1\delta}$, $N_{2\delta}$ și $N_{3\delta}$) dezvoltate urmare a prinderii barei mai scurte de articulație;
- forțele din cele 3 bare (N_1^F , N_2^F și N_3^F) dezvoltate urmare a aplicării forței F ;
- forțele totale finale.

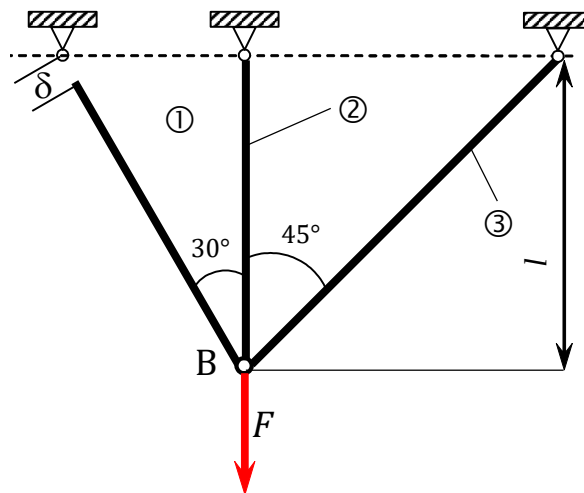


Figura 5.18

Rezolvare:

- a) Se consideră cazul în care forța F nu este aplicată și se anulează imperfecțiunea barei ①. Ca urmare, în cele trei bare se vor dezvolta forțele axiale: $N_{1\delta}$, $N_{2\delta}$ și $N_{3\delta}$ (figura 5.19).

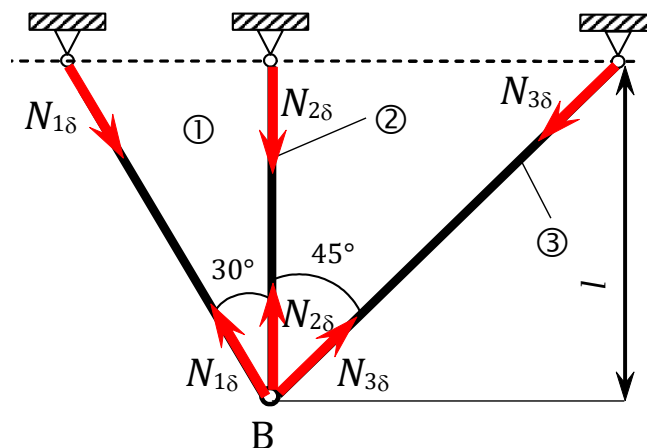


Figura 5.19

Aplicând ecuațiile de echilibru scrise în nodul B rezultă:

$$\begin{cases} \sum X=0; N_{1\delta} \sin 30^\circ = N_{3\delta} \sin 45^\circ; \\ \sum Y=0; N_{1\delta} \cos 30^\circ + N_{3\delta} \cos 45^\circ + N_{2\delta} = 0. \end{cases}$$

Așa cum rezultă, există un număr de două necunoscute (forțele din bare $N_{1\delta}$, $N_{2\delta}$ și $N_{3\delta}$) putându-se scrie numai două ecuații de echilibru static. Ca urmare, sistemul este o data static nedeterminat.

Se alege ca necunoscută ce se dorește a fi determinate forța $N_{1\delta}$ din bara ①. Ținând cont de deformarea sistemului se poate scrie ecuația:

$$\delta_{11}X_1 = \delta$$

Alegând ca necunoscută forța $N_{1\delta}$ sistemul static de bază devine cel din figura 5.20,a obținut prin „tăierea” barei ①. În punctul B pe direcția forței necunoscute $N_{1\delta}$ se introduce o forță unitară $n_{11}=1$ și se determină forțele unitare n_{21} și n_{31} :

$$\begin{cases} \sum X=0; n_{11} \sin 30^\circ = n_{31} \sin 45^\circ; \\ \sum Y=0; n_{11} \cos 30^\circ + n_{31} \cos 45^\circ + n_{21} = 0. \end{cases}$$

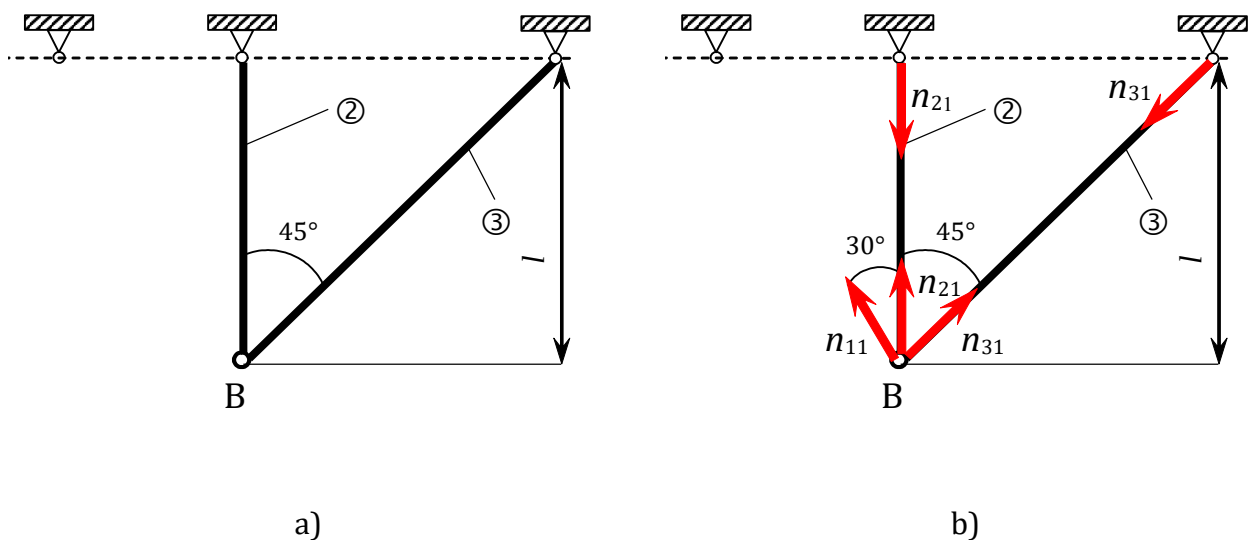


Figura 5.20

Din prima ecuație rezultă: $\frac{1}{2} \cdot n_{11} = \frac{\sqrt{2}}{2} n_{31}$,

de unde obținem: $n_{31} = 0,707$.

Din a doua ecuație se obține: $n_{21} = -n_{11} \cos 30^\circ - n_{31} \cos 45^\circ = -1,573$.

Ținând cont de geometria sistemului, lungimile celor trei bare sunt:

$$l_1 = \frac{l}{\cos 30^\circ} = 1,154l, \quad l_2 = l, \quad l_3 = l\sqrt{2} = 1,414l$$

Pe baza celor de mai sus, se obține:

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{n_{i1}^2 l_i}{E_i A_i} = \frac{l}{EA} [1^2 \cdot 1,154 + (-1,573)^2 \cdot 1 + 0,707^2 \cdot 1,414] = \frac{4,335l}{EA}$$

Înlocuind în ecuația de echilibru elastic, rezultă:

$$X_1 = N_{1\delta} = \frac{\delta}{\delta_{11}} = \frac{\delta \cdot E \cdot A}{4,335 \cdot l} = \frac{0,3 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 600}{4,335 \cdot 1000} = 8.304,49 \text{ N}$$

Din ecuațiile de echilibru obținem:

$$N_{3\delta} = N_{1\delta} \frac{\sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = 5.873,05 \text{ N și } N_{2\delta} = -N_{1\delta} \cos 30^\circ - N_{3\delta} \cos 45^\circ = -11.343,93 \text{ N}$$

Pe baza forțelor axiale determinate mai sus, tensiunile din fiecare bară vor fi:

$$\sigma_{1\delta} = \frac{N_{1\delta}}{A} = \frac{8.304,49}{600} = 13,84 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{2\delta} = \frac{N_{2\delta}}{A} = \frac{-11.343,93}{600} = -18,90 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{3\delta} = \frac{N_{3\delta}}{A} = \frac{5.873,05}{600} = 9,78 \text{ MPa}$$

b) După compensarea imperfecțiunii de montaj se aplică forța F .

Ca și în situația precedent, în cele trei bare apar forțe de reacțiune, sistemul fiind static nedeterminat. Se consideră același sistem static de bază confiderându-se drept mărime necunoscută care se dorește a fi determinate forța din bara ① (N_{1F}). Sistemul este prezentat în figura 5.21.

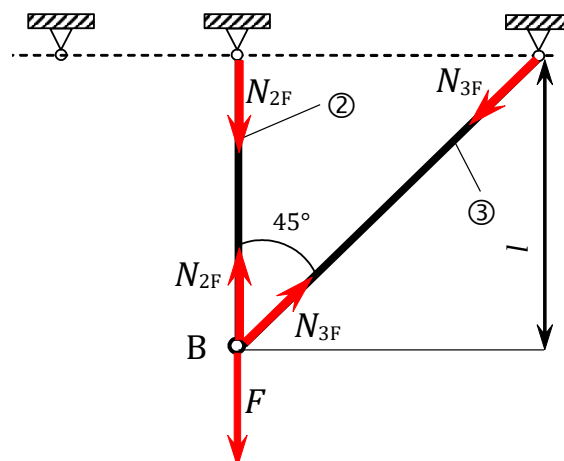


Figura 5.21

Din scrierea ecuațiilor de echilibru în nodul B , rezultând: $N_{2F} = F$; $N_{3F} = 0$, N_{1F} fiind egală cu zero.

Ecuația de calcul a metodei forțelor este:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1F} = 0$$

Componențele acestei ecuații fiind: $X_1 = N_1^F$ - forța din bara ①

$$\delta_{11} = \sum_{i=1}^3 \frac{n_{i1}^2 l_i}{E_i A_i} = \frac{l}{EA} [1^2 \cdot 1,154 + (-1,573)^2 \cdot 1 + 0,707^2 \cdot 1,414] = \frac{4,335l}{EA}$$

$$\Delta_{1F} = \sum \frac{N_{iF} n_{i1} l_i}{E_i A_i} = \frac{F(-1,573)l}{EA} + \frac{0(0,707)1,414l}{EA} = -\frac{1,573Fl}{EA}$$

Ca urmare, forța care apare în bara ① va fi egală cu:

$$\frac{4,335l}{EA} X_1 - \frac{1,573Fl}{EA} = 0,$$

de unde rezultă:
$$X_1 = N_1^F = \frac{1,573F}{4,335} = 0,362F = 36.277,6 \text{ N}$$

Celelalte două componente de din barele ② și ③ se determină cu relațiile:

$$N_2^F = N_{2F} + n_{21} X_1 = F - 1,573 \cdot 0,362F = 0,43F = 43.057,4 \text{ N}$$

$$N_3^F = N_{3F} + n_{31} X_1 = 0 + 0,707 \cdot 0,362F = 0,256F = 25.600 \text{ N}$$

Tensiunile care se dezvoltă vor fi:

$$\sigma_{1F} = \frac{N_1^F}{A} = \frac{36.277,6}{600} = 60,46 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{2F} = \frac{N_2^F}{A} = \frac{43.057,4}{600} = 71,76 \text{ MPa},$$

$$\sigma_{3F} = \frac{N_3^F}{A} = \frac{25.600}{600} = 42,60 \text{ MPa}.$$

c) Forțele totale din cele trei bare vor fi:

$$N_1 = N_{1\delta} + N_1^F = 8.304,49 \text{ N} + 36.277,6 \text{ N} = 44.582,09 \text{ N}$$

$$N_2 = N_{2\delta} + N_2^F = -11.343,93 \text{ N} + 43.057,4 \text{ N} = 31.713,47 \text{ N}$$

$$N_3 = N_{3\delta} + N_3^F = 5.873,05 \text{ N} + 25.600 \text{ N} = 31.473,05 \text{ N}$$

Corespunzător acestor forțe, tensiunile normale rezultante, din bare, sunt:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{44.582,09}{600} = 74,303 \text{ MPa},$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{31.713,47}{600} = 52,855 \text{ MPa},$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{31.473,05}{600} = 52,455 \text{ MPa}.$$

Exemplul 5.6

Se consideră sistemul de bare din figura 5.22 la care se cunosc: barele sunt de aceeași secțiune $A=400\text{mm}^2$, lungimea $l=1500\text{mm}$, $E=2 \cdot 10^5 \text{ MPa}$, $\sigma_a=120 \text{ MPa}$. Se cere să se determine:

- forțele din cele 3 bare (N_1 , N_2 și N_3) dezvoltate urmare a prinderii barei mai scurte de articulație;
- forța capabilă F_{cap} din condiția de rezistență ($\sigma_{max} \leq \sigma_a$);
- deplasările pe orizontală u_B și pe vertical v_B ale punctului B .

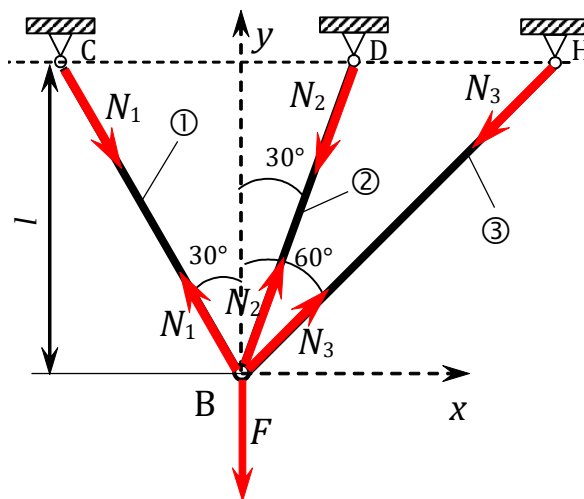


Figura 5.22

- Din scrierea ecuațiilor de echilibru în nodul B rezultă:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 30^\circ + N_3 \sin 60^\circ = 0; \\ \sum Y = 0; & N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 30^\circ + N_3 \cos 60^\circ = F; \end{cases}$$

Din ecuațiile de echilibru rezultă că există trei necunoscute N_1 , N_2 și N_3 și două ecuații de echilibru. Ca urmare, sistemul este static nedeterminat.

Se alege ca mărime necunoscută care urmează a fi determinată forța N_2 , din bara ②. Se consideră faptul că deplasarea în articulația din punctual D este zero și se scrie ecuația:

$$\delta_{21}X_2 + \Delta_{2F} = 0,$$

în care, $X_2 = N_2$, iar componentele δ_{21} și Δ_{2F} vor fi determinate cu ajutorul Sistemului Static de Bază (SSB).

Considerând ca mărime necunoscută, care urmează a fi determinate, forța N_2 , SSB se obține din sistemul inițial la care se „rupe” legătura necunoscutei, adică este înlăturată bara ② (figura 5.23).

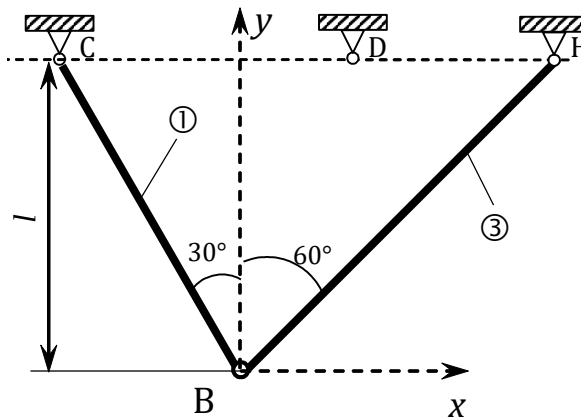


Figura 5.23

În continuare, pe SSB vor fi aplicate, pe rând, o forță unitară în nodul B, pe direcția forței N_2 (figura 5.24,a) și forța F (figura 5.24,b).

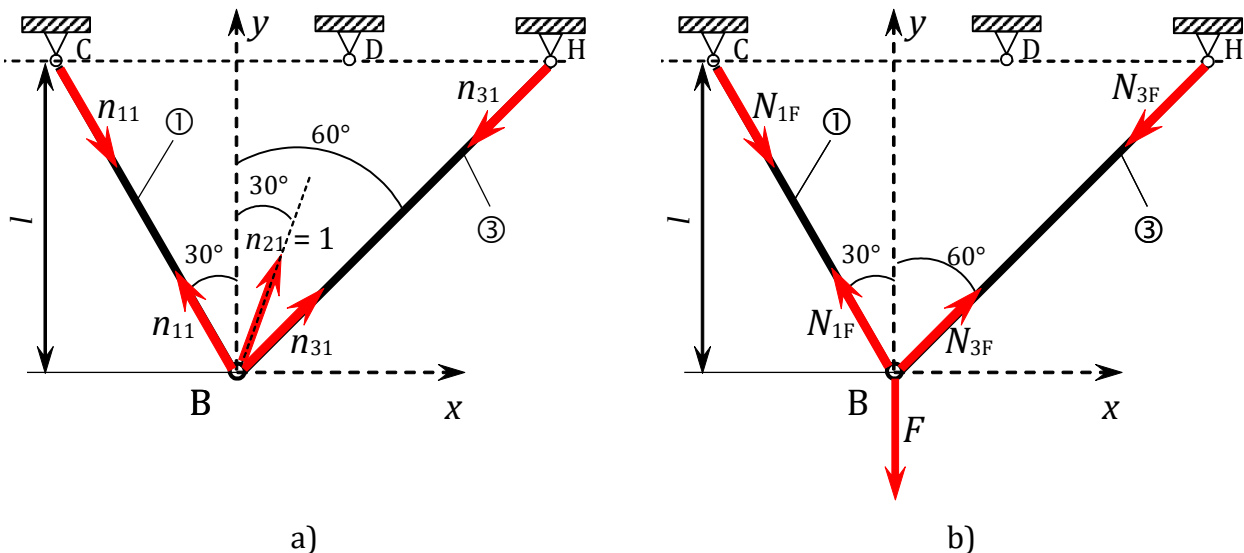


Figura 5.24

Scriind ecuațiile de echilibru corespunzător sistemului de forțe unitare din figura 5.24,a rezultă:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -n_{11} \sin 30^\circ + n_{21} \sin 30^\circ + n_{31} \sin 60^\circ = 0; \\ \sum Y = 0; & n_{11} \cos 30^\circ + n_{21} \cos 30^\circ + n_{31} \cos 60^\circ = 0; \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -0,5 \cdot n_{11} + 0,866 \cdot n_{31} = -0,5; \\ \sum Y = 0; & 0,866 \cdot n_{11} + 0,5 \cdot n_{31} = -0,866; \end{cases}$$

rezultând valorile:

$$n_{11} = -0,5, \quad n_{21} = 1, \quad n_{31} = -0,866$$

Scriind ecuațiile de echilibru corespunzător sistemului de forțe din figura 5.24,b rezultă:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -N_{1F} \sin 30^\circ + N_{3F} \sin 60^\circ = 0; \\ \sum Y = 0; & N_{1F} \cos 30^\circ + N_{3F} \cos 60^\circ = F; \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -0,5 \cdot N_{1F} + 0,866 \cdot N_{3F} = 0; \\ \sum Y = 0; & 0,866 \cdot N_{1F} + 0,5 \cdot N_{3F} = F; \end{cases}$$

rezultând valorile:

$$N_{1F} = 0,866 F, \quad N_{2F} = 0, \quad N_{3F} = 0,5 F$$

Lungimile celor trei bare sunt:

$$l_1 = l_2 = \frac{l}{\cos 30^\circ} = 1,154 l, \quad l_3 = \frac{l}{\cos 60^\circ} = 2l;$$

Coefficienții din ecuația de echilibru elastic sunt:

$$\delta_{21} = \sum \frac{n_{i1}^2 l_i}{E_i A_i} = \frac{(-0,5)^2 \cdot 1,154 l}{EA} + \frac{(1)^2 \cdot 1,154 l}{EA} + \frac{(-0,866)^2 \cdot 2l}{EA} = \frac{2,942 l}{EA}$$

$$\Delta_{2F} = \sum \frac{N_{iF} n_{i1} l_i}{E_i A_i} = \frac{0,866 F \cdot (-0,5) \cdot 1,154 l}{EA} + \frac{0 \cdot 1 \cdot 1,154 l}{EA} + \frac{0,5 F \cdot (-0,866) \cdot 2l}{EA} = -\frac{1,365 F l}{EA}$$

Introducând coeficienții de mai sus în ecuația de echilibru elastic, rezultă:

$$\frac{2,942 l}{EA} X_2 - \frac{1,365 F l}{EA} = 0$$

din care se obține:

$$X_2 = N_2 = 0,464F$$

Celelalte două componente de din barele ① și ③ se determină cu relațiile:

$$N_1 = N_{1F} + n_{11}X_2 = 0,866F - 0,5 \cdot 0,464F = 0,634F$$

$$N_3 = N_{3F} + n_{31}X_2 = 0,5F - 0,866 \cdot 0,464F = 0,098F$$

b) În continuare, se scrie condiția de rezistență pentru fiecare bară, în parte:

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{0,634F}{A} \leq \sigma_a, \text{ de unde rezultă: } F_{cap} \leq 1,577\sigma_a A$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{0,464F}{A} \leq \sigma_a, \text{ de unde rezultă: } F_{cap} \leq 2,155\sigma_a A$$

$$\sigma_3 = \frac{N_3}{A} = \frac{0,098F}{A} \leq \sigma_a, \text{ de unde rezultă: } F_{cap} \leq 10,204\sigma_a A$$

rezultând: $F_{cap} \leq 1,577\sigma_a A = 1,577 \cdot 120 \cdot 400 = 75.696 \text{ N}$

c) Pentru determinarea deplasărilor punctului B se vor introduce forțe unitare pe SSB, pe direcțiile orizontală, pentru u_B (figura 5.25,a), și vertical, pentru v_B (figura 5.25,b).

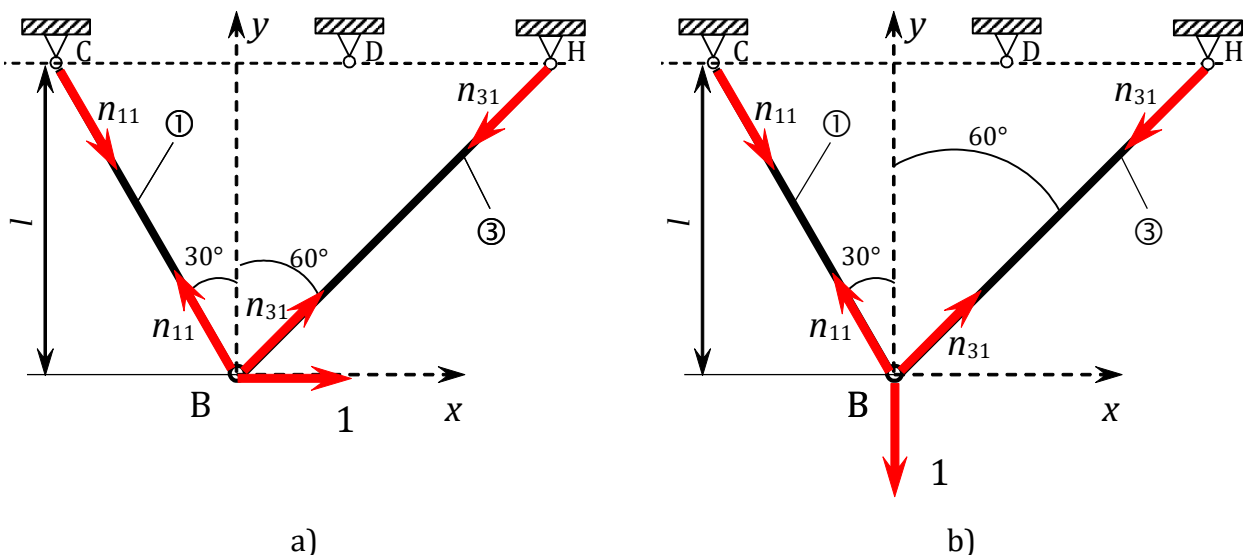


Figura 5.25

Se calculează noile valori pentru forțele unitare din cele două bare ① și ③.

Scriind ecuațiile de echilibru corespunzător sistemului de forțe unitare din figura 5.25,a rezultă:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -n_{11} \sin 30^\circ + n_{31} \sin 60^\circ + 1 = 0; \\ \sum Y = 0; & n_{11} \cos 30^\circ + n_{31} \cos 60^\circ = 0; \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -0,5 \cdot n_{11} + 0,866 \cdot n_{31} = -1; \\ \sum Y = 0; & 0,866 \cdot n_{11} + 0,5 \cdot n_{31} = 0; \end{cases}$$

rezultând valorile:

$$n_{11} = 0,5 \text{ și } n_{31} = -0,866$$

Deplasarea pe orizontală a punctului B este egală cu:

$$u_B = \sum \frac{N_i n_{i1} l_i}{E_i A_i} = \frac{0,634F \cdot 0,5 \cdot 1,154l}{EA} + \frac{0,098F \cdot (-0,866) \cdot 2l}{EA} = \frac{0,196Fl}{EA}$$

Înlocuind cu valori numerice, se obține:

$$u_B = \frac{0,196 \cdot 75.696 \cdot 1.500}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0,278 \text{ mm}$$

Scriind ecuațiile de echilibru corespunzător sistemului de forțe unitare din figura 5.25,b rezultă:

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -n_{11} \sin 30^\circ + n_{31} \sin 60^\circ = 0; \\ \sum Y = 0; & n_{11} \cos 30^\circ + n_{31} \cos 60^\circ = 1; \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} \sum X = 0; & -0,5 \cdot n_{11} + 0,866 \cdot n_{31} = 0; \\ \sum Y = 0; & 0,866 \cdot n_{11} + 0,5 \cdot n_{31} = 1; \end{cases}$$

rezultând valorile: $n_{11} = 0,866$, $n_{31} = 0,5$

Deplasarea pe orizontală a punctului B este egală cu:

$$v_B = \sum \frac{N_i n_{i1} l_i}{E_i A_i} = \frac{0,634F \cdot 0,866 \cdot 1,154l}{EA} + \frac{0,098F \cdot 0,5 \cdot 2l}{EA} = \frac{0,731Fl}{EA}$$

Înlocuind cu valori numerice, se obține:

$$v_B = \frac{0,731 \cdot 75.696 \cdot 1.500}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 1,037 \text{ mm}$$

Observație:

Prin aplicarea forțelor unitare, în punctul B , într-un anumit sens s-a presupus că deplasarea ar fi în sensul respective. Ca urmare, dacă valoarea obținută este pozitivă concluzia este că deplasarea este în sensul forței unitare aplicată.

Deplasarea totală a punctului B este:

$$\Delta_B = \sqrt{u_B^2 + v_B^2} = \sqrt{0,278^2 + 1,037^2} = 1,073 \text{ mm}$$

STABILITATEA STATICĂ A BARELOR DREPTE ZVELTE

6

6.1. Introducere

Elementele structurale care sunt încărcate cu sarcini de compresiune pot fi împărțite în două tipuri, în funcție de lungimile lor relative și de dimensiunile transversale:

- a) Bare scurte și groase, definite drept coloane care, de obicei, se distrug prin zdrobire atunci când tensiunea admisibilă de compresiune a materialului este depășită;
- b) coloane lungi și subțiri sau tije care cedează și flambează cu puțin timp înainte de a fi atinsă tensiunea admisibilă de compresiune.

Barele foarte lungi și de secțiune mică (subțiri) sunt definite a fi bare zvelte. În cazul barelor zvelte, sub acțiunea forțelor de compresiune, acestea pot să-și piardă forma inițială de echilibru. Forma de echilibru pe care o au barele zvelte, sub acțiunea eforturilor de compresiune poate fi stabilă sau instabilă. Stabilitatea/instabilitatea statică a barelor zvelte se referă la poziția deformată a unui sistem elastic ca stare de echilibru sub acțiunea statică a unor forțe exterioare cunoscute.

O bară zveltă este stabilă dacă în poziție deformată printr-o acțiune externă perturbatoare, aceasta se deformează mai mult dar revine la forma inițială deformată, când acțiunea perturbatoare încetează. Dacă după acțiunea perturbației bara nu revine în poziția inițială, atunci sistemul este instabil.

Pierderea stabilității sistemelor deformabile (bare zvelte, plăci etc.) sub acțiunea încărcărilor se numește **flambaj**.

Flambajul barelor zvelte poate avea loc din mai multe dintre următoarele motive:

- a) bara nu este perfect dreaptă în poziție inițială, de montaj;
- b) încărcarea nu este aplicată exact de-a lungul axei barei;

- c) în cazul barelor compuse din mai multe componente, realizate din materiale diferite, este posibil ca materialul uneia din componente să aibă o tensiune admisibilă inferioară celorlalte și să cedeze;

Pericolul cel mai mare în cazul fenomenului de flambaj îl reprezintă apariția bruscă a deformațiilor mari, aspect care poate avea ca și consecință directă ruperea barei.

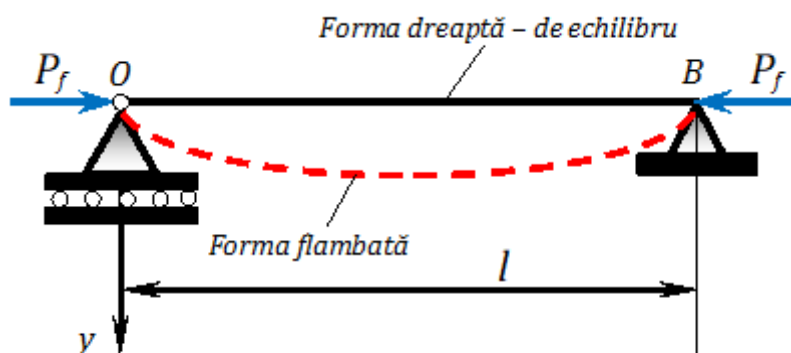


Figura 6.1

Se consideră bara dreaptă din figura 6.1 solicitată la compresiune de forțele P . În bară se dezvoltă tensiuni normale negative ($\sigma < 0$) prezentând pericolul dezvoltării fenomenului de flambaj.

În cazul în care, forța P atinge o valoare egală cu forța critică de flambaj P_f , bara își va pierde forma dreaptă de echilibru și flambează. Bara se va încovoia apărând deformații foarte mari (figura 6.1). Forței critice de flambaj îi corespunde o tensiune critică de flambaj σ_f , care se calculează conform relației:

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A}, \quad (6.1)$$

unde A este aria secțiunii transversale.

În cazul în care, asupra barei acționează o forță P mai mică decât forța critică de flambaj P_f , atunci bara nu va mai flamba. Legătura dintre încărcarea P și forța critică de flambaj P_f este dată de coeficientul de flambaj c_f , prin relația:

$$P = \frac{P_f}{c_f} \quad (6.2)$$

Coeficientul de flambaj c_f are valori supraunitare acestea fiind stabilite în funcție de pericolozitatea pe care o au, în funcționare, diferite tije componente ale echipamentelor industriale și nu numai.

Valorile coeficientului de siguranță sunt cu atât mai mari cu cât piesele au o importanță crescută în asigurarea siguranței în funcționare.

Echilibrul unei bare drepte zvelte comprimate poate fi de două feluri:

- a) echilibru stabil, caz în care $P < P_f$, bara după deformare revenind la forma inițială în momentul în care cauza perturbatoare încetează;
- b) echilibru instabil $P > P_f$ bara rămâne deformată în momentul în care cauza perturbatoare încetează;

Cel mai mare pericol al flambajului îl reprezintă faptul că se produce brusc neexistând posibilitatea luării în avans a unor măsuri de prevenire. Fenomenul se petrece în special la construcții metalice, de tip grinzi cu zăbrele, sau la sisteme de susținere.

Pentru analiza fenomenului de flambaj au fost elaborate elaborate o serie de teorii aproximative pe baza cărora sunt determinate mărimile care definesc starea de flambaj.

Calculul la flambaj se realizează scriind relațiile de echilibru pentru starea deformată, ținându-se cont de condițiile de legătură ale barelor. Calculul se realizează pe baza teoriei de ordinul II, caz în care se admite expresia aproximativă a curburii.

6.2. Forța critică de flambaj a barei drepte solicitată la compresiune

6.2.1. Considerații generale

Relația de calcul a forței critice de flambaj, pentru o bară dreaptă comprimată, a fost calculată prima dată de L. Euler (1744). Determinarea acestei forțe a fost realizată prin metoda statică.

Determinarea acestei forțe ține cont de tipul de legături existente la capetele barelor. Pornind de la considerente practice, provenite din realitatea înconjurătoare, au stabilite patru cazuri de legături (figura 6.2):

- a) cazul I - bară încastrată la un capăt și liberă la celălalt (figura 6.2,a);
- b) cazul II (caz fundamental) - bară articulată la ambele capete (figura 6.2,b);
- c) cazul III - bară articulată la un capăt și încastrată la celălalt (figura 6.2,c);
- d) cazul IV - bară încastrată la ambele capete (figura 6.2,a).

Metoda statică este o metodă analitică de determinare a forței critice de flambaj bazată pe ecuația aproximativă a fibrei medii deformate:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \cong -\frac{M_i}{EI}. \quad (6.3)$$

din care rezultă:

$$M_i = -EI \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (6.4)$$

Pornind de la această ecuație, prin integrare și considerarea condițiilor de legătură de la capete (figura 6.2), pentru fiecare caz în parte, rezultă o anumită formă deformată și o formulă de calcul a forței critice de flambaj.

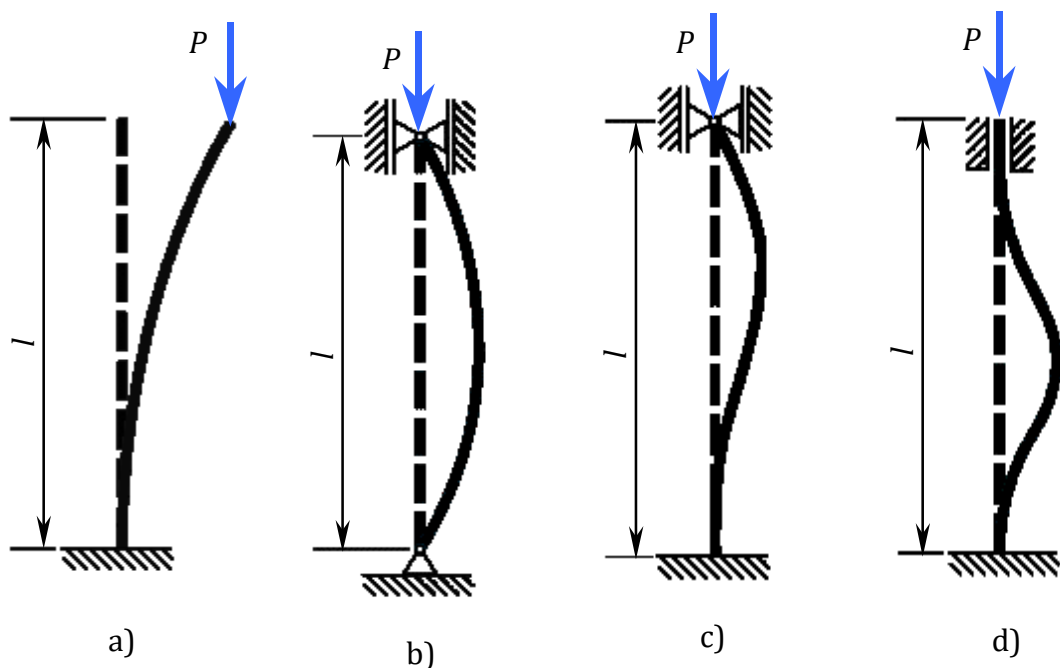


Figura 6.2

În calcule se admit următoarele ipoteze de calcul:

- modulul de rigiditate EI este constant;
- distanța dintre cele două capete ale barei este aproximativ egală în starea flambată cu lungimea inițială a barei;
- greutatea barei este neglijată.

6.2.2. Cazul fundamental (cazul II – figura 6.2,b)

Se consideră bara din figura 6.3 articulată la ambele capete la capete. Bara este comprimată cu forța critică de flambaj P_f .

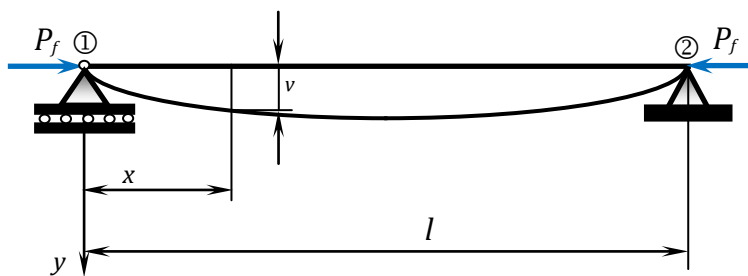


Figura 6.3

Urmare a acțiunii forței P_f bara se va deforma intrând în stare flambată. Ca urmare a acțiunii forței, la o distanță oarecare x , față de articulația din punctul ①, bara se deformează foarte mult, valoarea săgeții fiind v . Ca urmare, în punctul respectiv se va dezvolta un moment încovoiător generat de forța P_f :

$$M_i = P_f \cdot v \quad (6.5)$$

unde v reprezintă săgeata, foarte mare, a deformării barei.

Introducând relația momentului de încovoiere din (6.5) în relația (6.4) rezultă ecuația:

$$P_f \cdot v = -EI \frac{d^2v}{dx^2},$$

de unde rezultă:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \frac{P_f v}{EI} = 0. \quad (6.6)$$

Pentru ușurința în calcul se va face notația:

$$\frac{P_f}{EI} = \alpha^2 \quad (6.7)$$

și, ca urmare, ecuația diferențială (6.7) devine:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \alpha^2 v = 0, \quad (6.8)$$

având soluția de forma:

$$v = A \sin(\alpha \cdot x) + B \cos(\alpha \cdot x) \quad (6.9)$$

unde, A și B sunt două constante care pot fi determinate din condițiile de legătură din articulațiile ① și ②:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow v=0; \\ x=l \Rightarrow v=0. \end{cases} \quad (6.10)$$

Pe baza condițiilor de legătură (6.10), pentru cele două constante, rezultă următoarele valori:

$$\text{a) din prima condiție din (6.10)} \Rightarrow B = 0; \quad (6.11)$$

$$\text{b) din a doua condiție din (6.10)} \Rightarrow A \sin(\alpha \cdot l) = 0. \quad (6.12)$$

Valoarea constantei A trebuie să fie diferită de zero ($A \neq 0$), altfel nexistând flambaj.

Ca urmare, rezultă că pentru a fi îndeplinită cea de-a doua condiție (6.12) este necesar să avem:

$$\sin(\alpha \cdot l) = 0, \quad (6.13)$$

care conduce egalitatea:

$$\alpha \cdot l = n \cdot \pi \quad (6.14)$$

unde „ n ” este un număr pozitiv, întreg.

Din relația de egalitate (6.14) se obține:

$$\alpha = \frac{n \cdot \pi}{l} \quad (6.15)$$

iar din (6.7) rezultă relația de calcul a forței critice de flambaj:

$$P_f = \frac{n^2 \pi^2 EI}{l^2}. \quad (6.16)$$

Considerând în relația (6.16) valoarea $n=1$ rezultă starea flambată din figura 6.3.

În relația (6.16) pot fi considerate și alte valori pentru „ n ” ($n=2,3,4,\dots$), rezultând alte forțe de flambaj dar acestea nu se mai realizează atâta timp cât bara a flambat pentru forța critică de flambaj cea mai mica.

În relația (6.16), I reprezintă momentul de inerție axial central al secțiunii transversale care corespunde direcției față de care flambează bara.

În cazul în care, condițiile de legătură ale barei sunt identice în jurul tuturor axelor centrale ale secțiunii transversale, atunci în calcule trebuie considerat momentul de inerție axial central minim al secțiunii transversale.

Flambajul se produce în jurul acelei axe centrale, față de care bara prezintă rigiditatea minimă.

Ca urmare, relația (6.16) de calcul a forței critice de flambaj, în cazul fundamental, devine:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (6.17)$$

În cazul fundamental starea flambată corespunde unei semiunde, având lungimea egală, cu aproximație, cu cea a barei. Lungimea corespunzătoare unei semiunde, adică distanța dintre două puncte consecutive de inflexiune ale stării flambate, se numește lungime de flambaj.

Ca urmare, lungimea de flambaj este egală cu lungimea barei, iar relația (6.17) va avea forma:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2}, \quad (6.18)$$

unde, prin l_f s-a notat lungimea de flambaj.

6.2.3. Cazul unei bare încastrată la un capăt și liberă la celălalt (cazul I – figura 6.2,a)

Starea de încărcare și deformare, în acest caz, este prezentată în figura 6.4. Ca și în cazul precedent se ajunge la aceeași ecuație diferențială (6.8) cu soluția (6.9):

$$v = A \sin(\alpha \cdot x) + B \cos(\alpha \cdot x)$$

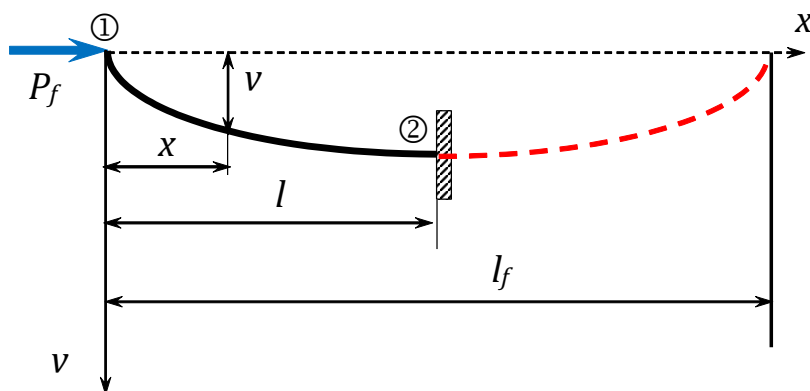


Figura 6.4

În acest caz, condițiile de legătură sunt:

$$\begin{cases} x=0 \Rightarrow v=0; \\ x=l \Rightarrow \frac{dv}{dx}=0. \end{cases} \quad (6.19)$$

Pe baza condițiilor de legătură (6.19), pentru constantele A și B rezultă următoarele valori:

$$\text{a) din prima condiție din (6.19)} \Rightarrow A = 0; \quad (6.20)$$

$$\text{b) din a doua condiție din (6.19)} \Rightarrow B \cos(\alpha \cdot l) = 0. \quad (6.21)$$

Valoarea constantei B trebuie să fie diferită de zero ($B \neq 0$), altfel neexistând flambaj.

Ca urmare, în relația (6.21) este necesar să fie îndeplinită condiția:

$$\cos(\alpha \cdot l) = 0, \quad (6.22)$$

din care se obține:

$$\alpha \cdot l = \frac{(2n-1) \cdot \pi}{2}, \quad (6.23)$$

unde „ n ” este un număr întreg, rezultând:

$$\alpha = \frac{(2n-1) \cdot \pi}{2l} \quad (6.24)$$

Combinând relațiile (6.7) și (6.24), pentru $n=1$ obținem:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2} \quad (6.25)$$

$$\text{în acest caz, lungimea de flambaj fiind: } l_f = 2l. \quad (6.26)$$

6.2.4. Cazul unei bare încastrată la un capăt și articulată la celălalt (cazul III – figura 6.2,c)

Se consideră bara din figura 6.5, articulată în punctul ① și încastrată în punctul ②.

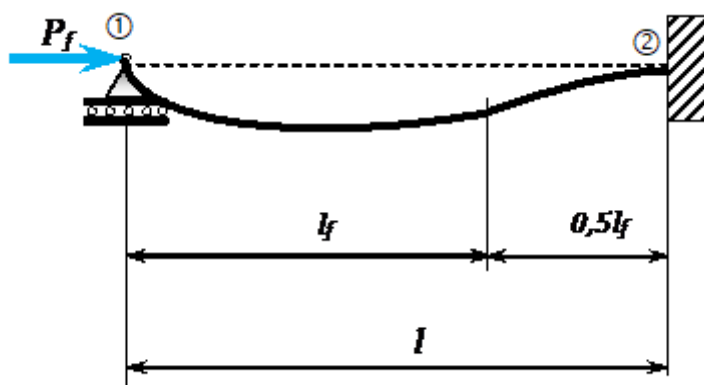


Figura 6.5

În acest caz lungimea de flambaj este considerate a fi egală cu:

$$l_f \cong 0,7l \quad (6.27)$$

iar forța critică de flambaj data de (6.18) devine:

$$P_f = \frac{2\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (6.28)$$

6.2.5. Cazul unei bare încastrată la ambele capete (cazul IV - figura 6.2,d)

Se consideră bara din figura 6.6, încastrată în ambele puncte ① și ②.

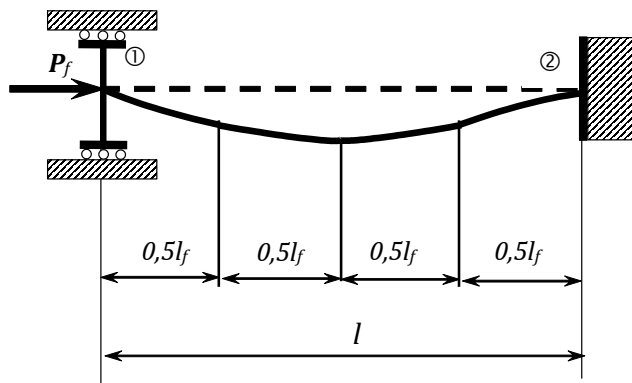


Figura 6.6

În acest caz, lungimea de flambaj este considerată a fi egală cu:

$$l_f = \frac{1}{2}l \quad (6.29)$$

iar forța critică de flambaj dată de (6.18) devine:

$$P_f = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (6.30)$$

6.2.6. Concluzii

Comparând valorile forțelor critice de flambaj și a lungimilor de flambaj, pentru toate cele patru cazuri, se poate sintetiza tabelul 6.1.

Tabelul 6.1

Mărime	Cazul de flambaj			
	I	II	III	IV
Forța critică de flambaj	$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{4l^2}$	$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$P_f = \frac{2\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$	$P_f = \frac{4\pi^2 EI_{\min}}{l^2}$
Lungimea de flambaj	$l_f = 2l$	$l_f = l$	$l_f \cong 0,7l$	$l_f = 0,5l$

Comparând relațiile de calcul ale forțelor critice de flambaj, din tabelul 6.1, rezultă următoarea relație de inegalitate:

$$P_{f,I} < P_{f,II} < P_{f,III} < P_{f,IV}.$$

Relația lui Euler poate fi generalizată, sub forma:

$$P_f = \pi^2 E \left(\frac{I}{l_f^2} \right)_{\min} \quad (6.31)$$

6.3. Domeniul de valabilitate al relației lui Euler

Pentru a bară cu aria secțiunii transversale egală cu A și tensiunea critică de flambaj σ_f , din ecuația (6.31) rezultă:

$$\sigma_f = \frac{P_f}{A} = \frac{\pi^2 E}{A} \left(\frac{I}{l_f^2} \right)_{\min} = \pi^2 E \left(\frac{i}{l_f} \right)_{\min}^2 = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\min}^2} \quad (6.32)$$

unde:

$$\lambda = \frac{l_f}{i}, \quad (6.33)$$

este definit a fi coeficientul de zvelteță, iar „ i ” este raza de inerție a secțiunii transversale.

Din relația (6.32) este evident că, în cazul în care bara este lungă și subțire (l_f/i este mare) atunci σ_f este mic. Ca urmare, coloanele de lungime mică și secțiune mare au un raport l_f/i mică și o valoare mare a lui σ_f . Valoarea maximă a coeficientului de zvelteță pentru o secțiune dată este:

$$\lambda_{\max} = \left(\frac{l_f}{i} \right)_{\max} = \frac{l_f}{i_{\min}}. \quad (6.34)$$

În figura 6.7 este prezentat un graphic al variației tensiunii σ_f în raport cu l_f/i pentru un material particular. Pentru o valoare l_f/i mai mică decât anumite valori particulare, care depend de material, o bară va flamba la o valoare a tensiunii mai mică decât cea considerate critică σ_f , determinate pe baza teoriei lui Euler.

În figura 6.7, cu linie continua este prezentată variația conform teoriei lui Euler iar cea cu linie punctată situația reală.

Din relația (6.32) rezultă că tensiunea critică de flambaj depinde atât de material (prin modulul de elasticitate longitudinal E) cât și de coeficientul de zvelteță.

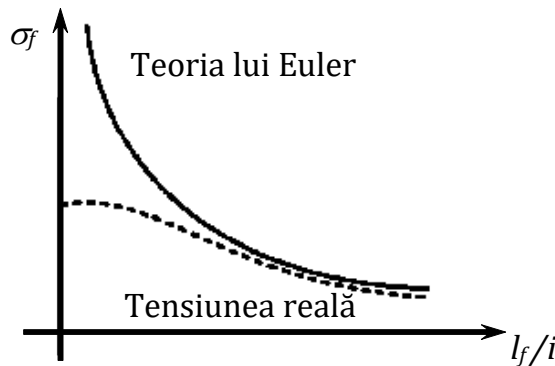


Figura 6.7

Relația lui Euler este valabilă numai pentru defomații din domeniul elastic (domeniu în care legea lui Hooke este valabilă).

Relația lui Euler poate fi utilizată numai dacă tensiunea critică de flambaj este mai mică comparativ cu tensiunea corespunzătoare limitei de proporționalitate σ_p :

$$\sigma_f = \frac{\pi^2 E}{\lambda_{\max}^2} \leq \sigma_p. \quad (6.35)$$

Pe baza relației (6.35) poate fi calculate coeficientul de zveltețe λ_0 care limitează domeniul de valabilitate a relației lui Euler:

$$\lambda_{\max} \geq \lambda_0 = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_p}} \quad (6.36)$$

Pornind de la relația (6.36) pot fi definite două cazuri de flambaj:

- $\lambda_{\max} > \lambda_0$, în acest caz flambajul este unul elastic iar fenomenul are loc conform relației lui Euler;
- $\lambda_{\max} < \lambda_0$, este cazul pentru care flambajul are loc în domeniul plastic iar relația lui Euler nu mai este valabilă.

Calculul la flambaj în domeniul plastic este realizat folosind diferite relații care au fost dezvoltate de diferiți autori: F. Iasinski, L. Tetmajer, M. Rankine, J. B. Johnson etc. La modul general, indiferent de autor, relațiile au una din următoarele forme:

$$\begin{cases} \sigma_f = a - b\lambda ; \\ \sigma_f = A + B\lambda + C\lambda^2 , \end{cases} \quad (6.37)$$

unde a, b, A, B, C sunt constante care depind de material.

În figura 6.8 sunt prezentate domeniile de calcul ale tensiunii critice de flambaj σ_f . În figura 6.8 sunt făcute următoarele notații: σ_a - tensiunea admisibilă (limita de elasticitate), σ_p - tensiunea de proporționalitate (limita de proporționalitate), σ_c - tensiunea de curgere (limita de curgere)

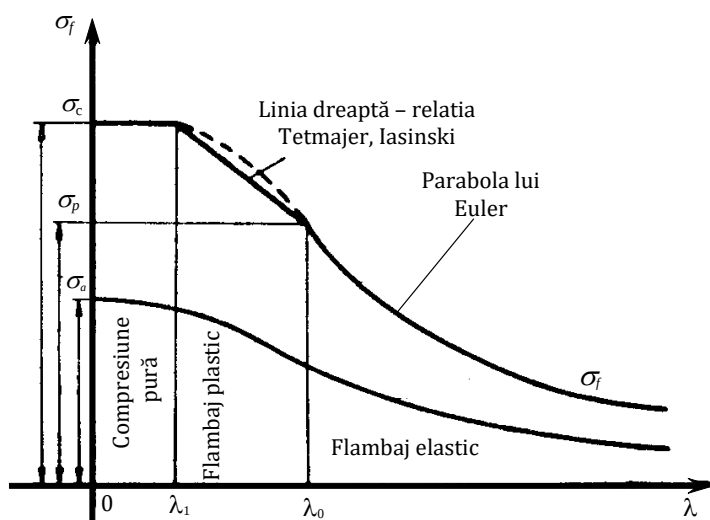


Figura 6.8

6.4. Procedura de rezolvare a problemelor de flambaj

Problemele de flambaj sunt orientate spre două aspect esențiale: probleme de verificare și probleme de dimensionare.

6.4.1. Probleme de verificare

În cazul acestor probleme se verifică dacă coeficientul de siguranță c_f este mai mare comparativ cu unul prescris c_p .

În primă fază se verifică domeniul de flambaj, pe baza datelor geometrice ale barei analizate. Ca urmare, se calculează valoarea coeficientului de zvelteță putând apărea următoarele situații:

- a) $\lambda > \lambda_0$, caz în care ne situăm în domeniul elastic fiind valabilă

relația lui Euler $P_f = \pi^2 E \left(\frac{I}{l_f^2} \right)_{\min}$ și bara este stabilă dacă

$$c_f = \frac{P_f}{P} \geq c_p;$$

- b) $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$, caz în care se folosește relația (6.37), forța de flambaj

fiind $P_f = \sigma_f A$ și este necesar să se verifice condiția $c_f = \frac{P_f}{P} \geq c_p$;

- c) $\lambda < \lambda_1$, este cazul în care există compresiune pură nefiind cazul de calcul de flambaj.

Exemplul 6.1

Se consideră bara din OL37, cu $\lambda_0 = 105$, de lungime $l = 3m$ și de secțiune circular de diametru $d = 80mm$ (figura 6.9). Bara este încastrată la un capăt și liberă la celălalt. Forța care acționează asupra barei este $P = 75kN$, coeficientul de siguranță prescris fiind $c_p = 7$. Se cere să se verifice bara la flambaj.

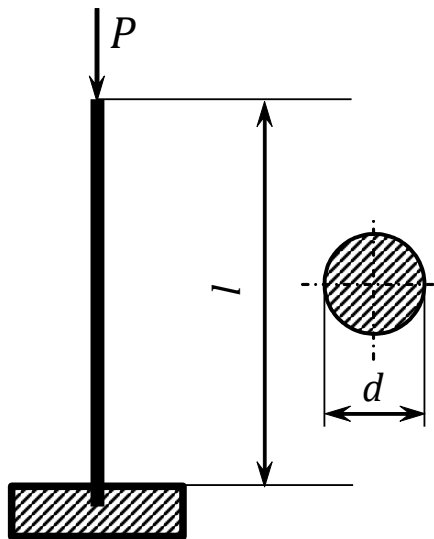


Figura 6.9

Rezolvare:

Pentru verificare este necesară calcularea coeficientului de flambaj c_f și compararea lui cu cel prescris c_p .

Primul pas în rezolvare este determinarea domeniului în care are loc flambajul barei. Pentru aceasta se calculează coeficientul de zveltețe λ al barei:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{\pi d^4}{64} \frac{4}{d^2}}} = \frac{l_f}{\frac{d}{4}} = \frac{4l_f}{d} = \frac{4l}{d} = \frac{4 \cdot 3000}{80} = 150 > \lambda_0.$$

Ca urmare a faptului că $\lambda > \lambda_0$ flambajul are loc în domeniul elastic, forța de flambaj calculându-se cu relația:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 80^4}{64 \cdot 3000^2} = 440.978,15(N).$$

Ținând cont de valorile lui P_f și P rezultă un coeficient de siguranță de:

$$c_f = \frac{P_f}{P} = \frac{440.978,15}{75 \cdot 10^3} = 5,879 < c_p,$$

ceea ce conduce la concluzia că bara nu este stabilă și trebuie mărită secțiunea. Se alege o valoare a diametrului $d=90mm$. Pentru aceasta se recalculează coeficientul de zveltețe:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{4 \cdot 3000}{90} = 133,33 > \lambda_0$$

Fenomenul de flambaj rămânând în domeniul elastic, forța de flambaj fiind acum:

$$P_f = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l_f^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot \pi \cdot 90^4}{64 \cdot 3000^2} = 706.361,74(N)$$

iar coeficientul de flambaj devine:

$$c_f = \frac{P_f}{P} = \frac{706.361,74}{75 \cdot 10^3} = 9,41 > c_p$$

Exemplul 6.2

Se consideră bara din OL50, cu $\lambda_0 = 89$, de lungime $l = 2m$ și de secțiune pătrată, cu latura $a = 60mm$ (figura 6.10). Bara este încastrată la un capăt și articulată la celălalt. Forța care acționează asupra barei este $P = 100kN$, coeficientul de siguranță prescris fiind $c_p = 9$, iar tensiunea de flambaj se calculează cu relația: $\sigma_f = 328,5 - 0,61\lambda$.

Se cere să se verifice bara la flambaj.

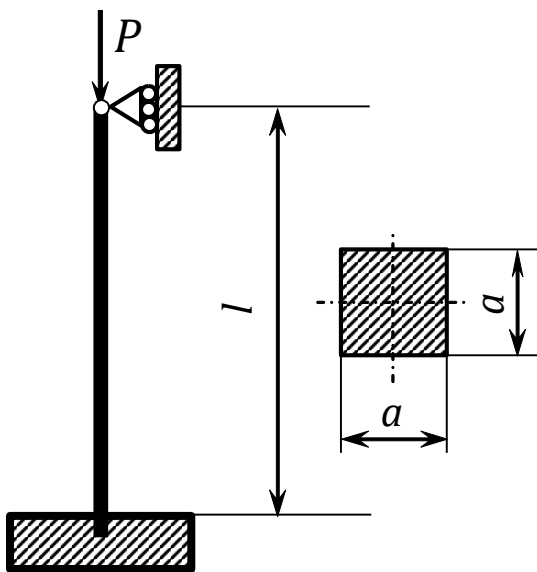


Figura 6.10

Rezolvare:

Pentru verificare este necesară calcularea coeficientului de flambaj c_f și compararea lui cu cel prescris c_p . Pentru început se determină domeniul în care are loc flambajul barei, calculându-se coeficientul de zveltețe λ al barei:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{I_z}{A}}} = \frac{l_f}{\sqrt{\frac{a^4 \cdot 1}{12 a^2}}} = \frac{0,7 \cdot l}{\sqrt{\frac{a^2}{12}}} = \frac{0,7 \cdot 2000}{\sqrt{\frac{60^2}{12}}} = 80,83 < \lambda_0.$$

Ca urmare, flambajul are loc în domeniul plastic și forța de flambaj se calculează cu relația:

$$P_f = \sigma_f A = (328,5 - 0,61 \cdot 80,83) \cdot 60^2 = 279,19 \cdot 3600 = 1.005.097,32(N)$$

Coeficientul de flambaj devine:

$$c_f = \frac{P_f}{P} = \frac{1.005.097,32}{100^5} = 10,05 > c_p.$$

Ca urmare bara este stabilă la flambaj.

6.4.2. Probleme de dimensionare

În acest caz se parcurg următorii pași:

Pasul 1 – se consideră, pentru început, că flambarea are loc în domeniul elastic. Astfel, se calculează momentul de inerție necesar:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l_f^2 \cdot c_p}{\pi^2 E}.$$

Pasul 2 – se determină din valoarea momentului de inerție minim $I_{\min}$, calculat la pasul 1, dimensiunile geometrice ale secțiunii transversale și se calculează coeficientul de zvelteșă λ corespunzător.

Pasul 3 – se compară coeficientul de zvelteșă cu valoarea λ_0 , care delimitează zona domeniului elastic. Există două situații:

- a) $\lambda > \lambda_0$, fenomenul de flambaj este în domeniul elastic și dimensionarea este considerată a fi finalizată iar dimensiunile secțiunii transversale calculate pot fi folosite în continuare;

- b) $\lambda_1 < \lambda < \lambda_0$, este necesar să fie verificat coeficientul de siguranță (se compară cel corespunzător dimensiunilor calculate cu cel prescris c_p). Dacă $c_f < c_p$ este necesar să se mărească dimensiunile secțiunii transversale până când coeficientul de siguranță c_f devine mai mare ca cel prescris c_p ;
- c) $\lambda < \lambda_1$, calculul se face pentru compresiune pură.

Exemplul 6.3

Se consideră bara din OL37, cu $\lambda_0=105$, de lungime $l=2m$ și de secțiune dreptunghilară, cu laturile a și $2a$ (figura 6.11). Bara este încastrată la ambele capete.

Forța care acționează asupra barei este $P=150kN$, coeficientul de siguranță prescris fiind $c_p=6$, iar tensiunea de flambaj se calculează cu relația: $\sigma_f=304,5-1,12\lambda$. Se cere să se dimensioneze.

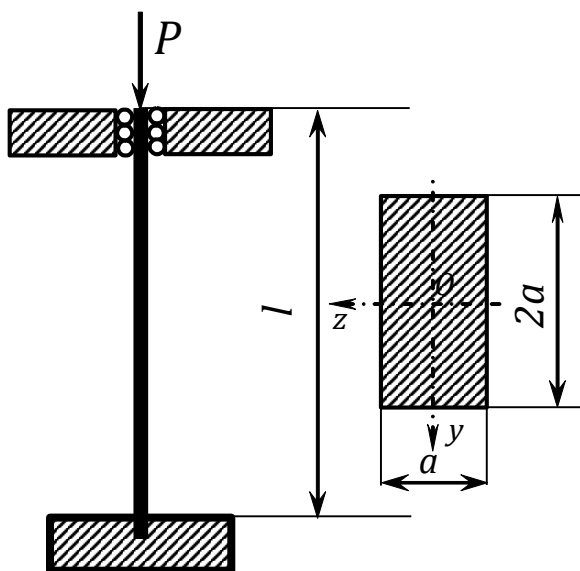


Figura 6.11

Rezolvare:

Calculul se pornește de la ipoteza flambajului în domeniul elastic. Pentru început, se calculează valoarea momentului de inerție minim:

$$I_{\min} = \frac{P \cdot l_f^2 \cdot c_p}{\pi^2 E} = \frac{150 \cdot 10^3 \cdot (0,5 \cdot 2000)^2 \cdot 6}{\pi^2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 455.945,32(\text{mm}^4).$$

În cazul secțiunii considerate, cele două momente de inerție axiale sunt:

$$I_z = \frac{a \cdot (2a)^3}{12} = \frac{8a^4}{12} \text{ și } I_y = \frac{2a \cdot (a)^3}{12} = \frac{2a^4}{12}$$

și ca urmare, momentul de inerție axial minim este I_y .

Pe baza valorilor calculate rezultă:

$$\frac{2a^4}{12} = 455.945,32(\text{mm}^4)$$

de unde se obține cota: $a = 40,67(\text{mm})$.

În continuare se calculează coeficientul de zvelteșă λ corespunzător:

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot l}{\sqrt{\frac{2a^4}{12} \cdot \frac{1}{2a^2}}} = \frac{0,5 \cdot 2000}{\sqrt{\frac{40,67^2}{12}}} = 85,175 < \lambda_0.$$

Ca urmare, ipoteza flambajului în domeniul elastic nu se verifică și se continuă calculul în domeniul plastic. Se calculează forța de flambaj ținând cont de valoarea coeficientului de zvelteșă obținut:

$$P_f = \sigma_f A = (304,5 - 1,12\lambda) \cdot 2a^2 = (304,5 - 1,12 \cdot 85,175) \cdot 2 \cdot 40,67^2 = 691.736,48(\text{N})$$

Coeficientul de siguranță la flambaj devine:

$$c_f = \frac{P_f}{P} = \frac{691.736,48}{15 \cdot 10^4} = 4,611 < c_p.$$

Deoarece coeficientul de siguranță obținut este mai mic comparative cu cel prescris, este necesar să se mărească secțiunea. Se alege o valoare $a=46\text{mm}$.

Se recalculează coeficientul de zveltețe:

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 2000}{\sqrt{\frac{46^2}{12}}} = 75,306 < \lambda_0,$$

flambajul are loc tot în domeniul plastic, forța de flambaj fiind:

$$P_f = \sigma_f A = (304,5 - 1,12\lambda) \cdot 2a^2 = (304,5 - 1,12 \cdot 75,306) \cdot 2 \cdot 46^2 = 931.705,61\text{(N)}$$

Coeficientul de siguranță la flambaj are noua valoare de:

$$c_f = \frac{P_f}{P} = \frac{931.705,61}{15 \cdot 10^4} = 6,21 > c_p.$$

Ca urmare bara este stabilă la flambaj.

6.5. Metoda tensiunii admisibile

Această metodă este folosită cu precădere pentru problem de verificare și pentru determinarea forței de flambaj critice admisibile P_f . În concordanță cu această metodă condiția de stabilitate este:

$$\frac{P_f}{A} \leq \sigma_{af} \quad (6.38)$$

unde tensiunea admisibilă de flambaj σ_{af} se calculează cu relația:

$$\sigma_{af} = \sigma_a \varphi, \quad (6.39)$$

unde φ este coeficientul de flambaj și σ_a este tensiunea admisibilă la compresiune a materialului.

Coeficientul de flambaj φ depinde de material și este specificat în tabele specializate.

Exemplul 6.4

Se consideră un stâlp realizat din OL37, încastrat la ambele capete, de înălțime $l=4m$ și de secțiune dreptunghilară, cu laturile a și $2a$, unde $a=90mm$ (figura 6.12). Tensiunea admisibilă este $\sigma_a=140MPa$.

Se cere să se determine forța capabilă prin metoda coeficientului de flambaj φ .

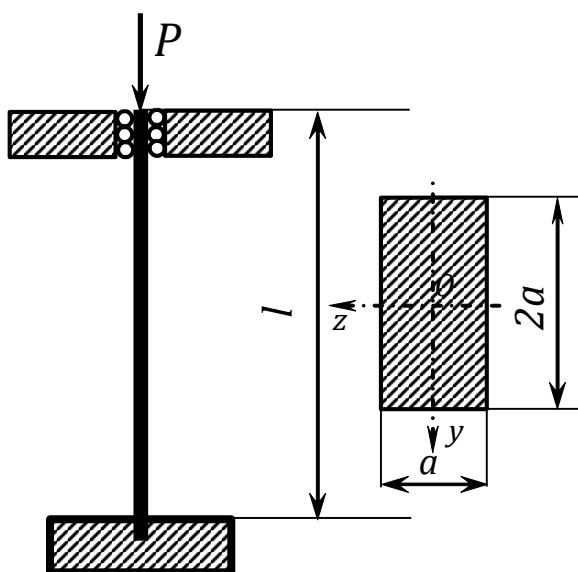


Figura 6.12

Rezolvare:

Forța de flambaj poate fi calculate cu relația: $P = \varphi \sigma_a A$.

Aria secțiunii stâlpului este: $A = 2a^2 = 2 \cdot 90^2 = 16200 [mm^2]$

Momentul de inerție axial minim este: $I_{\min} = I_y = \frac{2a \cdot a^3}{12} = \frac{a^4}{6} = 10,935 \cdot 10^6 mm^4$

Raza de inerție minimă este: $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{10,935 \cdot 10^6}{16,2 \cdot 10^3}} = 25,98 mm$

Coeficientul de zvelteță are valoarea: $\lambda = \frac{2000}{25,92} = 76,982$

În tabelele de specialitate există, pentru OL37 valori pentru coeficientul de flambaj φ corespunzătoare lui $\lambda=76$ și $\lambda=77$. Aceste valori sunt: $\varphi=0,713$, pentru $\lambda=76$ și $\varphi=0,709$, pentru $\lambda=77$.

Pentru determinarea valorii coeficientului de flambaj φ corespunzător coeficientului de zvelteță $\lambda = 76,982$ se aplică „o regulă de trei simplă” astfel:

- pentru o creștere a coeficientului de zvelteță de o unitate (77-76) variația coeficientului de flambaj φ este de -0,004 (0,713-0,709);
- ca urmare, la o creștere a coeficientului de avteță de 0,982 (76-76,982) creșterea variația coeficientului de flambaj este $\varphi = \frac{-0,004 \cdot 0,982}{1} = -0,003928$;
- valoarea coeficientului de flambaj este φ corespunzătoare coeficientului de zvelteță $\lambda = 76,982$ va fi: $\varphi = 0,713 - 0,003928 = 0,709072$.

Forța de flambaj va fi: $P = 0,709072 \cdot 140 \cdot 16.200 = 1.608.175,296 \text{ (N)}$.

SOLICITĂRI DINAMICE

7

7.1. Introducere

Solicitările statice se caracterizează prin aplicarea unei forțe constantă în timp, valoarea acesteia crescând de la valoarea nulă la cea maximă într-un interval suficient de mare în timp.

În cazul solicitărilor dinamice, valoarea lor este dependentă de timp și fiind însoțite de apariția unor accelerații. În funcție de modul de variație al acestor forțe și de accelerațiile care le însoțesc, aceste solicitări se împart în trei grupe:

- a) Solicitări produse de forțele de inerției acestea având accelerații constante sau cu o variație lentă;
- b) Solicitări produse de șocuri care sunt însoțite de variații bruște ale accelerațiilor (solicitări dinamice produse de ciocniri);
- c) Solicitări produse de forțe variabile, periodic, în timp. Astfel de solicitări sunt vibrațiile sistemelor elastice și calculul de rezistență la oboseală al organelor de mașini supuse solicitărilor variabile periodic în timp.

7.2. Solicitări produse de forțe de inerție

Analiza acestor sisteme se realizează pe baza principiului lui d'Alembert. Pe baza acestui principiu sunt considerate, pe lângă forțele date și cele existente în legături și forțele de inerție, în felul acesta problemele de dinamică se transformă în probleme de statică.

În cazul principiului lui d'Alembert sunt utilizate modele de calcul ale staticii fiind folosite ecuații de echilibru. Metoda poartă denumirea de metodă cineto-statică, având o mare răspândire în inginerie. Metoda se aplică fiecărui element de masă dm pentru care se cunoaște accelerația „ a ” cu care se deplasează. Pe baza celor cunoscute de la Mecanică, forța elementară de inerție dF_i a elementului de masă dm este:

$$dF_i = a \cdot dm. \quad (7.1)$$

Corpurile pot efectua două tipuri de mișcare:

- a) de translație - caz în care apare o forță de inerție rezultantă;
- b) de rotație cu axă fixă – caz în care momente de inerție rezultant.

În cazul mișcării de translație fiecare punct al corpului are aceeași accelerație și prin reducerea în centrul maselor se obține o rezultantă a forțelor de inerție elementare (7.1), care este egală cu produsul dintre masa și accelerația solidului în mișcare:

$$F_i = ma. \quad (7.2)$$

În cazul mișcării de rotație cu axă fixă cu o viteză unghiulară constantă ω , asupra elementului de masă dm , aflat la o distanță r de centrul de rotație, acționează două forțe, corespunzătoare direcțiilor normale și tangențiale:

- a) de-a lungul direcției normale - o forță elementară de inerție centrifugală, egală cu:

$$dF_c = r\omega^2 dm \quad (7.3)$$

unde:

$$r\omega^2 = a_r \quad (7.4)$$

reprezintă accelerația radială;

- b) de-a lungul direcției tangențiale – o forță elementară de inerție tangențială, egală cu:

$$dF_t = r\epsilon dm \quad (7.5)$$

unde: $r\omega^2 = a_t$, (7.6)

reprezintă accelerația tangențială.

Ca urmare, forța inerțială elementară va fi egală cu:

$$dF_i = \sqrt{dF_c^2 + dF_t^2} = r \left(\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2} \right) dm. \quad (7.7)$$

În cazul în care, centrul masei este situat pe axa de rotație, forțele de inerție elementare se reduc la un cuplu de inerție:

$$C_i = J\varepsilon \quad (7.8)$$

unde J reprezintă momentul de inerție al corpului solid față de axa de rotație.

7.2.1. Calculul cablului de ascensor

În figura 7.1 este prezentat un sistem format dintr-un corp de greutate Q (greutatea ascensorului), care este legat cu un cablu de greutate neglijabilă.

Când ascensorul pornește sistemul (ascensorul) are o accelerație a . Forța axială maximă se produce în momentul pornirii ascensorului în sus, moment în care, apare o forță de inerție F_i , care se opune deplasării masei Q :

$$F_i = ma = \frac{Q}{g}a \quad (7.9)$$

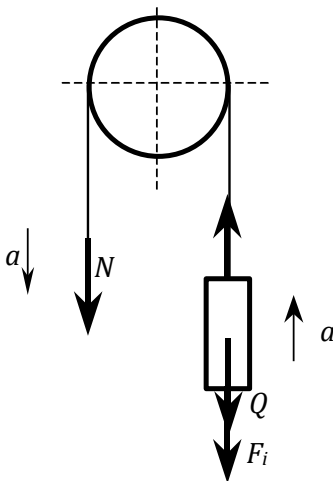


Figura 7.1

Din condiția de echilibru a forțelor care acționează asupra ascensorului, rezultă forța axială din cablu:

$$N = Q + F_i = Q \left(1 + \frac{a}{g} \right) = \psi Q \quad (7.10)$$

unde s-a notat cu ψ expresia coeficientului dinamic:

$$\psi = 1 + \frac{a}{g}. \quad (7.11)$$

Forței axiale dată de (7.10) îi corespunde o tensiune σ egală cu:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \psi \frac{Q}{A} = \psi \sigma_{st}, \quad (7.12)$$

în care, prin σ_{st} este tensiunea din cablu care se produce în cablu atunci când greutatea Q se află în stare de repaus (forța Q acționează static).

Condiția de rezistență impune ca tensiunea dată de (7.12) să fie mai mică ca cea admisibilă:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \psi \frac{Q}{A} = \psi \sigma_{st} \leq \sigma_a \quad (7.13)$$

7.2.2. Calculul volantului

Volanții, ca și elemente mecanice, au fost folosiți de la începuturile dezvoltării sistemelor mecanice servind la uniformizarea mișcării mașinilor având posibilitatea de a înmagazina o mare cantitate de energie cinetică.

Volanții au forma de roată cu obadă, spițe și butuc sau forma de disc plin, îngroșat în zona de fixare pe arbore și în zona periferică.



Figura 7.2

Volanții execută o mișcare de rotație cu axă fixă, în principal cu o viteză unghiulară ω constantă fiind dezvoltate forțe centrifuge, care ținând cont de direcția în care acestea acționează, determină apariția unor tensiuni normale σ .

Calculul tensiunilor normale poate fi făcut astfel:

- Prin calculul aproximativ, la care, în cazul existenței spițelor (figura 7.2), acestea sunt neglijate obada fiind considerată ca un inel subțire aflat în mișcare de rotație (figura 7.3,a);
- Prin calculul volantului considerat a fi disc în mișcare de rotație;
- Prin calculul volantului cu considerarea spițelor astfel încât volantul devine sistem static nedeterminat.

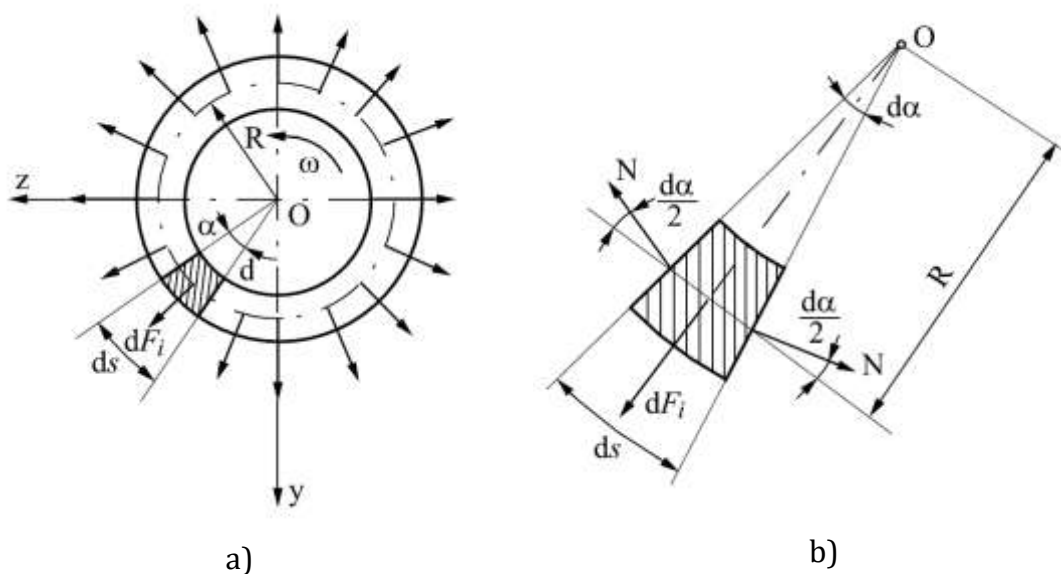


Figura 7.3

În cazul în care se consideră calculul aproximativ se admit următoarele ipoteze simplificatoare:

- a) masa spițelor este neglijabilă comparativ cu masa obadei;
- b) grosimea obadei este mică față de diametrul mediu $2R$ al volantului.

În calcul se consideră că volantul se rotește cu o turație constantă n [rot/min] căreia îi corespunde o viteză unghiulară:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} \text{ [rad/s]} \quad (7.14)$$

Forța centrifugală acționează în secțiunile transversale ca o forță de tracțiune care generează o tensiune normală.

Pentru calcul, se consideră un volant cu greutatea specifică γ a materialului din care este confecționat din care se izolează un element foarte mic, delimitat de un unghi elementar $d\alpha$ (figura 7.3,b) în care se dezvoltă o forță centrifugală egală cu:

$$dF_i = a_n \cdot dm = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 A \cdot d\alpha, \quad (7.15)$$

în care A este aria secțiunii transversale, iar g este accelerația gravitațională, a_n este accelerația normală, $a_n = \omega^2 R$.

Izolând elementul de obadă de lungime ds (figura 7.3,b), în secțiunile axiale se dezvoltă forțe axiale N , care mențin echilibrul elementului. Pe baza ecuației de echilibru, scrisă pentru proiecțiile forțelor pe direcție bidsectoarei unghiului $d\alpha$, rezultă:

$$dF_i - 2N \sin \frac{d\alpha}{2} = 0$$

sau:

$$dF_i = 2N \sin \frac{d\alpha}{2} \cong N d\alpha. \quad (7.16)$$

Considerând relațiile (7.15) și (7.16) se obține:

$$N = \frac{dF_i}{d\alpha} = \frac{\gamma}{g} R^2 \omega^2 A = \frac{\gamma}{g} A v^2, \quad (7.17)$$

unde v este viteza medie a obadei ($v = R\omega$).

Forței axiale N definită de relația (7.17) îi corespunde o tensiune normală σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\gamma}{g} v^2. \quad (7.18)$$

Pe baza relației (7.18) se poate concluziona faptul că tensiunea normală dezvoltată nu depinde de aria secțiunii transversale A și ca urmare dimensionarea nu poate fi făcută din condiții de rezistență.

Ceea ce se poate determina ca și parametru funcțional al volantului este viteza periferică v a acestuia ținând cont de materialul din care este confecționat acesta. Din (7.18) viteza periferică maximă este:

$$v \leq \sqrt{\frac{\sigma_a g}{\gamma}}. \quad (7.19)$$

Deformarea volantului poate fi determinată considerând relația de alungire:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} l = 2\pi \frac{\gamma}{g} \frac{v^2 R}{E} \quad (7.20)$$

în care prin l s-a considerat lungimea conturului circular al volantului $l = 2\pi R$.

Pe baza relației (7.20) poate fi calculată modificarea ΔR a razei:

$$\Delta R = \frac{\Delta l}{2\pi} = \frac{\sigma R}{E} = \frac{\gamma}{g} \frac{v^2 R}{E}. \quad (7.21)$$

7.2.3. Calculul barei în rotație

Se consideră bara dreaptă din figura 7.4, care are o mișcare de rotație cu o viteză unghiulară ω constantă în jurul unui punct. Bara are secțiune transversală variabilă $A(x)$, este realizată dintr-un material care are greutatea specifică γ și o forță orientată în lungul axei Ox egală cu Q .

Urmare a mișcării de rotație asupra barei acționează forțe centrifuge care solicită bara la întindere. Considerând bara ca sistem continuu, forța de inerție asociată unui element infinitezimal de lungime dx și de masă dm este:

$$dF_i = a \cdot dm = \omega^2 x \frac{\gamma}{g} A(x) dx \quad (7.22)$$

Forța axială la o distanță x este egală cu:

$$N(x) = \omega^2 R \frac{Q}{g} + \omega^2 \frac{\gamma}{g} \int_x^{l+r} A x dx, \quad (7.23)$$

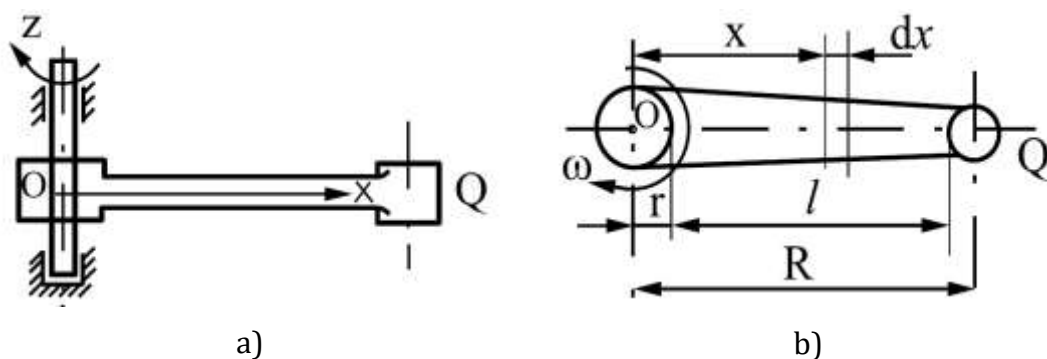


Figura 7.4

În cazul în care, bara este de secțiune constantă ($A = \text{const.}$), secțiunea periculoasă se află situată la îmbinarea barei cu bușa cilindrică de rază r , forța axială fiind:

$$N = \omega^2 R \frac{Q}{g} + \omega^2 \frac{\gamma}{g} A \int_r^{l+r} x dx = \frac{\omega^2}{g} \left\{ QR + \frac{\gamma A}{2} [(l+r)^2 - r^2] \right\}, \quad (7.24)$$

care generează o tensiune normală maximă, egală cu:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A} = \frac{\omega^2}{gA} \left\{ QR + \frac{\gamma A}{2} [(l+r)^2 - r^2] \right\}. \quad (7.25)$$

Analizând cazul barei de egală rezistență (pala elicei de la motorul avionului), din condiția de echilibru dinamic, scrisă pentru un element de bară, se obține:

$$-\sigma_a \cdot A(x) + dF_i + \sigma_a [A(x) + dA(X)] = 0 \quad (7.26)$$

de unde, ținând cont și de (7.22), rezultă:

$$\frac{dA(x)}{A(x)} = -\omega^2 \frac{\gamma}{g\sigma_a} \quad (7.27)$$

din care se obține:

$$\ln A(x) = -\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_a} x^2 + C. \quad (7.28)$$

Pentru determinarea constantei C se consideră $x=r$ din care rezultă:

$$C = \ln A_0 + \frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_a}, \quad (7.29)$$

unde A_0 este valoarea ariei secțiunii transversale pentru $x=r$.

Considerând relația (7.29) și combinând-o cu (7.28), după un calcul simplu rezultă:

$$A(x) = A_0 e^{\left[-\frac{\gamma \omega^2}{2g\sigma_a} (x^2 - r^2) \right]}. \quad (7.30)$$

Din relația (7.25) se poate calcula viteza unghiulară maximă ω astfel încât să nu fie depășită tensiunea normală maximă. Punând condiția de rezistență $\sigma_{\max} \leq \sigma_a$, în absența forței concentrate Q se obține:

$$\sigma_{\max} = \frac{\gamma R^2 \omega^2}{2g} \leq \sigma_a,$$

din rezultă viteza unghiulară maximă $\omega_{\max}$:

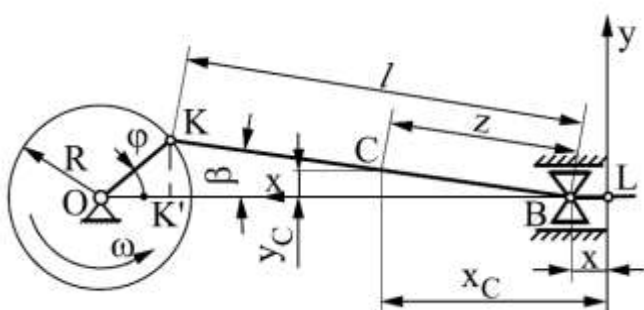
$$\omega_{\max} \leq \frac{1}{R} \sqrt{\frac{2g\sigma_a}{\gamma}}. \quad (7.31)$$

Din relația (7.31) se poate constata că viteza unghiulară maximă $\omega_{\max}$ depinde de proprietățile materialului barei, de lungimea ei dar nu depinde de aria secțiunii transversale.

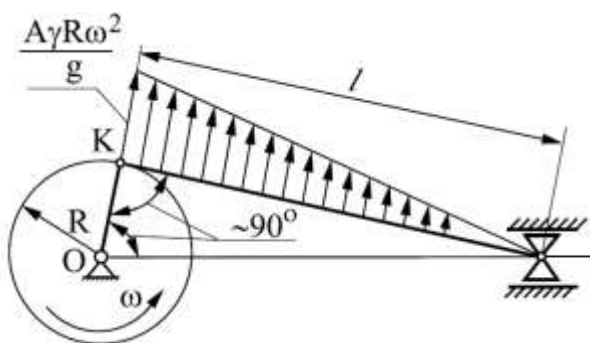
7.2.4. Calculul mecanismului bielă-manivelă

Mecanismul bielă-manivelă transformă mișcarea de rotație în mișcare de translație rectilinie sau invers, mișcarea de translație rectilinie în mișcare de rotație, una din aplicațiile de bază fiind cea a pistoanelor din motoarele cu ardere internă, caz în care mișcarea de translație liniară a pistonului este transferată către bielă fiind convertită în mișcare circulară a arborelui cotit. Cele două componente de bază sunt (figura 7.5,a):

- manivela – care execută o mișcare de rotație cu o viteză unghiulară ω , de dorit constantă;
- biela – execută o mișcare plană.



a)



b)

Figura 7.5

Pentru determinarea solicitărilor dinamice se consideră punctul K a cărui accelerație se poate calcula cu relația:

$$a_k = R \omega^2. \quad (7.32)$$

Accelerația unei secțiuni oarecare, situată la distanța z față de punctul C poate fi determinată cu relația:

$$a_z = R \omega^2 \frac{z}{l} \sin \varphi.$$

care are valoarea maximă pentru unghiul $\varphi = 90^\circ$:

$$a_c = R \omega^2 \frac{z}{l} \quad (7.33)$$

Ca urmare, forța elementară de inerție a elementului de bielă de lungime dz și masă elementară dm este:

$$dF_i = a_z dm = R \omega^2 \frac{z}{l} \frac{\gamma}{g} A dz. \quad (7.34)$$

Pe baza relației (7.34) se poate calcula forța de inerție pe unitatea de lungime dz (caracter de forță distribuită):

$$f_z = \frac{dF_i}{dz} = R \omega^2 \frac{\gamma}{g} \frac{z}{l} A. \quad (7.35)$$

Analizând relația (7.35), se poate observa că, în cazul în care secțiunea bielei este constantă ($A = \text{const.}$), forța de inerție pe unitatea de lungime f_x are o distribuție liniară de-a lungul lungimii. În acest caz, din (7.35), pentru $z = l$ se obține valoarea maximă:

$$f_{\max} = R \omega^2 \frac{\gamma}{g} A. \quad (7.36)$$

Momentul maxim se produce pentru distanța $z = l/\sqrt{3}$ rezultând:

$$M_{\max} = \frac{f_{\max} l^2}{9\sqrt{3}} = \frac{0,064 \gamma R \omega^2 l V}{g}, \quad (7.37)$$

unde prin V s-a notat volumul bielei.

Pornind de la relația (7.37) tensiunea maximă este:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} = \frac{0,064 \cdot \gamma \cdot R \cdot \omega^2 \cdot l \cdot V}{g \cdot W_z} \quad (7.38)$$

Așa cum rezultă din relația (7.38) tensiunea este direct proporțională cu ω^2 ceea ce face ca, la turații foarte mari tensiunea să fie mare. Având în vedere că biela este solicitată și în direcție axială se face un calcul suplimentar la flambaj.

7.3. Solicitări produse prin aplicarea bruscă a sarcinilor

În urma lovirii corpurilor solide, liniar-elastice, cu diferite obiecte se constată apariția a două stări, dinamice:

- a) o stare locală, în jurul punctului de lovire;
- b) o stare generală de tensiune.

Aplicarea bruscă a sarcinilor este definită și sub denumirea de încărcare cu șoc, timpul de aplicare fiind foarte scurt. Ca urmare, problemele în care se tratează starea de tensiuni și deformații a structurilor la care încărcarea este realizată prin șoc nu pot fi tratate prin metoda cineto-statică.

Studiul acestor probleme se realizează pe baza legii conservării energiei. Dacă un corp de masă m se află în mișcare de translație cu o viteză v , energia cinetică este egală cu:

$$E_c = \frac{mv^2}{2}, \quad (7.39)$$

iar dacă este într-o mișcare de rotație în jurul unei axe fixe, cu o viteză unghiulară ω și are un moment de inerție J , energia cinetică este:

$$E_c = \frac{J\omega^2}{2}. \quad (7.40)$$

În cazul în care același corp cade de la o înălțime oarecare h , energia potențială pe care o are în momentul căderii este:

$$E_p = mgh = Qh, \quad (7.41)$$

unde $Q = mg$ reprezintă greutatea corpului, iar g este accelerația gravitațională.

Ținând cont de faptul că sistemele se consideră conservative, în lipsa frecării sau în cazul existenței unei frecări cu un coeficient foarte mic, se poate admite că energia totală E_t rămâne constantă:

$$E_t = E_c + E_p. \quad (7.42)$$

În cazul unui corp care cade de la înălțimea H energia potențială dată de relația (7.41) urmare a conservării energiei, se transformă integral în energie cinetică:

$$E_c = L = Qh. \quad (7.43)$$

Pe baza relațiilor de calcul de mai sus, rezultă că un corp solid rezistă cu atât mai bine la șoc cu cât el este mai deformabil și ca urmare, la alegerea barelor supuse la șoc se aleg barele cu rigiditate mică.

7.3.1. Solicitări de întindere cu șoc

Se consideră o bară de lungime l și modul de rigiditate EA . O greutate Q este ghidată de-a lungul barei și cade perpendicular pe un platan montat la capătul barei. Urmare a ciocnirii rezultă o solicitare de întindere a barei, definită a fi întindere cu șoc (figura 7.6).

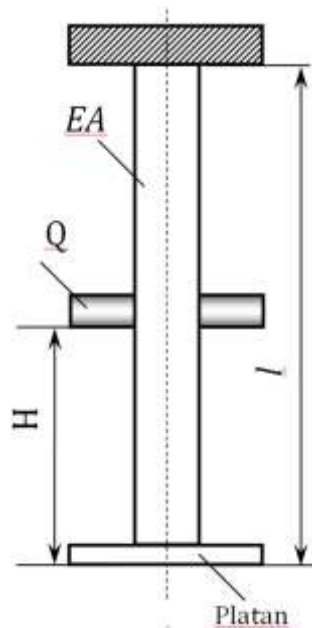


Figura 7.6

Considerând sistemul ca fiind conservativ rezultă că energia potențială pe care greutatea Q , la o înălțime oarecare H , se transformă integral în energie cinetică. Astfel se poate scrie relația:

$$E_c \cong E_p = Q \cdot H . \quad (7.44)$$

Considerând forța axială care apare ca fiind aproximativ constantă de-a lungul barei, energia de deformație a barei se poate calcula cu relația:

$$U = \frac{N \cdot l^2}{2EA} \quad (7.45)$$

Egalând energia dată de relația (7.44) cu energia potențială de deformație exprimată prin (7.45):

$$\frac{N^2 \cdot l}{2EA} = Q \cdot H$$

se obține:

$$N = \sqrt{\frac{2EAQ}{l}} \quad (7.46)$$

Tensiunea rezultantă este:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \sqrt{\frac{2QEH}{A \cdot l}} = \sqrt{\frac{2EH}{l}} \sigma_{st} , \quad (7.47)$$

unde $\sigma_{st} = Q/A$.

Ținând cont de relațiile cunoscute din Fizică: volumul barei - $V = A \cdot l$ și viteza în momentul ciocnirii - $v = \sqrt{2gh}$, relația (7.47) poate fi rescrisă și sub formele:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2QEH}{V}} = \sqrt{\frac{2E}{V} \frac{Qv^2}{2g}} \quad (7.48)$$

Pornind de la relația (7.46) lungirea produsă în urma solicitării cu șoc este egală cu:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A} = \sqrt{\frac{2QHl}{EA}} = \sqrt{2H \Delta l_{st}} . \quad (7.49)$$

Din analiza relațiilor de mai sus se pot trage următoarele concluzii:

- bara rezistă la șoc cu atât mai mult cu cât volumul ei este mai mare (7.48);
- tensiunea normală σ indusă în bară în urma șocului este cu atât mai mică cu cât bara este mai lungă (7.47);
- din concluzia de mai sus rezultă că pentru preluarea șocului este

bine să fie folosite șuruburi cât mai lungi (buloane elastice);

- tensiunea normală σ apărută urmare a șocului crește odată cu creșterea modului de elasticitate longitudinal E (7.47).

7.3.2. Solicități de compresie cu șoc

Se consideră o bară de secțiune variabilă, în formă de trunchi de con, având ariile bazelor A_1 și A_2 și înălțimea h (figura 7.7). De la o înălțime H , cade pe suprafața superioară (A_2), o greutate Q . Din condiția de sistem conservativ, rezultă că energia cinetică, în momentul șocului, este:

$$E_c = E_p = L_e = QH. \quad (7.50)$$

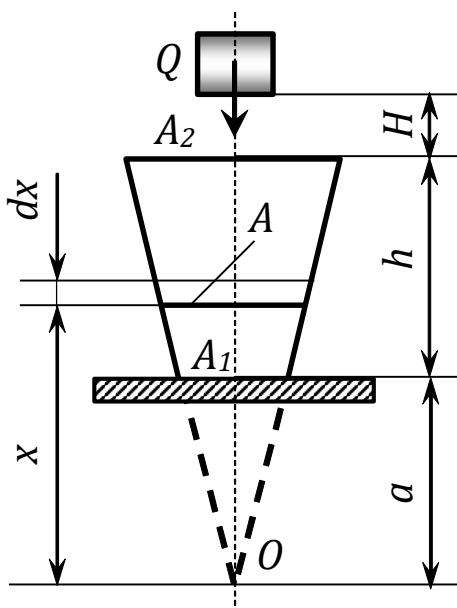


Figura 7.7

Energia acumulată în bara de secțiune variabilă se calculează cu expresia:

$$U = \int_0^h \frac{N^2}{2EA(x)} dx = \frac{N^2}{2E} \int_0^h \frac{1}{A(x)} dx \quad (7.51)$$

Considerând diametrele secțiunilor d_1 , pentru aria A_1 , d_2 , pentru aria A_2 și d_x , pentru aria A_x , pe baza asemănării pot fi scrise rapoartele:

$$\begin{cases} \frac{a}{x} = \frac{d_1}{d(x)}; \\ \frac{a}{a+h} = \frac{d_1}{d_2}. \end{cases} \quad (7.52)$$

Pe baza relațiilor de asemănare (7.52) pot fi scrise rapoartele:

$$\frac{A_1}{a^2} = \frac{A(x)}{x^2} = \frac{A_2}{(a+h)^2}, \quad (7.53)$$

din care rezultă:

$$\begin{cases} A_1 = \frac{a^2}{(a+h)^2} A_2; \\ A(x) = \frac{x^2}{(a+h)^2} A_2. \end{cases} \quad (7.54)$$

Din egalarea energiei de deformare cu energia cinetică rezultă expresia forței axiale dezvoltată, în bară, în momentul ciocnirii:

$$N = \sqrt{\frac{2EQHA_2a}{(a+h)h}} \quad (7.55)$$

Pe baza relației (7.55) se poate calcula tensiunea normală maximă $\sigma_{\max}$, apărută în secțiunea cea mai mică, de arie A_1 :

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{A_1} = \frac{N}{A_2} \left(\frac{a+h}{a} \right)^2 = \sqrt{\frac{2QHE}{A_2 h} \left(1 + \frac{h}{a} \right)^3} \quad (7.56)$$

Pe baza relației (7.56) pot fi făcute următoarele observații:

- în cazul în care bara este de secțiune constantă: $A_1 = A_2 = A$ cota $a = \infty$ rezultând relația (7.47) în care $h = l$;
- în cazul în care, bara are un vârf ascuțit (este așezată pe vârful din O), atunci $a = 0$ și $A_1 = 0$ ceea ce conduce la o valoare foarte mare a tensiunii normale în vârful din O ($\sigma_{\max} \rightarrow \infty$). Acest fapt face ca sculele ascuțite la vârf să fie utile pentru operațiile de tăiere, perforare etc.

7.3.3. Solicitări de încovoiere cu șoc

Se consideră o grindă cu modulul de rigiditate constant ($EI_z = \text{const.}$) și lungime l peste care cade un corp de greutate Q , de la înălțimea H (figura 7.8). Corpul de greutate Q lovește grinda într-un punct oarecare.

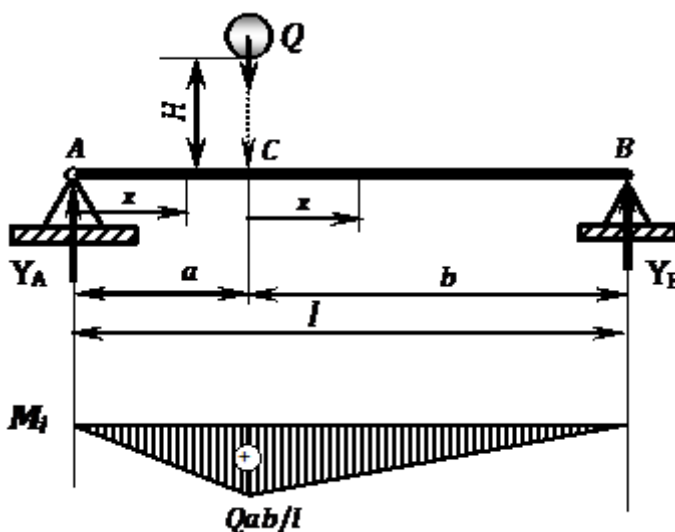


Figura 7.8

Considerând grinda de masă mică, în calcule nu vor fi luate în considerare forțele de inerție. Considerând sistemul conservativ rezultă că energia potențială se transformă, în momentul impactului, în energie cinetică.

$$E_c = E_p = L_e = QH. \quad (7.57)$$

În urma impactului se dezvoltă reacțiunile $Y_A = \frac{Qb}{l}$ și $Y_B = \frac{Qa}{l}$.

Pentru cele două intervale $A-C$ și $C-B$ momentele încovoietoare, conform notațiilor din figura 7.8, sunt:

$$M_{iAC} = \frac{Qb}{l}x \text{ și } M_{iCB} = \frac{Qa}{l}(b-x)$$

Ca urmare, energia de deformație este:

$$U = \sum \int \frac{M_i^2}{2EI_z} dx = \frac{1}{2EI_z} \left[\int_A^C M_{iAC}^2 dx + \int_C^B M_{iCB}^2 dx \right] = \frac{1}{2EI_z} \left[\int_0^a \frac{Q^2 b^2}{l^2} x dx + \int_0^b \frac{Q^2 a^2}{l^2} (b-x)^2 dx \right]$$

După realizarea calculelor și rearanjarea termenilor se obține:

$$U = \frac{Q^2 a^2 b^2}{6EI_z l^2} (a+b) = \frac{Q^2 a^2 b^2}{6EI_z l}.$$

Ținând cont de valoarea momentului maxim (figura 7.8) $M_{i,\max} = \frac{Qab}{l}$, relația energiei de deformare se poate rescrie sub forma:

$$U = \frac{Q^2 a^2 b^2}{6EI_z l} = \frac{l}{6EI_z} M_{i,\max}^2. \quad (7.58)$$

Din egalarea relațiilor (7.57) și (7.58) se obține:

$$\frac{l}{6EI_z} M_{i,\max}^2 = QH$$

de unde rezultă:

$$M_{i,\max}^2 = \frac{6QHEI_z}{l}$$

din care se obține:

$$M_{i,\max} = \sqrt{\frac{6QHEI_z}{l}} . \quad (7.59)$$

Pe baza relației (7.59) poate fi calculată tensiunea maxim la încovoiere:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{i,\max}}{W_z} = \frac{1}{W_z} \sqrt{\frac{6QHEI_z}{l}} = \sqrt{\frac{6QHE}{W_z l}} y_{\max} . \quad (7.60)$$

Pe baza celor de mai sus pot fi făcute următoarele observații:

- Momentul încovoiitor maxim, în cazul solicitării de încovoiere cu șoc, nu depinde de locul în care cade corpul (cotele a și b), relația (7.59);
- Tensiunea maximă, în cazul solicitării de încovoiere cu șoc, este cu atât mai mare cu cât lungimea este mai mare și practic cu cât volumul este mai mare, relația (7.60). Acesta este și motivul pentru care piesele solicitate la șoc trebuie să fie suficient de elastice pentru ca energia din momentul șocului să fie absorbită pe deplasări mari.

7.3.4. Solicitări de torsiune cu șoc

Se consideră un arbore de diametru constant d și lungime între lagărele de rezemare l . La unul din capete este montat un volant de diametru D și greutate Q . Arborele este antrenat de un moment de torsiune M_t , acesta rotindu-se cu o viteză unghiulară constantă ω .

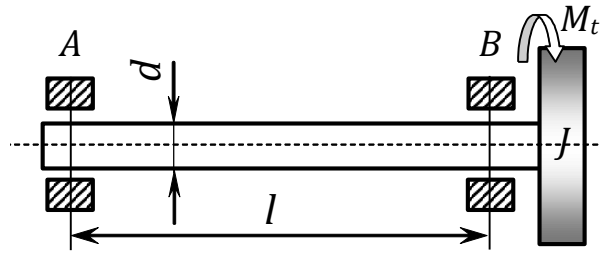


Figura 7.9

La un moment dat, volantul este oprit brusc. În momentul imobilizării, energia cinetică a volantului se transformă în energie de deformare, aceasta fiind preluată de porțiunea solicitată la torsiune, porțiunea $A-B$. Energia cinetică este:

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (7.61)$$

unde J este momentul de inerție mecanic, calculat cu relația:

$$J = mR^2 = \frac{Q}{g} \left(\frac{D}{2} \right)^2 = \frac{QD^2}{2g}. \quad (7.62)$$

Ca urmare, energia cinetică este egală cu:

$$E_c = \frac{QD^2}{8g} \omega^2. \quad (7.62)$$

Energia de deformare a arborelui este dată de relația:

$$U = \int_0^l \frac{M_t^2}{2GI_p} dx = \frac{M_t^2 l}{2GI_p} \quad (7.64)$$

Egalând relațiile (7.63) și (7.64) se obține:

$$\frac{Q D^2}{8g} \omega^2 = \frac{M_t^2 l}{2G I_p}$$

din care rezultă expresia momentului de torsiune:

$$M_t^2 = \omega \sqrt{\frac{2G I_p Q D^2}{8gl}} = \omega \sqrt{\frac{G I_p J}{l}}. \quad (7.65)$$

Ținând cont de relația de calcul a tensiunii tangențiale la solicitarea de torsiune, se obține:

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{\omega}{W_p} \sqrt{\frac{G I_p J}{l}} = \omega \sqrt{\frac{2G J}{A l}} = \omega \sqrt{\frac{2G J}{V}}, \quad (7.66)$$

unde $A = \frac{\pi d^2}{4}$ este aria secțiunii transversale a arborelui, iar V este volumul arborelui.

Pe baza relației (7.65) se poate concluziona că tensiunea maximă este invers proporțională cu volumul V al arborelui. Ca urmare, pentru o secțiune constantă, este preferabil un arbore cu lungime cât mai mare.

7.4. Calculul la șoc cu ajutorul multiplicatorului dinamic (de impact)

Impactul are loc atunci când un obiect lovește altul, astfel încât se dezvoltă forțe mari între obiectele într-o perioadă foarte scurtă de timp.

Se consideră un corp de greutate Q care cade, de la o înălțime H , pe un element elastic de constantă elastică statică k (figura 7.10). Constanta statică elastică a unui arc este definită cu relația generală:

$$k = \frac{\text{Forța}}{\text{Deformație}}.$$

Considerând solicitarea în domeniul elastic și neglijând masa arcului, în urma impactului, arcul se deformează cu o cantitate $\Delta_{\max}$.

Energia de potențială totală a corpului de greutate Q , ținând cont de deformarea maximă a arcului $\Delta_{\max}$, este egală cu:

$$U = Q(H + \Delta_{d,\max}) \quad (7.67)$$

unde prin $\Delta_{d,\max}$ s-a considerat deformarea (săgeata) maximă dinamică.

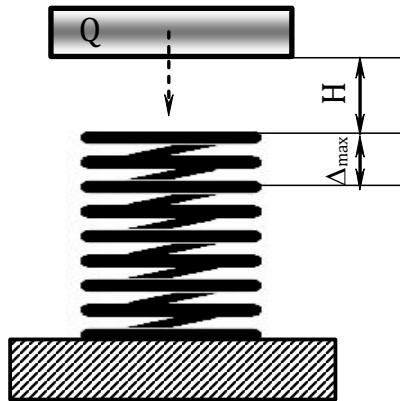


Figura 7.12

Lucrul mecanic efectuat de arc este egal cu:

$$L = \frac{F_e \Delta_{\max}}{2}, \quad (7.68)$$

unde F_e este forța elastică:

$$F_e = k\Delta_{d,\max}. \quad (7.69)$$

Înlocuind relația (7.69) în relația (7.68) rezultă:

$$L = \frac{k\Delta_{d,\max}^2}{2}. \quad (7.70)$$

Presupunând că nu au loc pierderi de energie în timpul impactului, din cauza căldurii, a sunetului sau a deformărilor plastice locale, se poate considera că energia potențială a corpului de greutate Q , dată de relația (7.67) este egală cu lucrul mecanic efectuat de arc, relația (7.70):

$$Q(H + \Delta_{d,\max}) = \frac{k\Delta_{d,\max}^2}{2}. \quad (7.71)$$

Relația (7.71) este, în fapt, o ecuație de gradul II:

$$\Delta_{d,\max}^2 - \frac{2Q}{k}\Delta_{d,\max} - \frac{2QH}{k} = 0. \quad (7.72)$$

Soluția de valoare maximă a ecuației (7.72) este:

$$\Delta_{d,\max} = \frac{Q}{k} + \sqrt{\left(\frac{Q}{k}\right)^2 + 2\left(\frac{Q}{k}\right)H}. \quad (7.73)$$

Dacă asupra arcului se aplică static greutatea Q , ținând cont de formula generală de calcul a rigidității statice a unui element elastic, rezultă că deformația statică, Δ_{st} , poate fi exprimată prin relația:

$$\Delta_{st} = \frac{Q}{k}. \quad (7.74)$$

Pe baza relației (7.74), relația (7.73) devine:

$$\Delta_{\max} = \Delta_{st} + \sqrt{\Delta_{st}^2 + 2\Delta_{st}H} . \quad (7.75)$$

sau:

$$\Delta_{\max} = \Delta_{st} \left[1 + \sqrt{1 + 2\frac{H}{\Delta_{st}}} \right] \quad (7.76)$$

Din relația (7.76) rezultă că, în cazul solicitării dinamice deformarea este egală cu deformarea statică amplificată cu un factor. Acest factor poartă numele de **multiplicator dinamic** ψ , acesta fiind egal cu:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + 2\frac{H}{\Delta_{st}}} . \quad (7.77)$$

În cazul în care, lucrul mecanic exterior este foarte mare comparativ cu energia de deformație, expresia multiplicatorului dinamic devine:

$$\psi \cong 1 + \sqrt{2\frac{H}{\Delta_{st}}} . \quad (7.78)$$

Multiplicatorul dinamic ψ exprimă raportul dintre mărimile solicitării dinamice și cele corespunzătoare solicitărilor statice. Ca urmare se poate scrie:

$$\psi = \frac{\sigma_d}{\sigma_{st}} = \frac{\Delta_d}{\Delta_{st}} = \frac{P}{Q} = \quad (7.79)$$

Pe baza relației (7.77) se poate concluziona că, în cazul aplicării bruște a unei greutăți oarecare ($H=0$) săgeata dinamică este dublul săgeții statice:

$$\Delta_{d,\max} = 2\Delta_{st} . \quad (7.80)$$

În mod similar se poate considera situația în care un corp de greutate Q se deplasează pe un plan orizontal și lovește același arc, montat orizontal. În

acest caz, energia pe care o are corpul în momentul impactului este energia cinetică:

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{Qv^2}{2g}. \quad (7.81)$$

Egalând relația (7.81) cu relația (7.70), rezultă:

$$\frac{Qv^2}{2g} = \frac{k\Delta_{d,\max}^2}{2},$$

de unde rezultă:

$$\Delta_{d,\max} = \sqrt{\frac{Qv^2}{gk}} = \sqrt{\frac{\Delta_{st}v^2}{g}}. \quad (7.82)$$

Pe baza celor de mai sus, se pot concluziona:

- impactul are loc atunci când o forță mare este dezvoltată între două obiecte care se lovesc între ele într-o perioadă scurtă de timp;
- efectele impactului pot fi analizate considerând corpul de impact rigid, iar materialul corpului lovit elastic liniar,
- în timpul coliziunii nu sunt pierderi de energie, corpurile rămânând în contact în timpul coliziunii, iar inerția corpului elastic este neglijată;
- mărimile dinamice pot fi determinate prin înmulțirea valorilor statice cu multiplicatorul factor de impact.

BIBLIOGRAFIE

1. Anghel, Al. – Rezistența materialelor (I), Editura tehnică, București, 2001
2. Atanasiu A., ș.a. – Încercarea materialelor, Editura tehnică, București, 1982
3. Babeu, T. - *Rezistența materialelor*, Litografia Institutului Politehnic „Traian Vuia” Timișoara, 1980
4. Beer, F., P., Johnston, E., R. Jr., De Wolf, J., T. - *Mechanics of Materials*, 6th Edition, McGraw-Hill, New York, ISBN 978-0-07-338028-5, 2012.
5. Bia, C., Ille, V., Soare, M.,V., - Rezistența materialelor și teoria elasticității, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1983
6. Biț, C., Cerbu, Camelia, Baba, M.,N. – Strength of materials, vol.1, Editura Universității Transilvania din Brașov, 2002
7. Bolfa, T., Roșca, I.,C., Biț, C. – Editura LUX LIBRIS, Brașov, ISBN 978-973-131-103-6, 2011
8. Bolfa, T., Roșca, I.,C., Dumitriu, N., Biț, C. – Rezistența materialelor, Brașov, 1996
9. Buzdugan, Gh. - Rezistența Materialelor, Ed. Academiei R.S.R., București, 1986
10. Constantin, N., Sandu, A., Jiga, G. – Aplicații în rezistența materialelor, București, Oficiul de Informare documentare pentru Industria Construcțiilor de Mașini, 1998, Col. III. 12278
11. Craig, R., R., Jr. - Mechanics of Materials, 2nd ed., John Wiley, New York, ISBN-13: 978-0471331766, 1999
12. Curtu, I., Roșca, I., C. – 2288 probleme de rezistența materialelor, Reprografia Universității din Brașov, 1991
13. Curtu, I., Roșca, I., C., Crișan, R. – Memorator de rezistența materialelor, Reprografia Universității Transilvania din Brașov, 1995

14. Deutsch, I. – Rezistența Materialelor, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979
15. Deutsch, I., Goia, I., Curtu, I., Neamțu, T., Sperchez, Fl. - Probleme de Rezistența Materialelor, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983
16. Dobrotă, V. – Rezistența materialelor, Editura didactică și pedagogică, 1982
17. Edwards, K., S., McKee, R., B. - Fundamentals of Mechanical Component Design, McGraw-Hill, New York, ISBN-13: 978-0070191020, 1991
18. Galațanu S. V., Hlușcu M. – Rezistența materialelor – solicitări compuse și dinamice. Calculul deplasărilor, Editura Politehnica, Timișoara, 2025, ISBN 978-606-35-0641-3
19. Goia, I. – Rezistența Materialelor, Editura Universității Transilvania, ISBN 973-99565-9-9, 2000
20. Hibbeler R. C. - Mechanics of materials, 8th Edition, Prentice Hall, ISBN 10: 0-13-602230-8, ISBN 13: 978-0-13-602230-5, 2011,
21. Hlușcu M. - Culegere de probleme din rezistența materialelor, Litografia Universității Politehnica Timișoara, 1995
22. Hlușcu M. – Teste din problem de Rezistența materialelor pentru concursul „C.C. Teodorescu” Editura Legart, Timișoara, 2025, ISBN 978-630-6716-06-7
23. Hlușcu M. – Probleme de Rezistența materialelor pentru concursul studențesc „C.C. Teodorescu”, Editura Legart, Timișoara.2025, ISBN 978-630-6735-06-6
24. Iliescu, N., Jiga G., Hadăr, A. – Teste-grilă de Rezistența materialelor, Editura Printech, București, 1990
25. Mazilu, P. – Rezistența materialelor, Institutul de Construcții București, 1974
26. Mocanu, D., R., - Rezistența Materialelor, Ed. Tehnică, București, 1980
27. Müller, W., H., Ferber, F. - Technische Mechanik für Ingenieure, Fachbuchverlag, Leipzig, SBN-13: 978-3446427693, 2003.
28. Năstăsescu, V., – Rezistența materialelor, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1996

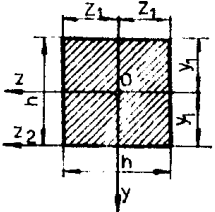
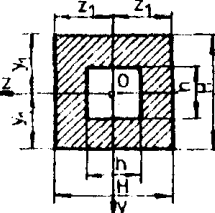
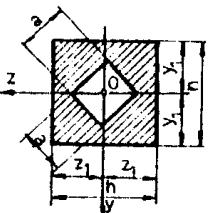
29. Năstăsescu, V., Bârsan, Gh. – Rezistența materialelor, Probleme de rezistența materialelor, Editura Academiei Tehnice Militare, București, 1997
30. Ponomariov, S. ,D. ș.a., - Calculul de rezistență în construcția de mașini, Editura tehnică, București, 1963
31. Posea, N., Anghel, Al., Manea, A., Hotea, Gh. – Rezistența materialelor. Probleme, Editura Științifică și Enciclopedică, București, 1986
32. Radeș, M. – Rezistența Materialelor, Editura PRINTECH, 2010
33. Rivello, R. M., *Theory and Analysis of Flight Structures*, McGraw-Hill, New York, 1969.
34. Sofonea, G., Pascu, A., M. – Rezistența materialelor, Editura „Lucian Blaga” din Sibiu, ISBN (13) 978-973-739-362-3, 2006
35. Tripa, P. - Etape și modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor, Ed. MIRTON, Timișoara, 1999
36. Tripa, P., Hlușcu, M. – Rezistența Materialelor, Noțiuni fundamentale și aplicații, Editura MIRTON, Timișoara, ISBN (10) 973-661-934-6, 2006
37. Vable, M., - *Mechanics of Materials*, Oxford University Press, ASIN: B011DA3KG6, 2002.
38. Voinea, R., Voiculescu, D., Simion F., P. - Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie, Ed. Academiei R.S.R., București, 1989

Valorile caracteristicilor E , G , ν și α

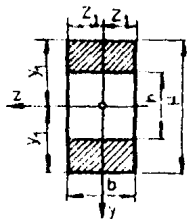
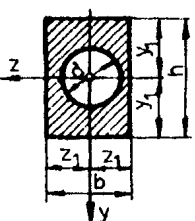
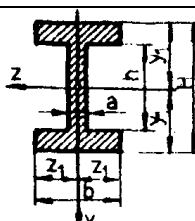
Nr.crt.	Material	E $\times 10^5 [MPa]$	G $\times 10^4 [MPa]$	ν	α $\times 10^{-6} [^{\circ}C^{-1}]$
1	Alamă	0,90 ÷ 1,30	3,5 ÷ 4,9	0,32 ÷ 0,42	18 ÷ 20
2	Aluminiu	0,69 ÷ 0,70	2,6	0,32 ÷ 0,33	23 ÷ 24
3	Aliaje de Al cu Si	0,76*	0,30*	0,27*	18*
4	Aliaje de Al cu Mg	0,43 ÷ 0,45	1,6 ÷ 1,8	0,35	23 ÷ 26
5	Bronz	0,90 ÷ 1,20	0,43*	0,31 ÷ 0,35	14 ÷ 15
6	Cupru laminat	1,10 ÷ 1,30	4,9*	0,31 ÷ 0,34	16 ÷ 17
7	Duraluminiu	0,69 0, 75	2,7 ÷ 2,8	0,32 ÷ 0,33	23 ÷ 24
8	Fontă cenușie albă	0,75 ÷ 1,60*	3,2 ÷ 5,2	0,20 ÷ 0,27	10 ÷ 12
9	Fontă perlitică maleabilă	1,60 ÷ 1,85*	6,8 ÷ 8,0*	-	10 ÷ 13
10	Oțel carbon	2,0 ÷ 2,15	7,8 ÷ 8,5	0,26 ÷ 0,29	11 ÷ 13
11	Oțel aliat	1,9 ÷ 2,20	8,1 ÷ 8,3	0,25 ÷ 0,30	11 ÷ 13
12	Oțel inoxidabil	1,9 ÷ 2,00	6,6 ÷ 7,5	0,25 ÷ 0,32	15 ÷ 18
13	Plumb	0,14 ÷ 0,17	0,07*	0,4 ÷ 0,45	29*
14	Polistiren	0,03 ÷ 0,05	-	-	130
15	Sticlă	0,45 ÷ 1,00	2,1 ÷ 2,3	0,24 ÷ 0,27	2 ÷ 8
16	Textolit	0,06 ÷ 0,10	2,2	-	-

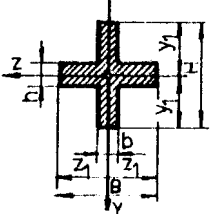
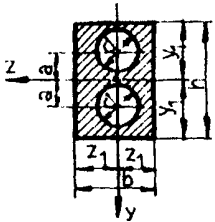
* - valori aproximative

Momente de inerție și module de rezistență

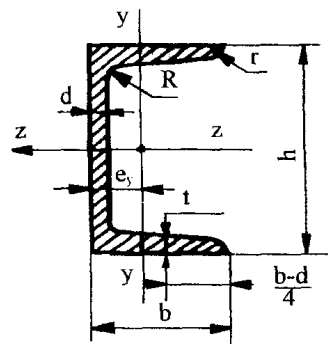
Nr. crt.	Forma secțiunii	Relații de calcul			
		Aria secțiunii	Momente de inerție axiale I_z și I_y Momente de inerție centrifugale I_{zy} Momente de inerție polare I_p	Module de rezistență W_z, W_y, W_p	Raze de inerție
1.		$A = h^2$	$I_z = I_y = \frac{h^4}{12}; I_{zy} = \frac{h^4}{3}$	$W_z = W_y = \frac{h^3}{6}$	$i_y = i_z = \frac{h}{\sqrt{12}}$ $i_y = i_z = 0,289h$ Elipsa de inerție este un cerc
2.		$A = H^2 - h^2$	$I_z = I_y = \frac{H^4 - h^4}{12}$ Toate axele centrale sunt principale	$W_z = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_y = i_z = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}}$ $i_y = i_z = 0,289\sqrt{H^2 + h^2}$ Elipsa de inerție este un cerc
3.		$A = h^2 - a^2$	$I_z = I_y = \frac{h^4 - a^4}{12}$	$W_z = W_y = \frac{h^4 - a^4}{6h}$	$i_y = i_z = \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{12}}$ $i_y = i_z = 0,289\sqrt{h^2 + a^2}$ Elipsa de inerție este un cerc

Nr. crt.	Forma secțiunii	Relații de calcul			
		Aria secțiunii	Momente de inerție axiale I_z și I_y Momente de inerție centrifugale I_{zy} Momente de inerție polare I_p	Module de rezistență W_z, W_y, W_p	Raze de inerție
4.		$A = a^2$	$I_z = I_y = \frac{a^4}{12} = \frac{a^2 A}{12} = \frac{h^4}{48}$ Toate axele centrale sunt principale	$W_z = W_y = \frac{\sqrt{2} a^3}{12} = \frac{h^3}{24}$ $W_z = W_y = 0,118 a^3 = 0,042 h^3$	$i_y = i_z = 0,289 a$ Elipsa de inerție este un cerc
5.		$A = bh$	$I_z = \frac{bh^3}{12} \quad I_y = \frac{hb^3}{12}$	$W_y = \frac{hb^2}{6}; \quad W_z = \frac{bh^2}{6}$	$i_y = 0,289 h$ $i_z = 0,289 b$
6.		$A = BH - bh$	$I_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$ $I_z = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$ $W_z = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$i_y = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$ $i_z = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$

Nr. crt.	Forma secțiunii	Relații de calcul			
		Aria secțiunii	Momente de inerție axiale I_z și I_y Momente de inerție centrifugale I_{zy} Momente de inerție polare I_p	Module de rezistență W_z, W_y, W_p	Raze de inerție
7.		$A = b(H-h)$	$I_y = \frac{b^3}{12}(H-h)$ $I_z = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$W_y = \frac{b^2}{6}(H-h)$ $W_z = \frac{b}{6H}(H^2 - h^2)$	$i_y = 0,289b$ $i_z = \sqrt{\frac{H^2 + Hh + h^2}{12}}$ $i_z = 0,289\sqrt{H^2 + Hh + h^2}$
8.		$A = bh - \frac{\pi d^2}{4}$	$I_y = \frac{1}{4} \left(\frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right)$ $I_z = \frac{1}{4} \left(\frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right)$	$W_y = \frac{1}{2b} \left(\frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right)$ $W_z = \frac{1}{2h} \left(\frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16} \right)$	$i_z = 0,289h \sqrt{\frac{1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3}}{1 - 0,785 \frac{d^2}{hb}}}$ $i_y = 0,289b \sqrt{\frac{1 - 0,59 \frac{d^4}{hb^3}}{1 - 0,785 \frac{d^2}{hb}}}$
9.		$A = ah + b(H-h)$	$I_y = \frac{a^3 h}{12} + \frac{b^3}{12}(H-h)$ $I_z = \frac{ah^3}{12} + \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$	$W_y = \frac{a^3 h}{6b} + \frac{b^2}{6}(H-h)$ $W_z = \frac{ah^3}{6H} + \frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$	$i_y = \sqrt{\frac{a^3 h + b^3(H-h)}{12[ah + b(H-h)]}}$ $i_z = \sqrt{\frac{ah^3 + b(H^3 - h^3)}{12[ah + b(H-h)]}}$

Nr. crt.	Forma secțiunii	Relații de calcul			
		Aria secțiunii	Momente de inerție axiale I_z și I_y Momente de inerție centrifugale I_{zy} Momente de inerție polare I_p	Module de rezistență W_z, W_y, W_p	Raze de inerție
10.		$A = BH + h(B - b)$	$I_z = \frac{hB^3 + (H - h)b^3}{12}$ $I_y = \frac{bH^3 + (B - b)h^3}{12}$	$W_z = \frac{hB^3 + (H - h)b^3}{6B}$ $W_y = \frac{bH^3 + (B - b)h^3}{6H}$	$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$ $i_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}}$
11.		$A = bh - \frac{\pi d^2}{2}$	$I_z = \frac{bh^3}{12} \left[1 - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left(1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right) \right]$ $I_y = \frac{hb^3}{12} \left(1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$W_z = \frac{bh^2}{6} \times \left[1 - 1,18 \frac{d^4}{bh^3} \left(1 + 16 \frac{a^2}{d^2} \right) \right]$ $W_y = \frac{hb^2}{6} \left(1 - 1,18 \frac{d^4}{hb^3} \right)$	$i_y = 0,289b \sqrt{\frac{1 - 1,18 \frac{d^4}{bh^3}}{1 - 1,57 \frac{d^2}{hb}}}$ $i_z = 0,289h \sqrt{\frac{1 - 1,18 \frac{d^4}{bh^3}}{1 - 1,57 \frac{d^2}{bh}}}$

Profile standardizate



Oțelul laminat la cald, profil U

STAS 564 – 80

(dimensiuni și caracteristici geometrice)

h – înălțimea profilului

b – lățimea tălpilor

t - grosimea

R – raza de rotunjire interioară a tălpilor

r – raza de rotunjire a tălpilor la vârf

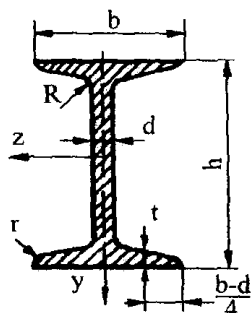
I_z, I_y – momente de inerție axiale

W_z, W_y – module de rezistență

i_z, i_y – raze de girație (inerție)

S_z - momentul static al semisețiunii

Simbol profil	Dimensiuni [mm]						Aria secțiunii A[cm ²]	Mărimi statice pentru axele de încovoiere								
								z - z			y - y					
	h	b	d	t	R	r		I _z [cm ⁴]	W _z [cm ³]	i _z [cm]	I _y [cm ⁴]	W _y [cm ³]	i _y [cm]	S _z [cm ³]		
U5	50	38	5	7		3,5	7,12	26,4	10,6	1,92	9,12	3,75	1,13	-	1,37	
U6,5	65	42	5,5	7,28	7,5	4	9,03	57,5	17,7	2,52	14,1	5,07	1,25	-	1,42	
U8	80	45	6	7,76		4	11,0	106	26,5	3,10	19,4	6,36	1,33	15,9	1,45	
U 10	100	50	6	8,26		4,5	13,5	205	41,2	3,91	29,3	8,49	1,47	24,5	1,55	
U 12	120	55	7	8,72		4,5	17,0	361	60,7	4,62	43,2	11,1	1,59	36,3	1,60	
U 14	140	60	7	9,72		5	20,4	605	86,4	5,45	62,7	14,8	1,75	51,4	1,75	
U 16	160	65	7,5	10,20		5,5	24,0	925	116	6,21	85,3	18,3	1,89	68,8	1,84	
U 18	180	70	8	10,68		5,5	28,0	1350	150	6,95	114	22,4	2,02	89,6	1,92	
U 20	200	75	8,5	11,16		6	32,2	1910	191	7,70	148	27,0	2,14	114	2,01	
U 22	220	80	9	12,14		6,5	37,4	2690	245	8,48	197	33,6	2,30	146	2,14	
U 24	240	85	9,5	12,62		6,5	42,3	3600	300	9,22	248	39,6	2,42	179	2,23	
U 26	260	90	10	13,60		7	48,3	4820	371	9,99	317	47,7	2,56	221	2,36	
U 30	300	100	10	15,60		8	58,8	8030	535	11,7	495	67,8	2,90	316	2,70	



Oțelul laminat la cald

Profil I

Stas 564 – 80

(dimensiuni și caracteristici geometrice)

h – înălțimea profilului

b – lățimea tălpilor

d – grosimea inimii

t – grosimea medie a tălpilor

R – raza de rotunjire interioară a tălpilor

r – raza de rotunjire a tălpilor la vârf

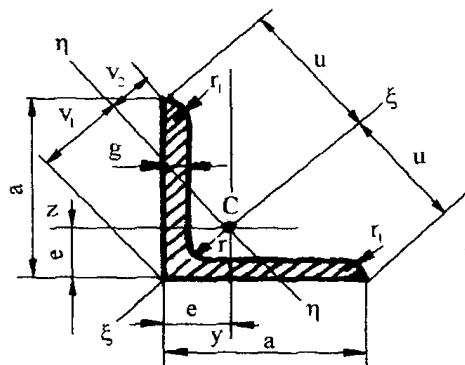
I_z, I_y – momente de inerție axiale

W_z, W_y – module de rezistență

I_z, I_y – raze de girație (inerție)

S_z – momentul static al semisețiunii

Simbol profil	Dimensiuni [mm]					Aria secțiunii A[cm ²]	Mărimi statice pentru axele de încovoiere						S _z [cm ³]	Simbol profil
	H	b	t	d=R	r		z - z			y - y				
							I _z [cm ⁴]	W _z [cm ³]	i _z [cm]	I _y [cm ⁴]	W _y [cm ³]	i _y [cm]		
I 8	80	42	5,9	3,9	2,3	7,58	77,8	19,5	3,2	6,29	3,0	0,91	11,4	I 8
I 10	100	50	6,8	4,5	2,7	10,6	171	34,2	4,01	12,2	4,88	1,07	19,9	I 10
I 12	120	58	7,7	5,1	3,1	14,2	328	54,6	4,81	21,5	7,41	1,23	31,8	I 12
I 14	140	66	8,6	5,7	3,4	18,3	573	81,9	5,61	36,2	10,71	1,40	47,7	I 14
I 16	160	74	9,5	6,3	3,8	22,8	935	117	6,4	54,7	14,8	1,55	68,0	I 16
I 18	180	82	10,4	6,9	4,1	27,9	1450	161	7,2	81,3	19,8	1,71	93,4	I 18
I 20	200	90	11,3	7,5	4,5	33,5	2140	214	8,0	117	26,0	1,87	125	I 20
I 22	220	98	11,92	8,1	4,9	39,6	3060	278	8,80	162	33,1	2,02	162	I 22
I 24	240	106	12,80	8,7	5,2	46,1	4250	354	9,59	221	41,7	2,20	206	I 24
I 26	260	113	13,77	9,4	5,6	53,4	5740	442	10,4	288	51,0	2,32	257	I 26
I 28	280	119	14,85	10,1	6,1	61,1	7590	542	11,1	364	61,2	2,45	316	I 28
I 30	300	125	15,82	10,8	6,5	69,1	9800	653	11,9	451	72,2	2,56	381	I 30
I 32	320	131	16,92	11,5	6,9	77,8	12510	782	12,7	555	84,7	2,67	457	I 32
I 36	360	143	19,05	13,0	7,8	97,1	19610	1090	14,2	818	114	2,90	638	I 36
I 40	400	155	21,10	14,4	8,6	118	29210	1460	15,7	1160	149	3,13	857	I 40



Oțel cornier cu aripi egale laminat la cald

STAS 424 – 80

(dimensiuni și mărimi statice de încovoiere)

a – lățimea aripii

g – grosimea aripii

C – centrul de greutate

e – distanța de la centrul de greutate la partea exterioră a tălpii

z, y – axele centrale

 ξ, η sau 1,2 - axe centrale principale

r – raza de rotunjire interioară a tălpii

 r_1 – raza de rotunjire a tălpii la vârf

 I_z, I_y – momente de inerție axiale

 W_z, W_y – module de rezistență

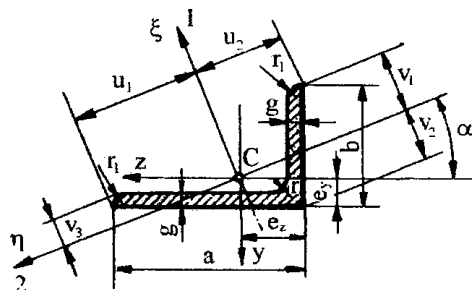
 i_z, i_y – raze de girație (inerție)

 I_{ξ} sau I_1, I_{η} sau I_2 – momente de inerție principale, maxim și minim

 S_z – momentul static al semisețiunii

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii [mm]				Aria secțiunii [cm ²]	Distanța axelor, [mm]				Mărimi geometrice inerțiale								
										z - z			y - y			$\xi - \xi$		
	a	g	r	r_1		e	u	v_1	v_2	$I_z=I_y$ [cm ⁴]	$W_z=W_y$ [cm ³]	$i_z=i_y$ [cm]	$I_{\xi}=I_1$ [cm ⁴]	i_{ξ} [cm]	$I_{\eta}=I_2$ [cm ⁴]	W_{η} [cm ³]	i_{η} [cm]	I_{zy} [cm ⁴]
20 x 20 x 3	20	3	3,5	2	1,12	0,60	1,41	0,84	0,70	0,39	0,28	0,59	0,61	0,74	0,16	0,19	0,38	0,25
20 x 20 x 4	20	4	3,5	2	1,45	0,64	1,41	0,90	0,71	0,41	0,36	0,58	0,77	0,73	0,21	0,23	0,38	0,28
25 x 25 x 3	25	3	3,5	2	1,42	0,72	1,77	1,02	0,87	0,80	0,45	0,75	1,26	0,94	0,33	0,32	0,48	0,465
25 x 25 x 4	25	4	3,5	2	1,85	0,76	1,77	1,08	0,89	1,01	0,58	0,74	1,60	0,93	0,43	0,40	0,48	0,585
25 x 25 x 5	25	5	3,5	2	2,26	0,80	1,77	1,13	0,91	1,20	0,71	0,73	1,89	0,91	0,52	0,46	0,48	0,685
30 x 30 x 4	30	4	5	2,5	2,27	0,88	2,12	1,24	1,05	1,80	0,85	0,89	2,85	1,12	0,75	1,61	0,58	1,05
30 x 30 x 5	30	5	5	2,5	2,78	0,92	2,12	1,30	1,07	2,16	1,04	0,88	3,41	1,41	0,92	0,70	0,57	1,245
35 x 35 x 4	35	4	5	2,5	2,67	1,00	2,47	1,42	1,24	2,95	1,18	1,05	4,68	1,33	1,23	0,86	0,68	1,725
35 x 35 x 5	35	5	5	2,5	3,28	1,04	2,47	1,48	1,25	3,56	1,45	1,04	5,64	1,31	1,49	1,01	0,67	2,075
40 x 40 x 4	40	4	6	3	3,08	1,12	2,83	1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,60	1,51	2,26	1,37	0,78	2,62
40 x 40 x 5	40	5	6	3	3,79	1,16	2,83	1,64	1,42	5,43	1,91	1,20	8,60	1,51	2,26	1,37	0,77	3,17
45 x 45 x 5	45	5	7	3,5	4,30	1,28	3,18	1,81	1,58	7,84	2,43	1,35	12,4	1,70	3,25	1,80	0,87	4,575
45 x 45 x 6	45	6	7	3,5	5,08	1,32	3,18	1,87	1,59	9,16	2,88	1,34	14,5	1,69	3,82	2,04	0,87	5,34

Denumirea L	Dimensiunile secțiunii [mm]				Aria secțiunii [cm ²]	Distanța axelor, [mm]				Mărimi geometrice inerțiale									
	a	g	r	r ₁		e	u	v ₁	v ₂	z - z		y - y		ξ - ξ	l - l	η - η	2 - 2		
										I _z =I _y [cm ⁴]	W _z =W _y [cm ³]	i _z =i _y [cm]	I _ξ =I _η [cm ⁴]	i _ξ [cm]	I _η =I _ξ [cm ⁴]	W _η [cm ³]	i _η [cm]	I _{zy} [cm ⁴]	
50 x 50 x 5	50	5	7	3,5	4,80	1,40	3,54	1,98	1,76	12,80	3,61	1,50	17,4	1,90	4,54	2,59	0,97	6,43	
50 x 50 x 6	50	6	7	3,5	5,69	1,45	3,54	2,01	1,77	12,80	3,61	1,50	20,4	1,89	5,33	2,61	0,97	7,535	
50 x 50 x 7	50	7	7	3,5	6,56	1,49	3,54	3,10	1,78	14,60	4,16	1,49	23,1	1,88	6,10	2,91	0,96	8,5	
60 x 60 x 5	60	5	8	4	5,82	1,64	4,24	2,32	2,11	19,4	4,45	1,82	30,7	2,30	8,02	3,45	1,17	11,34	
60 x 60 x 6	60	6	8	4	6,91	1,69	4,24	2,39	2,11	22,8	5,29	1,82	36,2	2,29	9,43	3,95	1,17	13,385	
60 x 60 x 8	60	8	8	4	9,63	1,77	4,24	2,50	2,14	29,2	6,89	1,80	46,2	2,26	12,1	4,86	1,16	17,05	
60 x 60 x 10	60	10	8	4	11,1	1,85	4,24	2,61	2,17	34,9	8,41	1,78	55,1	2,23	14,8	5,67	1,16	20,15	
70 x 70 x 6	70	6	9	4,5	8,13	1,93	4,95	2,73	2,46	36,9	7,27	2,13	53,5	2,68	15,2	5,69	1,37	19,15	
70 x 70 x 7	70	7	9	4,5	9,40	1,97	4,95	2,79	2,47	42,4	8,41	2,12	67,1	2,67	17,5	6,27	1,36	24,8	
70 x 70 x 8	70	8	9	4,5	10,60	2,01	4,95	2,85	2,49	47,5	9,52	2,11	75,3	2,66	19,7	6,91	1,36	27,8	
70 x 70 x 10	70	10	9	4,5	13,10	2,09	4,95	2,96	2,52	57,2	11,70	2,09	90,5	2,63	23,9	8,09	1,35	33,3	
80 x 80 x 6	80	6	10	5	9,35	2,17	5,66	3,07	2,82	55,8	9,57	2,44	88,5	3,08	23,1	7,55	1,56	32,7	
80 x 80 x 8	80	8	10	5	12,30	2,26	5,66	3,19	2,82	72,2	12,6	2,43	115	3,06	29,8	9,36	1,55	42,6	
80 x 80 x 10	80	10	10	5	15,1	2,34	5,66	3,30	2,85	87,5	15,4	2,41	139	3,03	36,3	11,0	1,55	51,35	
90 x 90 x 8	90	8	11	5,5	13,9	2,50	6,36	3,53	3,17	104	16,1	2,74	166	3,45	43,1	12,2	1,76	61,45	
90 x 90 x 9	90	9	11	5,5	15,5	2,54	6,36	3,59	3,18	116	18,0	27,4	184	3,45	47,8	13,3	1,76	68,1	
90 x 90 x 11	90	11	11	5,5	18,7	2,62	6,36	3,70	3,21	138	21,6	2,72	218	3,41	57,1	15,4	1,75	80,45	
100 x 100 x 8	100	8	12	6	15,5	2,74	7,07	3,87	3,52	145	19,9	3,06	230	3,85	59,8	15,4	1,96	85,1	
100 x 100 x 10	100	10	12	6	19,2	2,82	7,07	3,99	3,54	177	24,6	3,04	280	3,83	72,9	18,3	1,95	103,55	
100 x 100 x 12	100	12	12	6	22,7	2,90	7,07	4,11	3,57	207	29,1	3,02	328	3,80	85,7	20,9	1,94	121,15	
120 x 120 x 10	120	10	13	6,5	23,2	3,31	8,49	4,69	4,23	313	36,0	3,67	497	4,63	129	27,5	2,36	184	
120 x 120 x 12	120	12	13	6,5	27,5	3,40	8,49	4,80	4,26	368	42,7	3,65	584	4,60	151	31,5	2,35	216,5	
130 x 130 x 12	130	12	14	7	30,3	3,64	9,19	5,15	4,60	472	50,4	3,97	750	5,00	194	37,7	2,54	278	
130 x 130 x 14	130	14	14	7	34,7	3,72	9,19	5,26	4,63	540	58,2	3,94	857	4,97	223	42,4	2,53	317	
140 x 140 x 12	140	12	15	7,5	32,5	3,90	9,90	5,50	5,04	602	59,7	4,31	957	5,43	248	44,9	2,76	354,5	
140 x 140 x 14	140	14	15	7,5	37,6	3,98	9,90	5,61	5,07	689	68,8	4,30	1094	5,42	284	50,5	2,74	405	
150 x 150 x 14	150	14	16	8	40,3	4,21	10,6	5,95	5,31	845	78,2	4,58	1340	5,77	347	58,3	2,94	496,5	
150 x 150 x 16	150	16	16	8	45,7	4,29	10,6	6,07	5,34	949	88,7	4,56	1510	5,74	391	64,4	2,93	559,5	
160 x 160 x 12	160	12	17	8,5	37,4	4,39	11,3	6,19	5,74	913	78,6	4,94	1450	6,23	376	60,5	3,17	537	
160 x 160 x 14	160	14	17	8,5	43,3	4,47	11,3	6,30	5,77	1046	90,8	4,92	1662	6,20	431	68,1	3,16	615,5	



Oțel cornier cu aripi neegale

STAS 425 - 80

(dimensiuni și mărimi statice de încovoiere)

a – lățimea tălpii mari

b – lățimea tălpii mici

g – grosimea aripii

C – centrul de greutate

e_z, e_y – distanța de la centrul de greutate la partea exterioră a tălpii

z, y – axele centrale

ξ, η sau 1,2 - axe centrale principale

r – raza de rotunjire interioară a tălpilor

r_1 – raza de rotunjire a tălpilor la vârf

I_z, I_y – momente de inerție axiale

I_ξ sau I_1, I_η sau I_2 – momente de inerție principale, maxim și minim

W_z, W_y – module de rezistență

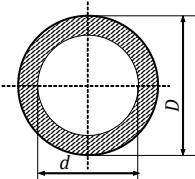
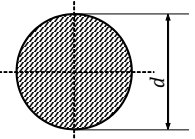
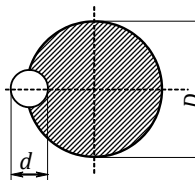
i_z, i_y – raze de girație (inerție)

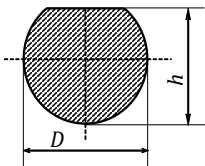
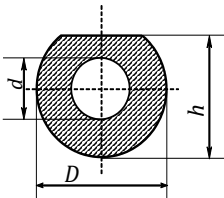
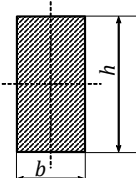
S_z - momentul static al semisecțiunii

Denumire LL	Dimensiunile secțiunii [mm]					Arie secțiunii A [cm ²]	Distanța axelor [cm]							tga	Marimi geometrice inerțiale											
															y - y			z - z			ξ - ξ		η - η		I _φ [cm ⁴]	
	I _y [cm ⁴]	W _y [cm ³]	i _y [cm]	I _z [cm ⁴]	W _z [cm ³]		i _z [cm]	I _ξ [cm ⁴]	i _ξ [cm]	I _η [cm ⁴]	i _η [cm]															
30x20x3	30	20	3	3,5	2	1,43	0,99	0,50	2,05	1,51	0,86	1,04	0,56	0,427	1,25	0,62	0,93	0,44	0,29	0,55	1,43	1,00	0,26	0,42	0,43	
30x20x4			4			1,86	1,03	0,54	2,02	1,52	0,91	1,04	0,58	0,427	1,59	0,81	1,92	0,55	0,38	0,55	1,81	0,99	0,33	0,42	0,54	
40x20x3	40	20	3	3,5	2	1,73	1,42	0,44	2,61	1,77	0,79	1,19	0,46	0,257	2,80	1,09	0,27	0,47	0,30	0,52	2,96	1,31	0,31	0,42	0,64	
40x20x4			4			2,26	1,47	0,48	2,58	1,80	0,83	1,17	0,50	0,252	3,59	1,42	1,26	0,60	0,39	0,51	3,80	1,30	0,39	0,42	0,81	
45x30x4	45	30	4	4,5	2	2,86	1,48	0,74	3,06	2,23	1,21	1,58	0,80	0,434	5,77	1,91	1,42	2,05	0,91	0,85	6,63	1,52	1,19	0,65	1,98	
45x30x5			5			3,52	1,52	0,78	3,04	2,26	1,27	1,58	0,83	0,429	6,98	2,35	1,41	2,47	1,11	0,84	8,00	1,51	1,45	0,64	2,37	
60x30x5	60	30	5	6	3	4,29	2,15	0,68	3,89	2,67	1,20	1,77	0,72	0,256	15,6	4,04	1,90	2,60	1,12	0,78	16,5	1,96	1,69	0,63	3,56	
60x30x6			6			5,08	2,20	0,72	3,86	2,69	1,25	1,75	0,74	0,252	18,2	4,78	1,89	3,02	1,32	0,77	19,2	1,95	1,99	0,63	4,06	
60x40x5	60	40	5	6	3	4,79	1,96	0,97	4,10	3,01	1,68	2,1	1,10	0,434	17,2	4,25	1,89	6,11	2,02	1,13	19,8	2,03	3,54	0,86	5,99	
60x40x6			6			5,68	2,00	1,01	4,08	3,02	1,72	2,10	1,12	0,431	20,1	5,03	1,88	7,12	2,38	1,12	23,1	2,02	4,15	0,86	6,91	
60x40x7	60	40	7	6	3	6,55	2,04	1,05	4,06	3,03	1,77	2,09	1,14	0,427	22,9	5,79	1,87	8,07	2,74	1,11	26,3	2,00	4,75	0,85	7,86	
65x50x6			6			6,58	2,04	1,29	4,52	3,60	2,15	2,39	1,50	0,575	27,2	6,1	2,03	14,0	3,77	1,46	33,8	2,27	7,43	1,06	11,37	
65x50x7	65	50	7	6,5	3,5	7,60	2,08	1,33	4,50	3,62	2,19	2,39	1,52	0,572	31,1	7,03	2,02	15,9	4,34	1,45	38,5	2,25	8,51	1,06	13,9	
65x50x8			8			8,60	2,11	1,37	4,49	3,64	2,23	2,39	1,54	0,569	34,8	7,93	2,01	17,7	4,89	1,44	43,0	2,23	9,57	1,50	14,3	

Denumire L.L.	Dimensiunile secțiunii [mm]					Arie secțiunii A [cm ²]	Distanța axelor [cm]							tga	Marimi geometrice inerțiale											
															y - y			z - z			ξ - ξ		η - η		I _{yz} [cm ⁴]	
	I _y [cm ⁴]	W _y [cm ³]	i _y [cm]	I _z [cm ⁴]	W _z [cm ³]		i _z [cm]	I _ξ [cm ⁴]	i _ξ [cm]	I _η [cm ⁴]	i _η [cm]															
65x50x9			9	6,5	3,5	9,58	2,15	1,49	4,48	3,63	2,28	2,36	1,57	0,567	38,2	8,77	2,00	19,4	5,39	1,42	47,0	2,25	10,5	1,05	15,7	
75x50x7	75	50	7	6,5	3,5	8,31	2,48	1,25	5,10	3,77	2,13	2,63	1,38	0,433	46,4	9,24	2,36	16,5	4,39	1,41	53,3	2,53	9,57	1,07	15,09	
80x60x7	80	60	7	8	4	9,38	2,51	1,52	5,55	3,79	2,17	2,92	1,40	0,546	59,0	10,7	2,51	28,4	6,34	1,74	72,00	2,77	15,4	1,28	23,7	
80x65x6			6			8,41	2,39	1,65	5,61	4,63	2,69	2,94	2,01	0,649	52,9	9,41	2,51	31,2	6,44	1,93	68,5	2,85	15,6	1,35	24,2	
80x65x8			8			11,0	2,47	1,73	5,59	4,65	2,79	9,94	2,05	0,645	68,1	12,3	2,49	40,1	8,41	1,91	88,0	2,82	20,3	1,36	30,9	
80x65x10			10			13,6	2,55	1,81	5,56	1,68	2,90	2,95	2,11	0,640	82,2	15,1	2,46	48,3	10,3	1,89	10,6	2,79	24,8	1,35	36,8	
90x60x6	90	60	6	8	4	8,69	2,89	1,41	6,14	4,50	2,46	3,16	1,60	0,442	71,7	11,7	2,87	25,8	5,61	1,72	82,8	3,09	14,6	1,30	25,2	
90x60x8			8			11,4	2,97	1,49	6,11	4,54	2,56	3,15	1,69	0,437	92,5	15,4	2,85	33,0	7,31	1,70	107	3,06	19,0	1,29	32,1	
100x50x8	100	50	8	9	4,5	11,4	3,59	1,12	6,49	4,44	2,00	2,96	1,18	0,257	116	18,1	3,18	19,5	5,04	1,31	123	3,28	12,7	1,05	26,7	
100x50x10			10			14,1	3,67	1,2	6,43	4,40	2,08	2,93	1,22	0,253	141	22,2	3,16	23,4	6,17	1,29	149	3,25	15,4	1,05	31,6	
100x75x7	100	75	7			11,9	3,06	1,83	6,96	5,42	3,10	3,61	2,18	0,553	118	17,0	3,15	56,9	10,0	2,19	145	3,49	30,1	1,59	48,7	
100x75x9			9	10	5	15,1	3,15	1,91	6,91	5,45	3,22	3,63	2,22	0,549	148	21,5	3,13	71,0	12,7	2,17	181	3,47	37,8	1,59	60,5	
100x75x11			11			18,2	3,23	1,99	6,87	5,49	3,32	3,65	2,27	0,545	176	25,9	3,11	84,0	15,3	2,15	214	3,44	45,1	1,58	71,3	
120x80x8			8			15,5	3,83	1,87	8,23	5,99	3,27	4,23	2,16	0,437	226	27,6	3,82	80,8	13,2	2,28	260	4,10	46,6	1,73	79,4	
120x80x10	120	80	10	11	5,5	19,1	3,92	1,95	8,18	6,03	3,37	4,21	2,19	0,435	276	34,1	3,80	98,1	16,2	2,26	317	4,07	56,8	1,72	96,5	
120x80x12			12			22,7	4,00	2,03	8,14	6,06	3,46	4,20	2,25	0,432	323	40,4	3,77	114	19,1	2,24	371	4,04	66,6	1,71	111	
150x90x10	150	90	10	12,5	6,5	23,2	5,00	2,04	10,1	7,05	3,60	5,03	2,24	0,360	533	53,3	4,80	146	21,0	2,51	591	5,05	88,3	1,95	161	
150x90x12			12			27,5	5,08	2,12	10,1	7,10	3,70	5,00	2,30	0,358	627	63,3	4,77	171	24,8	2,49	694	5,02	104	1,94	189	
150x100x10	150	100	10			24,5	4,80	2,34	10,3	7,50	4,10	5,25	2,68	0,442	552	54,1	4,78	198	25,8	2,86	637	5,13	112	2,15	191	
150x100x12			12	13	6,5	28,7	4,89	2,42	10,2	7,53	4,19	5,24	2,73	0,439	650	64,2	4,76	232	30,6	2,84	719	5,10	132	2,15	227	
150x100x14			14			33,2	4,97	2,50	10,2	7,56	4,28	5,23	2,77	0,435	744	74,1	4,73	264	35,2	2,82	856	5,07	152	2,14	257	

Caracteristici geometrice ale secțiunilor folosite la calculul de torsiune

Nr. crt	Forma secțiunii	$I_t \text{ [mm}^4\text{]}$		$W_t \text{ [mm}^3\text{]}$		Punctele cu $\tau_{\max}$			Obs.	
1.		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4)$		$\frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4)$		- pe conturul exterior $\tau_{\max} = \frac{16DM_t}{\pi(D^4 - d^4)}$ - pe conturul interior : $\tau = \alpha \tau_{\max}$			$\alpha = \frac{d}{D}$	
2.		$\frac{\pi d^4}{32}$		$\frac{\pi d^3}{16}$		- pe contur : $\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$				
3.		$\frac{k_1 D^4}{16}$		$\frac{k D^3}{8}$		$\tau_{\max}$ - în fundul creștăturii			Valorile coeficiențiilor sunt :	
		$\frac{d}{D}$	0,05	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1,00	1,50
		k	0,89	0,82	0,81	0,76	0,66	0,52	0,38	0,14
		k ₁	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07

Nr. crt	Forma secțiunii	$I_t \left[mm^4 \right]$	$W_t \left[mm^3 \right]$	Punctele cu $\tau_{\max}$	Obs.							
4.		$4,74 D^4 \left(\frac{2h}{D} \right)^{3,35}$	$\frac{D^3}{22,9} \left(\frac{2h}{D} \right)^{2,82}$	$\tau_{\max}$ - la mijlocul tăieturii	$2 < \frac{D}{h} < 8$							
		$\frac{D^4}{16} \left(2,6 \frac{h}{D} - 1 \right)$	$\frac{D^3}{8} \left(\frac{2,6 \frac{h}{D} - 1}{0,3 \frac{h}{D} - 0,7} \right)$	$\tau_{\max}$ - la mijlocul tăieturii	$0,5 < \frac{D}{h} < 2$							
5.		$0,053 D^4$	$0,087 D^3$		$D = 2d$ $h = 0,875D$							
11.		$k h b^3$	$k_1 h b^2$	$\tau_{\max}$ - la mijlocul laturii mari. Pe latura mică : $\tau = k_2 \tau_{\max}$	Valorile coeficienți - lor k, k_1 si k_2 sunt :							
n	1	1,2	1,5	1,75	2	2,5	3	4	5	6	8	10
k	0,141	0,166	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,291	0,289	0,307	0,312
k ₁	0,208	0,219	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,282	0,291	0,299	0,307	0,312
k ₂	1,00	0,93	0,86	0,82	0,79	0,77	0,75	0,74	0,74	0,74	0,74	0,74